

# ЧАСТОТНЫЙ ПОДХОД К ИССЛЕДОВАНИЮ ДИНАМИЧЕСКИХ СВОЙСТВ МНОГОМЕРНЫХ СИСТЕМ, СОДЕРЖАЩИХ ИНТЕРВАЛЬНЫЕ ПАРАМЕТРЫ\*

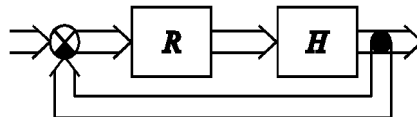
Ф. М. АХМЕДЖАНОВ, В. Г. КРЫМСКИЙ

*Уфимский государственный авиационный технический университет  
Россия*

Рассматриваются вопросы, связанные с распространением частотного подхода к исследованию систем автоматического управления (САУ) объектами с интервальными параметрами на многомерный случай. Показано, что для САУ невысокой размерности данная задача может быть сведена к задаче анализа эквивалентной одномерной системы (имеющей такой же интервальный характеристический полином). Это, в свою очередь, позволяет далее использовать для ее решения ранее разработанные методики и алгоритмы [1].

В работе [1] подробно рассмотрены вопросы, связанные с использованием амплитудных и фазовых частотных характеристик разомкнутых систем для анализа робастной устойчивости и определения робастных запасов устойчивости замкнутых САУ объектами с интервальными параметрами. Однако все сформулированные там выводы справедливы только для одномерных систем.

Распространение подобного подхода на случай многомерных систем представляет собой сложную задачу даже применительно к моделям с сосредоточенными параметрами. Тем не менее для широко распространенных классов САУ невысокой размерности (двумерных и трехмерных) задача исследования свойств в частотной области может быть решена непосредственно по известным выражениям для их характеристических полиномов [2]. Так, для двумерной САУ со структурной схемой, показанной на рисунке, с учетом



того, что  $H(s) = \|H_{ij}(s)\|_{2 \times 2}$  — передаточная матрица объекта, а  $R(s) = \|R_{ij}(s)\|_{2 \times 2}$  — передаточная матрица регулятора, можно записать, что характеристический полином  $B(s)$  есть числитель дробно-рациональной функции

$$\Omega(s) = 1 + H_{11}(s)R_{11}(s) + H_{12}(s)R_{21}(s) + H_{21}(s)R_{12}(s) + H_{22}(s)R_{22}(s) + \det[H(s)]\det[R(s)]. \quad (1)$$

\*© Ф. М. Ахмеджанов, В. Г. Крымский, 1997.

Таким образом, здесь можно ввести в рассмотрение передаточную функцию  $W^0(s)$  разомкнутой эквивалентной одномерной САУ

$$W^0(s) = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 H_{ij}(s)R_{ji}(s) + \det[H(s)]\det[R(s)], \quad (2)$$

замыкание которой единичной отрицательной обратной связью будет приводить (для случая полной управляемости и наблюдаемости [4]) к получению того же характеристического полинома, что и (1). Ориентируясь на (2), перейдем далее к рассмотрению ситуации, когда передаточные функции  $H_{ij}(s)$ ,  $i, j \in \{\overline{1, 2}\}$ , объекта содержат интервальные параметры.

Без ограничения общности можно считать, что все передаточные функции  $R_{ij}(s)$  регулятора приведены к общему знаменателю  $T_R(s)$ .

Что же касается объекта, то знаменатели функций  $H_{ij}(s)$ ,  $i, j \in \{\overline{1, 2}\}$ , как и знаменатель определителя  $\det[H(s)]$ , следует находить из уравнений динамики, представленных в форме Коши (где наглядно демонстрируется количество учитываемых аккумуляторов энергии).

Если

$$\dot{x}_H = A_H X_H + B_H U_U, \quad Y_H = C_H X_H + D_H U_H, \quad (3)$$

где  $U_H, X_H, Y_H$  — векторы входов, фазовых координат и выходов объекта соответственно, а  $A_H, B_H, C_H, D_H$  — матрицы с действительными элементами, то отмеченный выше общий знаменатель  $T_H(s)$  передаточных функций  $H_{ij}(s)$ ,  $i, j \in \{\overline{1, 2}\}$ , и определителя матрицы  $H(s)$  будет равен  $\det[sI - A_H]$ .

