Вычислительные технологии **Том 7, № 2, 2002**

РАСЧЕТ ПАРАМЕТРИЗОВАННОЙ КООРДИНАТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ДИНАМИКИ НИТИ ПРИ СОВМЕСТНОМ УЧЕТЕ ПРОДОЛЬНЫХ И ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ

Р. Р. Саакян
Амурский государственный университет, Благовещенск, Россия
e-mail: sahakyan@amursu.ru
В. А. Климов
Санкт-Петербургский государственный университет технологии и дизайна, Россия

The correction of the calculation schemes for solving the equation of fluctuation of a string according D'Alamber is considered taking into account the interaction of parts of string movement on the multilocal test facility.

Свойства химических волокон отличаются большим разнообразием и определяются не в последнюю очередь внутренними межмолекулярными связями. Этим можно объяснить внимание, которое уделяется акустическим методам исследования свойств химических волокон.

Перспективным следует считать применение в этой области ультразвуковых подходов, обеспечивающих одновременно неповреждаемость объекта вследствие малости амплитуды колебаний нити и сильное воздействие на элементы измеряющих средств, что достигается применением высокочастотных сигналов. При возбуждении в нити высокочастотных колебаний затрагивается ее внутренняя структура и возбуждаются межмолекулярные связи.

Для исследования свойств химических волокон используется ультразвуковая испытательная установка, кинематическая схема которой представлена на рис. 1 [1].

Кинематическая схема имеет четыре участка. Имеются три ограничителя движения, по которым нить может скользить в обоих направлениях, левый конец нити закреплен, а на правом — подвешен груз, создающий натяжение. Точками ограничения движения являются точки *0*, *1*, *2*, *3*. Углы ψ определяют исходные положения нити в натянутом состоянии. В точке *0* нить закреплена. Опора *1* создает за счет пьезодатчика вертикальные перемещения точек нити при их скольжении по ней, создавая гармонические колебания. В опору *2* вмонтирован пьезоприемник, сигнал которого является выходным.

Вследствие особенностей конструкции пьезоэлементов [2] в нити возбуждаются и принимаются высокочастотные совместные продольные и поперечные колебания. Об этом

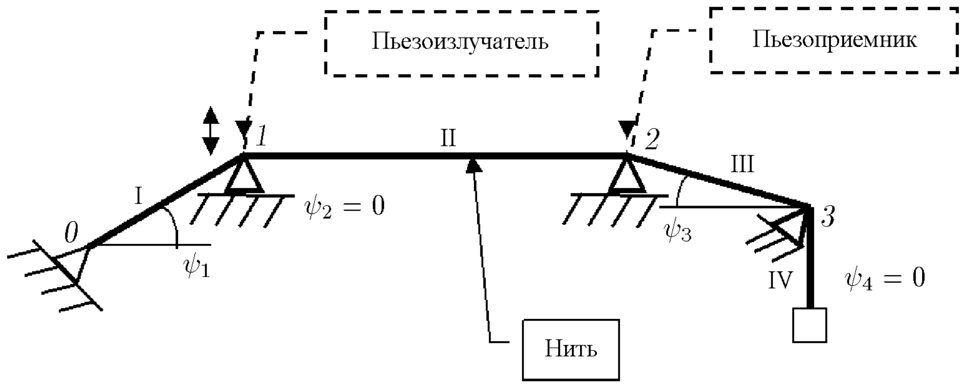

Рис. 1.

свидетельствует изменение скорости распространения ультразвука в нити в зависимости от частоты возбуждения высокочастотных колебаний.

Следовательно, выходной сигнал высокочастотной установки (экспериментальная кривая) содержит информацию о внутренней структуре нити, а высокочастотные колебания приводят в действие механизмы, которые влияют на свойства нитей и отражаются в их характеристиках.

С целью выявления возможности использования экспериментальной кривой для диагностирования свойств испытуемых нитей требуется установить те свойства нити, которые определяют форму ее движения.

