Вычислительные технологии **Том 7, № 2, 2002**

ГРУППОВОЙ АНАЛИЗ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ КИНЕТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ. РЕЗУЛЬТАТЫ И ПЕРСПЕКТИВА

Ю. Н. Григорьев
Институт вычислительных технологий СО РАН
Новосибирск, Россия
С. В. Мелешко
Институт теоретической и прикладной механики СО РАН
Новосибирск, Россия
e-mail: grigor@ict.nsc.ru

The paper contains a survey of original authors‘ studies on group theory analysis of integrodifferential kinetic equations of Boltzmann, Smolukhovsiy, Vlasov and others. Scheme of direct method for calculation of widest Lie groups (algebras) admitted by these equations is given. The groups, optimal systems of their subgroups and new invariant solutions obtained by authors for concrete equations are considered.

Введение

Кинетические уравнения (КУ) составляют основу математического аппарата кинетических теорий разреженного газа, плазмы, переноса излучений, коагуляции дисперсных систем. Известны и стали классическими кинетические уравнения Больцмана, Власова, Ландау, Смолуховского [1 – 3].

Характерной особенностью КУ является наличие в них нелокальных (интегральных) операторов. В кинетические модели, где главную роль играют коллективные (осредненные) взаимодействия частиц, нелокальность обычно входит в коэффициенты дифференциальных операторов через некоторые интегральные функционалы от решения. Примерами могут служить уравнения Власова для бесстолкновительной плазмы или уравнение Бхатнагара — Гросса — Крука в динамике разреженного газа.

Кинетические уравнения для систем с парным взаимодействием частиц включают в себя интегральные операторы, называемые интегралами столкновений. Как правило, они выражаются через многомерные интегралы с квадратичной нелинейностью и сложной зависимостью ядра от переменных интегрирования. К этому типу относятся уравнения Больцмана кинетической теории газов и уравнение Смолуховского в теории коагуляции. В этой связи КУ принято относить к классу интегродифференциальных уравненй.

В математической теории КУ особое место всегда занимали исследования их инвариантных решений, которые напрямую связаны с фундаментальными свойствами симметрии этих уравнений. Как известно, для изучения инвариантных решений дифференциальных уравнений широко используется аппарат группового анализа [4, 5]. Выработанный здесь подход включает следующие этапы:

1. Нахождение тем или иным способом группы Ли, допускаемой уравнением.

2. Классификация всех подгрупп допустимой группы — построение оптимальной системы подгрупп, позволяющей разбить полное множество инвариантных решений на непересекающиеся классы.

3. Поиск и вычисление в явном виде отдельных инвариантных решений.

Характерные для КУ сложная структура операторов и большое число переменных значительно затрудняют для них осуществление всех перечисленных этапов. Тем не менее в последние два десятилетия в приложении группового анализа к исследованию КУ был достигнут значительный прогресс. В предлагаемом обзоре делается определенный акцент на результатах, полученных в рамках первых двух этапов, где оригинальные работы авторов имеют приоритетный характер.

1. Нахождение допустимой группы Ли из определяющих уравнений

Для дифференциальных уравнений с локальными дифференциальными операторами допустимые группы Ли вычисляются явно путем построения и решения определяющих уравнений [4, 5]. Эту схему до работ авторов [6, 7] не удавалось непосредственно использовать для КУ из-за входящих в них нелокальных операторов.

Предлагаемая схема построения определяющих уравнений может быть представлена следующим образом. Рассмотрим абстрактное уравнение

$$\Phi(\mathbf{u}) = 0, \tag{1.1}$$

где $\mathbf{u}$ — общий вектор переменных.

Постановка задачи предполагает, что в уравнение (1.1) входят операторы, действующие в бесконечномерных функциональных пространствах. Допускаемая уравнением (1.1) однопараметрическая группа преобразований $G_1(X)$ состоит из таких преобразований T_a, которые любое решение $\mathbf{u}$ уравнения (1.1) преобразуют в решение $\mathbf{u}'$ того же уравнения:

$$\mathbf{u}' = T_a\mathbf{u}, \tag{1.2}$$

$$\Phi(\mathbf{u}') = 0. \tag{1.3}$$

Каждое из преобразований $T_a \in G_1(X)$ определяется значением группового параметра a. Через X обозначен инфинитезимальный оператор группы G_1, который в символической записи выглядит как

$$X = \Omega(\mathbf{u})\partial_{\mathbf{u}}. \tag{1.4}$$

Здесь

$$\Omega(\mathbf{u}) = \frac{d\mathbf{u}'}{da}_{|a=0} \tag{1.5}$$

— вектор проекций оператора X на координатные операторы $\partial_{\mathbf{u}}$. С помощью $\Omega(\mathbf{u})$ любое из преобразований (1.2) в малой окрестности $a = 0$ можно представить как инфинитезимальное:

$$\mathbf{u}' = \mathbf{u} + \Omega(\mathbf{u}')a + \ldots \tag{1.6}$$

Нелокальным операторам, входящим в уравнение (1.1), среди координатных векторов, входящих в $\partial_{\mathbf{u}}$, соответствуют производные Фреше. По определению [4] уравнение (1.1), допускающее группу $G_1(X)$, инвариантно относительно ее инфинитезимального оператора X. Это условие записывается в форме