Таким образом, далее считаем, что

$$R_{ij}(s) = A_{ij}^R(s)/T_R(s), \quad H_{ij}(s) = A_{ij}^H(s)/T_H(s), \quad i, j \in \{\overline{1, 2}\},$$

$$\det[H(s)] = A^{\det}(s)/T_H(s),$$

где  $A_{ij}^R(s)$ ,  $A_{ij}^H(s)$ ,  $A^{\det}(s)$  — некоторые полиномы с интервальными коэффициентами.

После подстановки  $s = j\omega$  можно записать

$$A_{ik}^R(j\omega) = \alpha_{ik}(\omega) + j\beta_{ik}(\omega), \quad A_{ik}^H(j\omega) = p_{ik}(\omega) + jq_{ik}(\omega), \quad i, k \in \{\overline{1, 2}\},$$

$$A^{\det}(j\omega) = p^d(\omega) + jq^d(\omega),$$

$$T_H(j\omega) = t_1^H(\omega) + jt_2^H(\omega), \quad T_R(j\omega) = t_1^R(\omega) + jt_2^R(\omega),$$

где  $\alpha_{ik}(\omega)$ ,  $p_{ik}(\omega)$ ,  $p^d(\omega)$ ,  $t_1^H(\omega)$ ,  $t_1^R(\omega)$  обозначают вещественные части соответствующих выражений, а  $\beta_{ik}(\omega)$ ,  $q_{ik}(\omega)$ ,  $q^d(\omega)$ ,  $t_2^H(\omega)$ ,  $t_2^R(\omega)$  — их мнимые части.

Тогда, согласно (2),

$$\begin{aligned} W^0(j\omega) = & \frac{[t_1^R(\omega) + jt_2^R(\omega)]}{[t_1^H(\omega) + jt_2^H(\omega)][t_1^H(\omega) + jt_2^H(\omega)]} \sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^2 [p_{ik}(\omega) + jq_{ik}(\omega)][\alpha_{ki}(\omega) + j\beta_{ki}(\omega)] + \\ & + \left( [\alpha_{11}(\omega) + j\beta_{11}(\omega)][\alpha_{22}(\omega) + j\beta_{22}(\omega)] - \right. \\ & \left. - [\alpha_{12}(\omega) + j\beta_{12}(\omega)][\alpha_{21}(\omega) + j\beta_{21}(\omega)] \right) [p^d(\omega) + jq^d(\omega)]. \end{aligned} \quad (4)$$

Так как параметры объекта являются интервальными, то

$$\begin{aligned} p_{ik}(\omega) &\in [\underline{p}_{ik}(\omega)\bar{p}_{ik}(\omega)], & q_{ik}(\omega) &\in [\underline{q}_{ik}(\omega)\bar{q}_{ik}(\omega)], & i, k &\in \{\overline{1, 2}\}; \\ p^d(\omega) &\in [\underline{p}^d(\omega)\bar{p}^d(\omega)], & q^d(\omega) &\in [\underline{q}^d(\omega)\bar{q}^d(\omega)]; \\ t_1^H(\omega) &\in [\underline{t}_1^H(\omega)\bar{t}_1^H(\omega)], & t_2^H(\omega) &\in [\underline{t}_2^H(\omega)\bar{t}_2^H(\omega)], \end{aligned}$$

где нижние и верхние границы указанных интервалов ищутся по правилам, изложенным в [1].

В силу линейной зависимости перечисленных частотных функций от переменных параметров объекта можно в дальнейшем положить:

$$\begin{aligned} p_{11}(\omega) &= (1 - \lambda_1)\underline{p}_{11}(\omega) + \lambda_1\bar{p}_{11}(\omega), \\ p_{12}(\omega) &= (1 - \lambda_2)\underline{p}_{12}(\omega) + \lambda_2\bar{p}_{12}(\omega), \\ p_{21}(\omega) &= (1 - \lambda_3)\underline{p}_{21}(\omega) + \lambda_3\bar{p}_{21}(\omega), \\ p_{22}(\omega) &= (1 - \lambda_4)\underline{p}_{22}(\omega) + \lambda_4\bar{p}_{22}(\omega), \\ q_{11}(\omega) &= (1 - \lambda_5)\underline{q}_{11}(\omega) + \lambda_5\bar{q}_{11}(\omega), \\ q_{12}(\omega) &= (1 - \lambda_6)\underline{q}_{12}(\omega) + \lambda_6\bar{q}_{12}(\omega), \\ q_{21}(\omega) &= (1 - \lambda_7)\underline{q}_{21}(\omega) + \lambda_7\bar{q}_{21}(\omega), \\ q_{22}(\omega) &= (1 - \lambda_8)\underline{q}_{22}(\omega) + \lambda_8\bar{q}_{22}(\omega), \\ t_1^H(\omega) &= (1 - \lambda_9)\underline{t}_1^H(\omega) + \lambda_9\bar{t}_1^H(\omega), \\ t_2^H(\omega) &= (1 - \lambda_{10})\underline{t}_2^H(\omega) + \lambda_{10}\bar{t}_2^H(\omega). \end{aligned} \tag{5}$$

Здесь  $\lambda_i, i \in \{\overline{1, 10}\}$  — действительные переменные, изменяющиеся в интервале  $[0, 1]$ .

Из того, что  $T_H(s)$  является общим знаменателем определителя матрицы  $H(s)$  и ее элементов, вытекает зависимость  $p^d(\omega)$  и  $q^d(\omega)$  от других интервальнозначных функций, а именно:

$$\begin{aligned} &[p^d(\omega) + jq^d(\omega)][t_1^H(\omega) + jt_2^H(\omega)] = \\ &= [p^d(\omega) + jq^d(\omega)] = [p_{11}(\omega) + jq_{11}(\omega)][p_{22}(\omega) + jq_{22}(\omega)] - [p_{12}(\omega) + jq_{12}(\omega)][p_{21}(\omega) + jq_{21}(\omega)]. \end{aligned}$$

Отсюда  $p^d(\omega)$  и  $q^d(\omega)$  можно рассматривать как результаты решения системы линейных уравнений:

$$\begin{aligned} t_1^H(\omega)p^d(\omega) - t_2^H(\omega)q^d(\omega) &= p_{11}(\omega)p_{22}(\omega) - q_{11}(\omega)q_{22}(\omega) + p_{12}(\omega)p_{21}(\omega) - q_{12}(\omega)q_{21}(\omega), \\ t_2^H(\omega)p^d(\omega) + t_1^H(\omega)q^d(\omega) &= p_{11}(\omega)q_{22}(\omega) + q_{11}(\omega)p_{22}(\omega) + p_{12}(\omega)q_{21}(\omega) - q_{12}(\omega)p_{21}(\omega). \end{aligned}$$

Подставляя теперь (5), а также выражения для  $p^d(\omega)$  и  $q^d(\omega)$  в (4), нетрудно сформировать выражения для АЧХ  $|W^0(j\omega)|$  и ФЧХ  $\text{Arg}\{W^0(j\omega)\}$  как функции от частоты  $\omega$  и переменных  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{10}$ :

$$|W^0(j\omega)| = H^0(\omega) = f_1(\omega, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{10}), \tag{6}$$

$$\text{Arg}\{W^0(j\omega)\} = \Theta^0(\omega) = f_2(\omega, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{10}). \tag{7}$$

Основываясь на (6) и (7), при каждом значении частоты  $\omega$  можно находить верхние  $\overline{H}^0(\omega)$ ,  $\overline{\Theta}^0(\omega)$  и нижние  $\underline{H}^0(\omega)$ ,  $\underline{\Theta}^0(\omega)$  границы для  $H^0(\omega)$  и  $\Theta^0(\omega)$  в результате решения оптимизационных задач поиска

$$\begin{aligned}\overline{H}^0(\omega) &= \max_{\lambda_i, i \in \{\overline{1, 10}\}} \{H^0(\omega)\}, \\ \underline{H}^0(\omega) &= \min_{\lambda_i, i \in \{\overline{1, 10}\}} \{H^0(\omega)\}, \\ \overline{\Theta}^0(\omega) &= \max_{\lambda_i, i \in \{\overline{1, 10}\}} \{\Theta^0(\omega)\}, \\ \underline{\Theta}^0(\omega) &= \min_{\lambda_i, i \in \{\overline{1, 10}\}} \{\Theta^0(\omega)\},\end{aligned}$$