В соответствии с общим подходом [1] вначале записываются уравнения для каждого канала движения, т. е. для каждой координаты, определяющей положение элемента нити, без учета взаимодействия каналов движения, например, продольных и поперечных колебаний. Для каждого участка кинематической схемы получается своя совокупность уравнений параболического типа, неоднородных хотя бы из-за слагаемых, учитывающих влияние веса. В общем случае без учета влияния веса нити соответственно для продольных и поперечных колебаний имеем

$$U_{tt} = \frac{b}{\rho_0} U_x'', \quad V_{tt} = \frac{T_0}{\rho_0} V_x'',$$

где b — коэффициент упругости нити; T — натяжение; ρ_0 — линейная плотность.

Для получения решения по каждому из этих уравнений может быть использована известная схема, опирающаяся на запись решения в форме Даламбера. Однако в данном случае требуется осуществить обобщение этой схемы, чтобы обобщенная схема поиска решения по Даламберу давала возможность найти полное решение уравнения динамики нити [3].

В соответствии с принципом Даламбера решение уравнения для продольных колебаний участка ищется в виде

$$U = A(p) + B(q),$$

где $p = \left(t + \sqrt{\rho_0/b}\, x\right)$ и $q = \left(t - \sqrt{\rho_0/b}\, x\right)$.

Запись решения в представленном виде позволяет расчеты, как и построение процессов, выполнять по конечно-разностной схеме. Для запуска схемы необходимо определить функции A и B на начальных участках изменения аргументов с использованием начальных условий [3].

Конечно-разностная схема для вычисления функций A и B выводится из граничных условий. Причем на первом этапе ставится задача получить функции $A(p)$ и $B(q)$ без раскрытия содержания составных аргументов p и q. При этом имеется в виду, что по известным функциям $A(p)$ и $B(q)$ на втором этапе получения решений могут быть найдены зависимости $U(t)$ при некотором x или $U(x)$ при некотором диапазоне изменения t.

Решение для поперечных колебаний нити находится аналогичным образом:

$$V = C(p) + D(q),$$

где $p = \left(t + \sqrt{\rho_0/T_0}\, x\right)$, $q = \left(t - \sqrt{\rho_0/T_0}\, x\right)$.

Переход к полному решению должен предусматривать, во-первых, учет взаимовлияния участков кинематической схемы, поскольку объект рассмотрения — нить — является единым для всей кинематической схемы и точки нити могут переходить с одного участка на другой, во-вторых, учет на каждом участке взаимовлияний каналов движения нити.

Численно-аналитическое моделирование динамики химических нитей на испытательной установке предполагает:

— конкретизацию для каждого участка направлений осей продольных и поперечных колебаний;

— запись для каждого участка начальных и граничных условий;

— запись выражений для функций A, B, C, D, которые используются для формирования решения, на начальных участках изменения аргументов, необходимых для запуска расчетных схем по Даламберу;

— получение на основе аналитических зависимостей правил для составления конечно-разностных схем формирования функций A, B, C, D целиком для каждого участка;

— учет взаимовлияния всех участков кинематической схемы, т. е. скольжения нити по опорам, введением параметризации координат вдоль нити;

— расчет параметризованной координаты по каждой опоре как для продольных, так и для поперечных колебаний нити.

Для детального моделирования исследуемого процесса в статье предлагается провести расчет параметризованной координаты при учете продольных и поперечных колебаний.

Расчет параметризованной координаты математической модели динамики нити, как уже было показано в [3], выполняется по соотношению

$$x_1(t_{i+1}) = x_1(t_i) + \dot{x}_1(t_i)\Delta t \tag{1}$$

(далее все формулы будем рассматривать для опоры 1). Причем для функции $\dot{x}_1$ были получены отдельные зависимости для поперечных и продольных колебаний [3]:

$$\dot{x}_1 = \dot{x}_1(A_1', B_1', A_2', B_2', x_1),$$
$$\dot{x}_1 = \dot{x}_1(C_1', D_1', C_2', D_2', x_1),$$

которые использовались в дальнейших расчетах. Здесь индексы при функциях A, B, C и D обозначают номера участков.

При исследовании динамики нити с учетом взаимодействия каналов движения [1] (т. е. продольных и поперечных колебаний) расчет функции $\dot{x}_1$ выполняется по формуле [1]

$$\dot{x}_1 = \dot{x}_1(A_1', B_1', A_2', B_2', C_1', D_1', C_2', D_2', x_1). \tag{2}$$

Как и в предыдущем случае [3], исходим из того, что условие, определяющее точку нити (и ее координату), лежащую на опоре 1 (точка *1*), есть равенство натяжений или относительных деформаций нити в этой точке для первого и второго участков.