$$X\Phi(\mathbf{u}) = 0. \tag{1.7}$$

Если вычислить производную уравнения (1.3) по групповому параметру a в точке $a = 0$, то из соотношений (1.4) – (1.6) следует

$$\frac{d\Phi(\mathbf{u}')}{da}_{|a=0} = X\Phi(\mathbf{u}) = 0.$$

Таким образом, выражение

$$\frac{d\Phi(\mathbf{u}')}{da}_{|a=0} = 0 \tag{1.8}$$

является эквивалентным (1.7) условием инвариантности. Рассматривая (1.8) на многообразии всех решений уравнения (1.1), получаем определяющие уравнения для однопараметрической группы $G^1(X)$. Из них в принципе можно вычислить координаты $\Omega(\mathbf{u})$ оператора X. Если $\Omega(\mathbf{u})$ найдено, то допускаемая группа $G_1(X)$ выстраивается интегрированием системы уравнений Ли [4]:

$$\frac{d\mathbf{u}'}{da} = \Omega(\mathbf{u}'), \quad \mathbf{u}'_{|a=0} = \mathbf{u}. \tag{1.9}$$

Построенное таким образом множество всех различных однопараметрических подгрупп, которые допускает уравнение (1.1), образует искомую основную группу Ли.

Важно подчеркнуть, что полученная таким алгоритмом группа допустимых преобразований является наиболее широкой (полной) для общего случая исходного уравнения (1.1), расширения которой возможны лишь в специальных случаях задания входящих в уравнение параметров. Для кинетических уравнений это могут быть, например, различные виды сечений взаимодействия частиц.

2. Полные группы Ли и оптимальные системы подгрупп для частных кинетических уравнений

При реализации данной схемы наибольшие затруднения вызывает решение определяющих уравнений (1.8). Однако для кинетических уравнений с высокой степенью симметрии, когда их решения (функции распределения) зависят от минимального числа переменных, эти трудности удается эффективно преодолеть. Кроме вычисления наиболее широких групп Ли в этих случаях оказывается возможным построение оптимальных систем подгрупп и конструктивное описание полных множеств инвариантных решений. Другими словами, удается провести полный групповой анализ этих уравнений. Такие результаты были получены нами в работах [6 – 11].

2.1. Кинетическое уравнение Больцмана с приближенным асимптотическим интегралом столкновений

Рассматривалось однопараметрическое семейство кинетических уравнений

$$\Phi(\mathbf{u}) \equiv x^{\alpha} f_t - \int_0^1 ds\ [f(sx,t)f((1-s)x,t) - \theta(f)f(x,t)] = 0. \tag{2.1}$$

Уравнение (2.1) приближенно описывает релаксацию однородного газа в области больших молекулярных энергий. Здесь $x = v^2/2$; $f(x,t)$ — функция распределения (ФР) молекул по энергиям; $\theta(f)$ — некоторый функционал от f. Используется изотропная модель рассеяния со степенным потенциалом взаимодействия $U = k/r^{\nu-1}$ [12]. Показатель α, который является параметром семейства, определен как $\alpha = (5-\nu)(\nu-1)^{-1}/2$.

Уравнение (2.1) имеет смысл приближенной промежуточной асимптотики кинетического уравнения Больцмана при $x \to \infty$ и больших, но конечных t. Внимание к нему было привлечено в связи с проблемой расчета кинетических процессов при больших надтепловых энергиях молекул. Несмотря на простоту (2.1), оно сохраняет характерные черты полного уравнения Больцмана, в том числе нелокальный интегральный оператор столкновений.

Приложение общей схемы к уравнению (2.1) выглядит следующим образом. Пусть $\mathbf{u} = (x,t,f)$ — вектор переменных. Инфинитезимальный оператор группы записывается в виде

$$X = \xi(x,t,f)\partial_x + \eta(x,t,f)\partial_t + \zeta(x,t,f)\partial_f.$$

Определяющее уравнение (1.8) получается в форме

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a}_{|a=0} = x^{\alpha} D_t \psi(x,t) + \psi(0,t)f(x,t) + f(x,t)\psi(x,t) - 2\int_0^1 ds\ f((1-s)x,t)\psi(sx,t) = 0. \tag{2.2}$$

Здесь $f(x,t)$ — произвольное решение (2.1); D_t — оператор полного дифференцирования по t;

$$\psi(x,t) \equiv \zeta(x,t,f(x,t)) - \xi(x,t,f(x,t)f_x - \eta(x,t,f(x,t))f_t.$$

Решение полученного определяющего уравнения (2.2) строилось методом расщепления в классе формальных степенных рядов. Функции $\psi(x,t), f(x,t)$ представлялись рядами вида

$$\psi(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} z_n(t)x^n, \quad f(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n(t)x^n.$$

Этот подход использовался нами и для других кинетических уравнений, рассматриваемых в данной работе. Характерные технические приемы построения решений определяющих уравнений можно найти в [9, 10]. Здесь мы опускаем достаточно длинные выкладки и ограничиваемся формулировкой полученных результатов.