при ограничениях, задающих гиперкуб

$$0 \leq \lambda_i \leq 1, \quad i \in \{\overline{1, 10}\}. \quad (8)$$

Задачи данного класса могут быть решены с помощью различных модификаций метода последовательного симплексного планирования [3]. Опыт показывает, что наиболее эффективными здесь оказываются модификации "с обучением" (автоматической корректировкой шага). Метод последовательного симплексного планирования применительно к таким задачам обладает рядом достоинств: он прост в реализации, не связан с непосредственным вычислением производных от оптимизируемых функций, удобен с точки зрения учета ограничений на величины переменных.

Повторяя выполнение выбранного алгоритма оптимизации для разных значений  $\omega$ , получаем возможность построить "трубки" АЧХ и ФЧХ эквивалентной одномерной САУ в разомкнутом состоянии. По этим "трубкам", пользуясь методиками и алгоритмами, описанными в [1], можно сделать вывод о робастной устойчивости (неустойчивости) замкнутой многомерной САУ.

Методика дополнительного исследования, необходимого при некоторых случаях взаимного расположения указанных "трубок", выглядит следующим образом:

- 1) варьируется частота  $\omega$  с шагом  $\Delta\omega$  в диапазоне от  $\omega = \omega_2$  до  $\omega = \omega_3$ ;
- 2) при каждом значении  $\omega$  из этого диапазона решается оптимизационная задача поиска

$$\underline{\Theta}^0(\omega) = \min_{\lambda_i, i \in \{\overline{1, 10}\}} \{\Theta^0(\omega)\}$$

при ограничениях

$$\begin{aligned}H^0(\omega, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{10}) &= 1, \\ 0 \leq \lambda_i \leq 1, \quad i \in \{\overline{1, 10}\};\end{aligned} \quad (9)$$

- 3) если  $\underline{\Theta}^0(\omega)$  при некотором  $\omega$  оказывается менее  $-180^\circ$ , то делается вывод о неустойчивости САУ в робастном смысле.

Для эквивалентной одномерной САУ можно ввести в рассмотрение запасы устойчивости, но свойства исходной двумерной системы эти запасы устойчивости будут характеризовать только приближенно ввиду влияния нулей различных передаточных функций.

Важно отметить следующее достоинство предложенного подхода: при произвольном количестве неопределенных параметров объекта в нашей задаче всегда фигурируют не более 10 варьируемых переменных  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{10}$  (уменьшение этого числа возможно, когда в объекте отсутствуют какие-либо перекрестные связи).

Подход практически без затруднений можно распространить на случай трехмерных систем (специфика задачи здесь заключается в том, что в выражение типа (1) для определения характеристического полинома трехмерной САУ будут входить также произведения адъюнктов второго порядка матриц  $H(s)$ ,  $R(s)$ ). Число варьируемых переменных при выполнении оптимизации в данной ситуации будет достигать 20.

Вообще говоря, число переменных  $\lambda_1, \lambda_2, \dots$  при исследовании свойств системы произвольной размерности  $N$  будет определяться величиной  $2N^2 + 2$  (независимо от количества неопределенных параметров передаточных функций объекта).

## Список литературы

- [1] АХМЕДЖАНОВ Ф. М., КРЫМСКИЙ В. Г. *Исследование устойчивости автоматических систем с интервальной параметрической неопределенностью на основе модифицированных частотных методов*. УГАТУ, Уфа, Деп. в ВИНТИ №2998–В95, 1995.
- [2] БОДНЕР В. А., РЯЗАНОВ Ю. А., ШАЙМАРДАНОВ Ф. А. *Системы автоматического управления двигателями летательных аппаратов*. Машиностроение, М., 1973.
- [3] ДАМБРАУСКАС А. П. *Симплексный поиск*. Энергия, М., 1979.
- [4] КАТКОВНИК В. Я., ПОЛУЭКТОВ Р. А. *Многомерные дискретные системы управления*. Наука, М., 1966.