Вначале рассмотрим обобщенное, вне зависимости от участков, математическое представление относительной деформации нити с учетом взаимодействия каналов движения (продольных и поперечных колебаний). Возьмем две близлежащие точки нити $-x$ и $x+\Delta x$. Будем рассматривать систему координат $(\tilde{U}, \tilde{V})$, определяемых соотношениями

$$\begin{cases} \tilde{U} = x + U, \\ \tilde{V} = V, \end{cases} \tag{3}$$

где U, V — соответственно продольные и поперечные отклонения от исходного положения нити; $\tilde{U}$, $\tilde{V}$ — полные координаты продольных и поперечных колебаний нити (рис. 2).

Вычислим расстояние (длину нити) между точками x и $x + \Delta x$:

$$p(x, x + \Delta x) \approx \sqrt{\left[\tilde{U}(t, x + \Delta x) - \tilde{U}(t, x)\right]^2 + \left[\tilde{V}(t, x + \Delta x) - \tilde{V}(t, x)\right]^2}.$$

Для относительной деформации нити ε получаем уравнение

$$\varepsilon = \frac{\rho(x, x + \Delta x) - \Delta x}{\Delta x} = \frac{\rho(x, x + \Delta x)}{\Delta x} - 1 \approx$$

$$\approx \sqrt{\left[\frac{\widetilde{U}(t, x + \Delta x) - \widetilde{U}(t, x)}{\Delta x}\right]^2 + \left[\frac{\widetilde{V}(t, x + \Delta x) - \widetilde{V}(t, x)}{\Delta x}\right]^2} - 1. \tag{4}$$

При условии $\Delta x \to 0$ из (4) имеем

$$\varepsilon \approx \sqrt{\left[\widetilde{U}'_x(t, x)\right]^2 + \left[\widetilde{V}'_x(t, x)\right]^2} - 1. \tag{5}$$

С учетом системы (3) для относительной деформации нити ε получаем

$$\varepsilon \approx \sqrt{(1 + \widetilde{U}'_x)^2 + (\widetilde{V}'_x)^2} - 1. \tag{6}$$

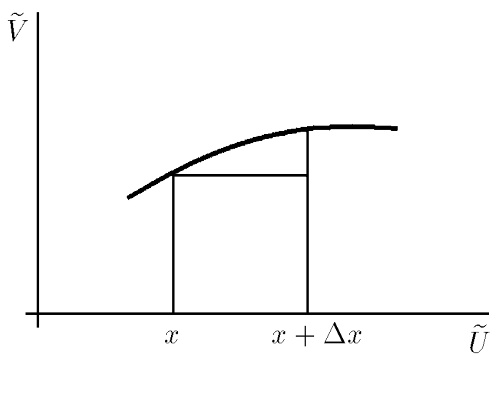

Рис. 2.

Как было сказано выше, в данном случае в точке *1* должно соблюдаться равенство полученной относительной деформации (натяжения) нити со стороны первого участка справа и со стороны второго участка слева:

$$\left(\sqrt{(1+U'_{1x})^2+{V'_{1x}}^2}-1\right)_{x=x_1}=\left(\sqrt{(1+U'_{2x})^2+{V'_{2x}}^2}-1\right)_{x=x_1}. \tag{7}$$

После сокращений уравнение (7) приобретает по отношению к производным функций A, B, C и D по полным аргументам вид

$$\begin{aligned}
&\left[1+\left(A'_1\left(t+\sqrt{\frac{\rho_0}{b}}x_1\right)-B'_1\left(t-\sqrt{\frac{\rho_0}{b}}x_1\right)\right)\sqrt{\frac{\rho_0}{b}}\right]^2+\\
&\quad+\left[C'_1\left(t+\sqrt{\frac{\rho_0}{T_0}}x_1\right)-D'_1\left(t-\sqrt{\frac{\rho_0}{T_0}}x_1\right)\right]^2\frac{\rho_0}{T_0}=\\
&=\left[1+\left(A'_2\left(t+\sqrt{\frac{\rho_0}{b}}x_1\right)-B'_2\left(t-\sqrt{\frac{\rho_0}{b}}x_1\right)\right)\sqrt{\frac{\rho_0}{b}}\right]^2+\\
&\quad+\left[C'_2\left(t+\sqrt{\frac{\rho_0}{T_0}}x_1\right)-D'_2\left(t-\sqrt{\frac{\rho_0}{T_0}}x_1\right)\right]^2\frac{\rho_0}{T_0}.
\end{aligned} \tag{8}$$