Общее решение определяющего уравнения в данном случае имеет вид

$$\zeta = (c_1 + c_2 x + c_3\alpha)f, \quad \xi = c_3 x, \quad \eta = c_4 - c_1 t,$$

где c_1, c_2, c_3, c_4 — произвольные постоянные. Часто вместо рассмотрения в терминах групп Ли удобно использовать эквивалентный язык алгебр Ли [4, 5]. Основные результаты группового анализа уравнения (2.1) можно сформулировать здесь следующим образом.

Предложение 2.1. *Основная (наиболее широкая) алгебра Ли L_4, допускаемая интегродифференциальным уравнением (2.1), однозначно определяется базисными операторами*

$$X_1 = \partial_t, \quad X_2 = xf\partial_f, \quad X_3 = \alpha f\partial_f + x\partial_x, \quad X_4 = f\partial_f - t\partial_t. \tag{2.3}$$

Оптимальная система одномерных подалгебр алгебры L_4 порождается операторами

$$X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4 + \beta X_3,\ X_2 + X_1,\ X_3 + X_1,\ X_4 \pm X_2, \tag{2.4}$$

где β — произвольная постоянная.

Система (2.4) позволяет выделить все классы инвариантных решений уравнения (2.1), существенно различных относительно группы G^4 в том смысле, что ни одно из них нельзя получить из другого с помощью преобразований $T_a \in G^4$.

Каждому из операторов (2.4) соответствует определенное представление инвариантных решений (2.1), вид которых приводится ниже:

$$\begin{aligned}
X_1:&\quad f = g(y), \quad y = x,\\
X_3:&\quad f = x^\alpha g(y), \quad y = t,\\
X_4 + \beta X_3:&\quad f = \frac{x^\alpha}{t} g(y), \quad y = xt^\beta,\\
X_2 + X_1:&\quad f = e^{xt} g(y), \quad y = x,\\
X_3 + X_1:&\quad f = x^\alpha g(y), \quad y = xe^{-t},\\
X_4 \pm X_2:&\quad f = t^{-(1\pm x)} g(y), \quad y = x.
\end{aligned}$$

Для построения фактор-уравнений необходимо вид этого решения подставить в уравнение (2.1) и учесть представление для независимых переменных. В данном случае это делается элементарно, и мы не будем на этом останавливаться.

2.2. Кинетическое уравнение Смолуховского

Кинетическое уравнение Смолуховского возникает в кинетической теории дисперсных систем, таких как атмосферные аэрозоли, коллоидные растворы, суспензии, протопланетное космическое вещество. Мы рассматривали кинетическое уравнение однородной коагуляции, которое имеет вид

$$\frac{\partial f(v,t)}{\partial t} = \frac{1}{2}\int\limits_0^v dv_1 \beta(v - v_1, v_1) f(v - v_1, t) f(v_1, t) - f(v,t) \int\limits_0^\infty dv_1 \beta(v, v_1) f(v_1, t), \tag{2.5}$$

$$f(v, 0) = f_0(v).$$

Здесь $f(v,t)$ — ФР частиц по объемам. Симметричная неотрицательная функция

$$\beta(v, v_1) = \beta(v_1, v) \geq 0$$

называется ядром уравнения коагуляции [3]. При коагуляции двух частиц образуется одна частица суммарного объема. Такой характер взаимодействия отражается в структуре аргументов в интегральном операторе (2.5).

Нами были найдены преобразования ФР $f(v,t)$ и временной переменной t, позволяющие свести уравнение (2.5) к уравнению вида

$$\frac{\partial\theta(x,\tau)}{\partial\tau} = x^\gamma \int\limits_0^1 s^{k_1}(1-s)^{k_2}\theta(x(1-s),\tau)\theta(xs,\tau)\, ds. \qquad (2.6)$$

В частности, это возможно сделать для ядер вида

$$\beta(v,v_1) = c(v^a v_1^b + v^b v_1^a)$$

при некоторых значениях параметров a, b, более удовлетворительно описывающих взаимодействие коагулирующих частиц [3]. Основной результат, полученный нами для (2.5), состоит в следующем.

Предложение 2.2. *Основная (наиболее широкая) алгебра Ли L_4, допускаемая интегродифференциальным уравнением (2.5), подобна алгебре L_4 (2.3) для уравнения (2.1) и в переменных (2.6) определяется базисными операторами*

$$X_1 = \partial_\tau, \quad X_2 = x\theta\partial_\theta, \quad X_3 = x\partial_x - \gamma\theta\partial_\theta, \quad X_4 = \theta\partial_\theta - \tau\partial_\tau.$$

Оптимальная система подалгебр, допускаемых уравнением (2.5), совпадает с системой (2.4).

Вид существенно различных инвариантных решений также совпадает с найденными для уравнения (2.1).

2.3. Кинетическое уравнение Власова

Кинетическое уравнение Власова рассматривалось в рамках задачи об одномерных высокочастотных колебаниях в плазме. Задача описывается следующей системой уравнений:

$$f_t + vf_x - Ef_v = 0, \quad f_{|t=t_0} = f_0(x,v),$$
$$E_v = 0, \quad E_t = \int vf dv, \quad E_x = 1 - \int f dv, \qquad (2.7)$$

где ФР $f(x,v,t)$ и напряженность электрического поля E зависят от пространственной координаты x и скорости v, определенных в R^1. Здесь кинетическое уравнение в приближении самосогласованного поля формально не содержит такого нелокального оператора, какими были интегралы столкновений в предыдущих случаях. В последние два уравнения нелокальные операторы входят в виде моментов ФР, взятых по скоростному пространству R^1.

В [13] для системы (2.7) была найдена допускаемая ей алгебра Ли L_5 с базисными операторами

$$X_1 = \partial_t, \quad X_2 = \partial_x, \quad X_3 = x\partial_x + v\partial_v + E\partial_E - f\partial_f,$$
$$X_4 = \cos t\partial_x - \sin t\partial_v + \cos t\partial_E, \quad X_5 = \sin t\partial_x + \cos t\partial_v + \sin t\partial_E. \qquad (2.8)$$

Она была построена путем перехода от (2.7) к бесконечной системе дифференциальных уравнений для моментов ФР f. При этом вопрос о полноте L_5 и ее возможных расширениях остался нерешенным. Построив определяющие уравнения для алгебры Ли, допускаемой системой (2.7), и найдя их общее решение описанным выше способом, мы получили следующий результат.

Предложение 2.3. *Алгебра Ли L_5 (2.8) системы (2.7) полна и не допускает расширений.*

2.4. Система кинетических уравнений Больцмана релаксирующего многокомпонентного газа

Система кинетических уравнений Больцмана, описывающих пространственно однородную эволюцию к равновесию N-компонентной смеси атомарных газов, рассматривалась для случая изотропной максвелловской модели молекулярного рассеяния [2]. При этом в терминах характеристических функций

$$\varphi_\alpha(k_\alpha, t) = \int d\mathbf{v}_\alpha e^{i\mathbf{k}_\alpha \mathbf{v}_\alpha} f_\alpha(v_\alpha, t)$$

для $\alpha = 1, \ldots, N$ система кинетических уравнений записывается в виде

$$\frac{\partial \varphi_\alpha(x_\alpha, t)}{\partial t} = \sum_{\beta=1}^{N} \sigma_{\alpha\beta} \int_0^1 ds [\varphi_\alpha(x_\alpha(1-\varepsilon_{\alpha\beta}s))\varphi_\beta(x_\alpha\varepsilon_{\alpha\beta}s) - \varphi_\alpha(x_\alpha)\varphi_\beta(0)]. \tag{2.9}$$

Инфинитезимальный оператор наиболее широкой группы Ли, допускаемой системой (2.9), разыскивался в форме

$$X = \xi^t(\mathbf{u})\partial_t + \sum_{\alpha=1}^{N}(\xi^\alpha(\mathbf{u})\partial_{x_\alpha} + \zeta^\alpha(\mathbf{u})\partial_{\varphi_\alpha}),$$

где $\mathbf{u} = (t, x_1, \ldots, x_N, \varphi_1, \ldots, \varphi_N)$ — общий вектор переменных. К определяющим уравнениям для коэффициентов оператора X присоединялись дифференциальные связи $\varphi_{\alpha,x_\beta} = 0$, $\alpha \neq \beta$, $\alpha, \beta = 1, \ldots, N$. Эти связи давали дополнительную подсистему определяющих уравнений

$$\zeta^\alpha_{\varphi_\beta}\varphi_{\beta,x_\beta} + \zeta^\alpha_{x_\beta} - \varphi_{\alpha,t}(\xi^t_{\varphi_\beta}\varphi_{\beta,x_\beta} + \xi^t_{x_\beta}) - \varphi_{\alpha,x_\alpha}(\xi^\alpha_{\varphi_\beta}\varphi_{\beta,x_\beta} + \xi^\alpha_{x_\beta}) = 0, \quad \alpha \neq \beta, \quad \alpha, \beta = 1, \ldots, N.$$

Анализ решений этой подсистемы в классе формальных рядов по степеням компонент вектора $\mathbf{u}$ позволил привести функциональную зависимость коэффициентов X к виду

$$\xi^t = \xi^t(t), \quad \zeta^\alpha = \zeta^\alpha(\varphi_\alpha, x_\alpha, t), \quad \xi^\alpha = \xi^\alpha(\varphi_\alpha, x_\alpha, t), \quad \alpha = 1, \ldots, N.$$

С учетом этого система определяющих уравнений записывается так:

$$\begin{aligned} D_t\psi_\alpha + \sum_{\beta=1}^{N}\sigma_{\alpha\beta}\{\psi_\alpha\varphi_\beta(0) - \int_0^1 ds\ \psi_\alpha(x_\alpha(1-\varepsilon_{\alpha\beta}s))\varphi_\beta(x_\alpha\varepsilon_{\alpha\beta}s) - \\ - \int_0^1 ds\ \varphi_\alpha(x_\alpha(1-\varepsilon_{\alpha\beta}s))\psi_\beta(x_\alpha\varepsilon_{\alpha\beta}s)\} = 0, \quad \alpha = 1, \ldots, N. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Здесь $\psi_\alpha = \zeta^\alpha - \varphi_{\alpha,x_\alpha}\xi^\alpha - \varphi_{\alpha,t}\xi^t$, D_t — оператор полного дифференцирования по t. Полученные нами результаты [7–9] для более простых случаев позволили предположить, что система (2.9) допускает алгебру Ли L_4, определяемую базисом операторов

$$X_1 = \partial_t, \quad X_2 = \sum_{\alpha=1}^{N} x_\alpha\varphi_\alpha\partial_{\varphi_\alpha}, \quad X_3 = \sum_{\alpha=1}^{N} x_\alpha\partial_{x_\alpha}, \quad X_4 = \sum_{\alpha=1}^{N}\varphi_\alpha\partial_{\varphi_\alpha} - t\partial_t.$$

Инвариантность (2.9) относительно $X_1, \ldots, X_4$ проверяется непосредственно. Факторизация по ним существенно упрощает решение определяющих уравнений (2.10), которое также строилось в классе степенных рядов. Результаты можно сформулировать следующим образом.