Далее можно воспользоваться приведенными ниже граничными условиями из [3] для первого и второго участков, выполнить для одного из уравнений в каждой группе дифференцирование по времени t, имея в виду, что в получающемся результате будет присутствовать производная $\dot{x}_1$.

Рассмотрим граничные условия:

Первый участок — продольные колебания

$$\begin{cases} A_1(t)+B_1(t)=0,\\ A_1\left(t+\sqrt{\frac{\rho_0}{b}}x_1\right)-B_1\left(t-\sqrt{\frac{\rho_0}{b}}x_1\right)=l_1-x_1(t)+\alpha\sin\psi_1(1-\cos\omega t). \end{cases} \tag{9}$$

Второй участок — продольные колебания

$$\begin{cases} A_2\left(t+\sqrt{\frac{\rho_0}{b}}x_1\right)-B_2\left(t-\sqrt{\frac{\rho_0}{b}}x_1\right)=l_1-x_1(t),\\ A_2\left(t+\sqrt{\frac{\rho_0}{b}}x_2\right)-B_2\left(t-\sqrt{\frac{\rho_0}{b}}x_2\right)=l_1+l_2-x_2(t). \end{cases} \tag{10}$$

Первый участок — поперечные колебания

$$\begin{cases} C_1(t)+D_1(t)=0,\\ C_1\left(t+\sqrt{\frac{\rho_0}{T_0}}x_1\right)-D_1\left(t-\sqrt{\frac{\rho_0}{T_0}}x_1\right)=\alpha\cos\psi(1-\cos\omega t). \end{cases} \tag{11}$$

Второй участок — поперечные колебания

$$\begin{cases} C_2\left(t+\sqrt{\frac{\rho_0}{T_0}}x_1\right)-D_2\left(t-\sqrt{\frac{\rho_0}{T_0}}x_1\right)=\alpha(1-\cos\omega t),\\ C_2\left(t+\sqrt{\frac{\rho_0}{T_0}}x_2\right)-D_2\left(t-\sqrt{\frac{\rho_0}{T_0}}x_2\right)=0. \end{cases} \tag{12}$$

Возьмем второе соотношение системы (9). Дифференцирование по времени t дает

$$\left(1+\sqrt{\frac{\rho_0}{b}}\dot{x}_1\right)A_1'\left(t+\sqrt{\frac{\rho_0}{b}}x_1\right)+\left(1-\sqrt{\frac{\rho_0}{b}}\dot{x}_1\right)B_1'\left(t-\sqrt{\frac{\rho_0}{b}}x_1\right)=-\dot{x}_1+\alpha\omega\sin\psi_1\sin\omega t. \tag{13}$$

Из первого соотношения системы (10) после дифференцирования получим

$$\left(1-\sqrt{\frac{\rho_0}{b}}\dot{x}_1\right)B_2'\left(t-\sqrt{\frac{\rho_0}{b}}x_1\right)+\left(1+\sqrt{\frac{\rho_0}{b}}\dot{x}_1\right)A_2'\left(t+\sqrt{\frac{\rho_0}{b}}x_1\right)=-\dot{x}_1. \tag{14}$$

Дифференцирование второго соотношения системы (11) дает

$$\left(1+\sqrt{\frac{\rho_0}{T_0}}\dot{x}_1\right)C_1'\left(t+\sqrt{\frac{\rho_0}{T_0}}x_1\right)+\left(1-\sqrt{\frac{\rho_0}{T_0}}\dot{x}_1\right)D_1'\left(t-\sqrt{\frac{\rho_0}{T_0}}x_1\right)=\alpha\omega\cos\psi_1\sin\omega t. \tag{15}$$