Предложение 2.4. *Наиболее широкая алгебра Ли, допускаемая системой (2.9), есть L_4 с базисом операторов X_1, X_2, X_3, X_4.*

Предложение 2.5. *Классы инвариантных решений (2.9), существенно различных относительно L_4, определяются оптимальной системой одномерных подалгебр с инфинитезимальными операторами*

$$X_1,\ X_4+\beta X_3,\ X_2-X_1,\ X_4\pm X_2,\ X_1+X_3. \tag{2.11}$$

На этой основе было дано исчерпывающее описание класса инвариантных решений, обобщающего на случай многокомпонентной смеси известное точное решение Бобылева—Крука—Ву (БКВ) уравнения Больцмана для простого газа. Строгая формулировка этих результатов, данная в работах [10, 11], потребовала бы много места. Здесь же мы ограничимся следующим утверждением.

Предложение 2.6. *При некоторых необходимых и достаточных условиях БКВ-решения имеют вид нестационарных максвелловских ФР*

$$f_\alpha(v_\alpha,t)=n_\alpha[2\pi T(t)]^{-3/2}\exp\left(-\frac{v_\alpha^2}{2T(t)}\right),\quad \alpha=1,\ldots,l,\quad l\le r,$$

соответственно для компонент $\alpha=l+1,\ldots,r$

$$f_\alpha(v_\alpha,t)=n_\alpha[2\pi T(t)]^{-3/2}\left[1+\frac{1-T(t)}{T(t)}b^{(\alpha)}\left(\frac{v_\alpha^2}{2T(t)}-\frac{3}{2}\right)\right]\exp\left(-\frac{v_\alpha^2}{2T(t)}\right),$$

а для остальных компонент $\alpha=r+1,\ldots,N$

$$f_\alpha(v_\alpha,t)=n_\alpha[2\pi T(t)]^{-3/2}\left[1+\frac{1-T(t)}{T(t)}\frac{1-\sum\limits_{\alpha=l+1}^{r}b^{(\alpha)}n_\alpha}{\sum\limits_{\alpha=r+1}^{N}n_\alpha}\left(\frac{v_\alpha^2}{2T(t)}-\frac{3}{2}\right)\right]\exp\left(-\frac{v_\alpha^2}{2T(t)}\right),$$

где $b^{(\alpha)}$, $\alpha=l+1,\ldots,r$ — произвольно выбираемые коэффициенты, такие что $\forall b^{(\alpha)}>0$, $\sum\limits_{\alpha=l+1}^{r}b^{(\alpha)}n_\alpha<1$.

Найденные БКВ-решения с произвольными коэффициентами $b^{(\alpha)}$ существенно расширяют множество БКВ-решений в элементарных функциях. Особый интерес представляют нестационарные максвелловские ФР, которые ранее в рамках БКВ-класса не рассматривались. Подбирая специальным образом параметры компонент и используя найденные решения, можно моделировать различные режимы релаксации. Интересные с физической точки зрения возможности такого моделирования обсуждались нами в работах [14, 15].

3. Классификация инвариантных решений полного уравнения Больцмана

Для полного уравнения Больцмана (УБ), в котором ФР зависит от семи переменных, а интеграл столкновений содержит пятикратное интегрирование, групповые свойства и инвариантные решения до последнего времени изучались исключительно на основе эвристических *ad hoc* методов. При этом, как правило, форма допустимых преобразований постулировалась априори. В настоящее время в работах [6, 16, 17] и некоторых других найдено, что полное УБ допускает 11-параметрическую группу Ли G_{11}. Известны также некоторые расширения G_{11} для частных случаев межмолекулярных потенциалов. Естественно, что в силу эвристического подхода вопрос о полноте найденных групп остается до сих пор открытым. Тем не менее было бы очень полезно построить для G_{11} оптимальную систему подгрупп, что позволило бы выполнить классификацию множества инвариантных решений УБ и начать их систематическое исследование, начиная с простейших. В теории групп известны общие алгоритмы построения оптимальных систем, однако их практическая реализация для групп большой размерности, таких как G_{11}, связана с большим объемом рутинных вычислений. В качестве примера можно привести ситуацию с системой уравнений газовой динамики, которая для разных уравнений состояния допускает группы Ли подобной размерности. Несмотря на то, что эти полные группы найдены еще в 70-е годы, соответствующие оптимальные системы подгрупп были вычислены лишь в последнее время с использованием методов компьютерной алгебры [18, 19]. Оптимальные системы подгрупп известных групп Ли, допускаемых полным УБ, рассматривались нами в работах [20, 21].

3.1. Допустимая группа Ли полного уравнения Больцмана

Полное уравнение Больцмана, описывающее эволюцию ФР $f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})$ в прямом произведении пространств $R^1_+ \times R^3_{\mathbf{x}} \times R^3_{\mathbf{v}}$, имеет вид [2]

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} = I(f, f), \tag{3.1}$$

$$J(f, f) = \int d\mathbf{w}\ d\mathbf{n} g\sigma\left(g, \frac{\mathbf{gn}}{g}\right)[f(\mathbf{v}^*)f(\mathbf{w}^*) - f(\mathbf{v})f(\mathbf{w})], \tag{3.2}$$

$$\mathbf{v}^* = \frac{1}{2}(\mathbf{v}+\mathbf{w}+g\mathbf{n}), \quad \mathbf{w}^* = \frac{1}{2}(\mathbf{v}+\mathbf{w}-g\mathbf{n}), \quad \mathbf{u} = \mathbf{v}-\mathbf{w}, \quad g = |\mathbf{v}-\mathbf{w}| = |\mathbf{v}^*-\mathbf{w}*|, \quad |\mathbf{n}| = 1.$$

Здесь $t \in R^1_+$ — время; $\mathbf{x} = (x, y, z) \in R^3_{\mathbf{x}}$ — пространственные координаты; $\mathbf{v} = (u, v, w) \in R^3_{\mathbf{v}}$ — молекулярные скорости; $\sigma\left(g, \frac{\mathbf{gn}}{g}\right)$ — дифференциальное сечение рассеяния. Для степенных потенциалов межмолекулярного взаимодействия $U(r) \propto r^{-(\nu-1)}$ $(\nu > 2)$ сечение имеет вид $\sigma = g^\gamma I\left(\frac{\mathbf{gn}}{g}\right)$, $\gamma = (\nu-5)/(\nu-1)$. Значение $\nu = 5$ $(\gamma = 0)$ соответствует максвелловским молекулам, а предел $\nu \to \infty$ — молекулам-твердым сферам.

В работе [6] мы строили группу Ли $G(T_a)$ точечных преобразований T_a для УБ (3.1) в виде

$$f = \varphi(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}; a)f', \quad t' = \tau(t, \mathbf{x}; a), \quad \mathbf{x}' = \mathbf{h}(t, \mathbf{x}; a), \quad \mathbf{v}' = B(t, \mathbf{x}; a)\mathbf{v} + \mathbf{b}(t, \mathbf{x}; a), \tag{3.3}$$

где a — групповой параметр, B — некоторая 3×3-матрица. Дополнительно предполагалось, что преобразование нелинейного интеграла столкновений обладает следующим свойством обобщенной “однородности”:

$$J(f', f') = \psi(t', \mathbf{x}', \mathbf{v}')J(f, f).$$

Неизвестные функции в (3.1) находились из основного свойства допустимой группы Ли: для каждого значения параметра a преобразование T_a переводит произвольное решение УБ вновь в некоторое его решение. Подстановка (3.3) в уравнение (3.1) и использование метода расщепления [4] позволили вычислить допустимую группу $G(T_a)$ в явном виде. Для дальнейшего нам необходима соответствующая найденной группе алгебра Ли инфинитезимальных операторов. Для случая произвольного сечения σ имеет место алгебра Ли $L_{11}(X)$ с базисом операторов:

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_3 = \partial_z, \quad X_4 = t\partial_x + \partial_u, \quad X_5 = t\partial_y + \partial_v, \quad X_6 = t\partial_z + \partial_w,$$

$$X_7 = y\partial_z - z\partial_y + v\partial_w - w\partial_v, \quad X_8 = z\partial_x - x\partial_z + w\partial_u - u\partial_w,$$

$$X_9 = x\partial_y - y\partial_x + u\partial_v - v\partial_u, \quad X_{10} = \partial_t, \quad X_{11} = t\partial_t + x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z - f\partial_f.$$

Для степенных потенциалов алгебра $L_{11}(X)$ расширяется до алгебры $L_{12}(X)$ оператором

$$X_{12} = t\partial_t - u\partial_u - v\partial_v - w\partial_w + (\gamma + 2)f\partial_f.$$

Наконец, для случая $\gamma = -1$ имеется дополнительный оператор

$$X_{13} = t^2\partial_t + t\mathbf{x}\partial_{\mathbf{x}} + (\mathbf{x} - t\mathbf{v})\partial_{\mathbf{v}},$$

который отвечает проективному преобразованию [4]. Действие производной ∂_f в операторах X_{11} и X_{12} надо рассматривать как дифференцирование по Фреше. Заметим, что в [17] группы Ли с приведенными здесь операторами были заявлены как полные группы, допускаемые полным уравнением Больцмана (3.1), хотя проведенные вычисления были выполнены практически тем же *ad hoc* методом, что и в [6]. В этой связи необходимо еще раз подчеркнуть, что доказательство полноты допустимой группы возможно только путем построения общего решения определяющих уравнений, как это было сделано в упоминаемых выше работах. Подобное доказательство для многомерной группы G_{11} еще предстоит провести.