Из первого соотношения системы (12) после дифференцирования получим

$$\left(1-\sqrt{\frac{\rho_0}{T_0}}\dot{x}_1\right)D_2'\left(t-\sqrt{\frac{\rho_0}{T_0}}x_1\right)+\left(1+\sqrt{\frac{\rho_0}{T_0}}\dot{x}_1\right)C_2'\left(t-\sqrt{\frac{\rho_0}{T_0}}x_1\right)=\alpha\omega\sin\omega t. \tag{16}$$

Подставляя из (13), (14), (15) и (16) соответственно A_1', B_2', C_1', D_2' в уравнение (8), запишем

$$\left[1+\left(-\frac{2}{1+\sqrt{\frac{\rho_0}{b}}\dot{x}_1}B_1'\left(t-\sqrt{\frac{\rho_0}{b}}x_1\right)+\frac{-\dot{x}_1+\alpha\omega\sin\psi_1\sin\omega t}{1+\sqrt{\frac{\rho_0}{b}}\dot{x}_1}\right)\sqrt{\frac{\rho_0}{b}}\right]^2+$$

$$+\left[-\frac{2}{1+\sqrt{\frac{\rho_0}{T_0}}\dot{x}_1}D_1'\left(t-\sqrt{\frac{\rho_0}{T_0}}x_1\right)+\frac{\alpha\omega\cos\psi_1\sin\omega t}{1+\sqrt{\frac{\rho_0}{T_0}}\dot{x}_1}\right]^2\sqrt{\frac{\rho_0}{T_0}}=$$

$$=\left[1+\left(-\frac{2}{1-\sqrt{\frac{\rho_0}{b}}\dot{x}_1}A_2'\left(t+\sqrt{\frac{\rho_0}{b}}x_1\right)+\frac{-\dot{x}_1}{1+\sqrt{\frac{\rho_0}{b}}\dot{x}_1}\right)\sqrt{\frac{\rho_0}{b}}\right]^2+$$

$$+\left[\frac{2}{1-\sqrt{\frac{\rho_0}{T_0}}\dot{x}_1}C_2'\left(t+\sqrt{\frac{\rho_0}{T_0}}x_1\right)-\frac{\alpha\omega\sin\omega t}{1-\sqrt{\frac{\rho_0}{T_0}}\dot{x}_1}\right]^2\sqrt{\frac{\rho_0}{T_0}}. \tag{17}$$

Упростив соотношение (17), получим

$$\frac{\left[1+\sqrt{\frac{\rho_0}{b}}\left(\alpha\omega\sin\psi_1\sin\omega t-2B_1'\left(t-\sqrt{\frac{\rho_0}{b}}x_1\right)\right)\right]^2}{\left(1+\sqrt{\frac{\rho_0}{b}}\dot{x}_1\right)^2}+\frac{\left[\alpha\omega\cos\psi_1\sin\omega t-2D_1'\left(t-\sqrt{\frac{\rho_0}{T_0}}x_1\right)\right]^2\frac{\rho_0}{T_0}}{\left(1+\sqrt{\frac{\rho_0}{T_0}}\dot{x}_1\right)^2}=$$

$$= \frac{\left[1+\sqrt{\frac{\rho_0}{b}}\left(2A_2'(t+\sqrt{\frac{\rho_0}{b}}x_1)\right)\right]^2}{\left(1-\sqrt{\frac{\rho_0}{b}}\dot{x}_1\right)^2} + \frac{\left[2C_2'\left(t+\sqrt{\frac{\rho_0}{T_0}}x_1\right)-\alpha\omega\sin\omega t\right]^2\frac{\rho_0}{T_0}}{\left(1-\sqrt{\frac{\rho_0}{T_0}}\dot{x}_1\right)^2}. \tag{18}$$

Уравнение (18) представляет собой полином 4-й степени относительно $\dot{x}_1$. Однако в допустимом интервале изменения $\dot{x}_1$ (а именно следует считать $|\dot{x}_1| < \min\left\{\sqrt{T_0/\rho_0}, \sqrt{b/\rho_0}\right\}$ — скорость распространения волны) находится только один корень уравнения (18). В численной схеме этот корень можно определить методом Ньютона, методом бисекции и др.