3.2. Классификация подалгебр

Классификация подалгебр позволяет подразделить множество H-решений УБ, инвариантных относительно группы G_{11}, на классы эквивалентности. Два H-решения f_1 и f_2 принадлежат одному классу эквивалентности, если существует преобразование $T_a \in G$ такое, что $f_2 = T_a f_1$. В противном случае $f_1,\ f_2$ принадлежат разным классам и называются существенно различными H-решениями. Список всех существенно различных H-решений (по одному представителю от каждого класса) образует оптимальную систему инвариантных решений, определяющих искомую классификацию. Для ее нахождения строится оптимальная система подалгебр Θ_L допустимой алгебры Ли L [4, 5]. По определению Θ_L есть максимальное множество подалгебр $N \in L$, произвольная пара которых неподобна относительно внутренних автоморфизмов алгебры L. Для алгебр малой размерности вычисление Θ_L достаточно просто, но с повышением размерности L вычислительные трудности возрастают многократно.

Однако для алгебры $L_{11}(X)$, допускаемой УБ (3.1), имеет место обнаруженное нами замечательное обстоятельство, позволяющее избежать огромного объема вычислений. Справедливо следующее утверждение [20].

Предложение 3.1. *Алгебра Ли $L_{11}(X)$, допустимая полным уравнением Больцмана, изоморфна алгебре Ли $L_{11}(Y)$, допускаемой системой уравнений газовой динамики*

$$\frac{d\rho}{dt}+\rho\nabla\mathbf{u}=0,\quad \rho\frac{d\mathbf{u}}{dt}+\nabla p=0,\quad \frac{dp}{dt}+A(\rho,p)\nabla\mathbf{u}=0. \tag{3.4}$$

Здесь ρ, p — плотность и давление газа, как и выше; $t\in R^1_+$, $\mathbf{x}=(x,y,z)\in R^3_{\mathbf{x}}$; $\mathbf{v}=(u,v,w)\in R^3_{\mathbf{v}}$, только $\mathbf{v}$ — теперь вектор макроскопической скорости газа.

Как известно [4], для произвольной функции состояния $A(p,\rho)$ система (3.4) допускает 11-параметрическую группу Ли с инфинитезимальными операторами

$$Y_1=\partial_x,\quad Y_2=\partial_y,\quad Y_3=\partial_z,\quad Y_4=t\partial_x+\partial_u,\quad Y_5=t\partial_y+\partial_v,\quad Y_6=t\partial_z+\partial_w,$$
$$Y_7=y\partial_z-z\partial_y+v\partial_w-w\partial_v,\quad Y_8=z\partial_x-x\partial_z+w\partial_u-u\partial_w,$$
$$Y_9=x\partial_y-y\partial_x+u\partial_v-v\partial_u,\quad Y_{10}=\partial_t,\quad Y_{11}=t\partial_t+x\partial_x+y\partial_y+z\partial_z.$$

Доказательство изоморфизма следует из инвариантности коммутаторов обеих алгебр относительно отображения алгебры $L_{11}(X)$ на алгебру $L_{11}(Y)$, которое проверяется непосредственно.

Для политропного газа, когда $A(p,\rho)=k\rho$, существует расширение алгебры $L_{11}(Y)$ двумя дополнительными операторами

$$Y_{12}=t\partial_t-u\partial_u-v\partial_v-w\partial_w+2\rho\partial_\rho,\quad Y_{13}=\rho\partial_\rho+p\partial_p$$

до алгебры $L_{13}(Y)=L_{12}(Y)\oplus\{Y_{13}\}$. Аналогично доказывается, что алгебра $L_{12}(X)$ изоморфна подалгебре $L_{12}(Y)$.

Так как оптимальная система подалгебр полностью определяется таблицей коммутаторов, которые инвариантны относительно изоморфизма, то для классификации и нахождения существенно различных H-решений полного уравнения Больцмана (3.4) можно непосредственно использовать оптимальную систему подалгебр для уравнений газовой динамики, построенную в недавней работе [23]. Правда, есть определенные различия при ее использовании для нахождения существенно различных инвариантных решений уравнения Больцмана и системы уравнений газодинамики из-за разного количества неизвестных функций и независимых переменных. Наибольший интерес представляют решения с одной и двумя независимыми инвариантными переменными. Для уравнения (3.1) с произвольным сечением рассеяния оптимальная система подалгебр $L_{11}(Y)$ [23] дает 11 различных классов инвариантных решений от одной независимой инвариантной переменной и 38 классов с двумя независимыми переменными [20, 21]. Найденные представления инвариантных решений с одной независимой переменной приведены в табл. 1.