Для нахождения $\dot{x}_1$ в линейном приближении разложим знаменатели дробей соотношения (18) в ряд Тейлора относительно $\dot{x}_1$:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\left(1+\sqrt{\frac{\rho_0}{b}}\dot{x}_1\right)^2} = 1-2\sqrt{\frac{\rho_0}{b}}\dot{x}_1+3\frac{\rho_0}{b}\dot{x}_1^2+..., \\ \dfrac{1}{\left(1+\sqrt{\frac{\rho_0}{T_0}}\dot{x}_1\right)^2} = 1-2\sqrt{\frac{\rho_0}{T_0}}\dot{x}_1+3\frac{\rho_0}{T_0}\dot{x}_1^2+...; \end{cases} \tag{19}$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\left(1-\sqrt{\frac{\rho_0}{b}}\dot{x}_1\right)^2} = 1+2\sqrt{\frac{\rho_0}{b}}\dot{x}_1+3\frac{\rho_0}{b}\dot{x}_1^2-..., \\ \dfrac{1}{\left(1-\sqrt{\frac{\rho_0}{T_0}}\dot{x}_1\right)^2} = 1+2\sqrt{\frac{\rho_0}{T_0}}\dot{x}_1+3\frac{\rho_0}{T_0}\dot{x}_1^2-... \end{cases} \tag{20}$$

Используя (18) – (20), получаем искомую зависимость (2) в линейном приближении в виде

$$\dot{x}_1(t) \approx \frac{R_1^2+R_2^2-R_3^2-R_4^2}{2\left(\sqrt{\frac{\rho_0}{b}}(R_1^2+R_3^2)+\sqrt{\frac{\rho_0}{b}}(R_2^2+R_4^2)\right)}, \tag{21}$$

где

$$R_1 = 1+\sqrt{\frac{\rho_0}{b}}\left(\alpha\omega\sin\psi_1\sin\omega t-2B_1'\left(t-\sqrt{\frac{\rho_0}{b}}x_1\right)\right);$$

$$R_2\left(\alpha\omega\cos\psi_1\sin\omega t-2D_1'\left(t-\sqrt{\frac{\rho_0}{T_0}}x_1\right)\right)\sqrt{\frac{\rho_0}{T_0}};$$

$$R_3 = 1+\sqrt{\frac{\rho_0}{b}}\left(2A_2'\left(t+\sqrt{\frac{\rho_0}{b}}x_1\right)\right);$$

$$R_4 = \left(2C_2'\left(t+\sqrt{\frac{\rho_0}{T_0}}x_1\right)-\alpha\omega\sin\omega\right)\sqrt{\frac{\rho_0}{T_0}}.$$

Эффективность использования в расчетных схемах параметризованной координаты x_1 при совместном учете продольных и поперечных колебаний нити (21) была подтверждена численными экспериментами [4], в которых обнаружены следующие эффекты, не воспроизводимые при раздельном моделировании [3]:

— зависимость скорости прохождения звуковой волны по нити от частоты возбуждения, что свидетельствует о существовании поперечной составляющей [2];

— появление высокочастотного относительно частоты возбуждения колебательного процесса, наблюдаемого в эксперименте;

— наличие первого полупериода колебания нити, установленное только при учете скольжения на опорах, а также наблюдаемое в эксперименте.

Список литературы

[1] Романов В. Е., Жабко А. П., Климов В. А. К формированию прикладной теории динамики нити // Изв. вузов. Технология текстильной промышленности. 1998. №6.

[2] Хакимов О. Ш., Хабибуллаев П. К. Акустические методы и приборы для контроля и исследования ориентированных полимеров. Ташкент: ФАН, 1990. 268 с.

[3] Маежов Е. Г., Червяков В. В., Донской А. С., Жабко Л. Е. Первый аспект обобщенной расчетной схемы по Даламберу в динамике нити // Изв. вузов. Технология текстильной промышленности. 1999. №4.

[4] Романов В. Е., Саакян Р. Р., Червяков В. В. и др. Программа моделирования динамики гибкой нити на высокочастотной многоопорной испытательной установке: Свидетельство об официальной регистрации программ для ЭВМ №2001610167. Российское агентство по патентам и товарным знакам (РОСПАТЕНТ) — Российская Федерация. 2001.

Поступила в редакцию 5 апреля 2001 г.,
в переработанном виде — 10 августа 2001 г.