Таблица 1

№	Представление ФР	Индекс
1	$e^{\varepsilon\theta}\varphi(q)$	C (6.3)
2	$t^{-1}\varphi(W^2+(V-rt^{-1})^2)$	C (6.4)
3	$t^{-1}\varphi(q)$	C (6.5)
4	$t^{-1}\varphi(u-xt^{-1})$	(6.7)
5	$t^{-1}\varphi(u-\varepsilon\ln t)$	(6.20)
6	$\varphi(t)$	(6.14)
7	$\varphi(u)$	(6.11)
8	$\varphi(u-t)$	(6.23)
9	$e^{\varepsilon\theta}\varphi(w),\ \varepsilon\neq 0$	C (6.18)
10	$t^{-1}\varphi(q/t)$	(7.2)
11	$x^{-1}\varphi(u)$	(7.3)

Индекс (m, n) в последней колонке идентифицирует представителя оптимальной системы подалгебр: m есть размерность соответствующей подалгебры, а n — номер подалгебры в табл. 6 работы [23]. Буква C означает, что данное представление надо рассматривать в цилиндрической системе координат (x, r, θ, u, V, W), $q = \sqrt{v^2 + w^2}$. Остальные представления соответствуют декартовым координатам. Можно видеть, что для большинства представлений инвариантные решения либо не существуют, либо не имеют физического смысла, хотя в последнем случае могут быть полезны для численных тестов.

В заключение этого раздела заметим, что значение найденного изоморфизма между допустимыми группами УБ и уравнений газодинамики может оказаться гораздо бо́льшим, чем простое использование оптимальной системы подалгебр, и будет означать наличие более глубоких связей между инвариантными решениями (симметриями) двух уровней математических моделей динамики газа.

3.3. Допустимая группа Ли полного уравнения Больцмана в Фурье-представлении

Анализ полученных представлений инвариантных решений полного УБ весьма затруднен сложной структурой интеграла столкновений. Это заставило нас в поисках возможного упрощения обратиться к групповому анализу уравнения Больцмана в Фурье-представлении. Для степенных потенциалов взаимодействия последнее имеет вид [24]

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + i \frac{\partial^2 \phi}{\partial \mathbf{x} \partial \mathbf{w}} =$$

$$= C(\gamma) \int d\mathbf{w}_1 d\mathbf{n}\; g_\gamma \left(\frac{\mathbf{un}}{|\mathbf{u}|} \right) \phi \left(\frac{\mathbf{w}}{2} + \mathbf{w}_1 \right) \phi \left(\frac{\mathbf{w}}{2} - \mathbf{w}_1 \right) \left[\left| \mathbf{w}_1 - \frac{|\mathbf{w}|}{2} \mathbf{n} \right|^{-(\gamma+3)} - \left| \mathbf{w}_1 - \frac{\mathbf{w}}{2} \right|^{-(\gamma+3)} \right], \tag{3.5}$$

где $\mathbf{u} = \mathbf{w} - \mathbf{w_1}$; $C(\gamma) = \dfrac{2^\gamma \pi^{-3/2} \Gamma((\gamma+3)/2)}{\Gamma(-\gamma/2)}$.

С использованием уже описанного метода для уравнения (3.5) была найдена допустимая алгебра Ли L_9 с базисными операторами

$$Y_1 = \partial_x, \quad Y_2 = \partial_y, \quad Y_3 = \partial_z,$$

$$Y_4 = y\partial_z - z\partial_y + v\partial_w - w\partial_v, \quad Y_5 = z\partial_x - x\partial_z + w\partial_u - u\partial_w,$$

$$Y_6 = x\partial_y - y\partial_x + u\partial_v - v\partial_u, \quad Y_7 = \partial_t, \quad Y_8 = t\partial_t + x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z - \varphi\partial_\varphi,$$

$$Y_9 = t\partial_t + u\partial_u + v\partial_v + w\partial_w + (\gamma - 1)\varphi\partial_\varphi.$$

Меньшая размерность найденной алгебры позволила непосредственно вычислить оптимальную систему подалгебр, применяя развитый для этого в [23] двухшаговый алгоритм. Как и выше, таким образом была получена классификация инвариантных решений уравнения (3.5). В частности, найдены представления решений с одной и двумя независимыми инвариантными переменными. Представления инвариантных решений с одной независимой переменной приведены в табл. 2.

Таблица 2

№	Представление ФР	Индекс
1	$t^{\gamma\beta-1}\psi(Qt^{-\beta})$	7.2
2	$Q^\gamma\psi(t)$	7.3
3	$Q^\gamma\psi(Qe^{-t})$	7.4
4	$t^{-1}\psi(Q)$	7.5
5	$\psi(Q)$	7.6
6	$u^{\gamma-1}x^{-1}\psi(q/u)$	6.1
7	$k^{\gamma-1}r^{-\gamma}\psi(rQ/k)$	6.2
8	$u^\gamma t^{-1}\psi(q/u)$	6.3
9	$u^{-\alpha}\psi(q/u)$	6.4

Заметим, что хорошо известное БКВ-решение для простого газа принадлежит классу 7.4 при $\gamma = 0$. Но теперь этот класс расширен на произвольные степенные потенциалы.

Заключение

Результаты, представленные в обзоре и содержащиеся в работах авторов, создают определенную базу для дальнейших исследований групповых свойств кинетических уравнений. В первую очередь, определился характерный общий вид алгебр допустимых операторов для таких уравнений. При исследовании других кинетических уравнений можно предварительно проверить допустимость для них подобных операторов. Если какие-то из них допустимы, то последующая факторизация по ним позволит упростить построение общего решения определяющих уравнений и нахождение наиболее широкой допустимой группы (алгебры) Ли. В частности, такая перспектива имеется для полного уравнения Больцмана, где вопрос о полноте известных алгебр Ли остается нерешенным.

Для исследованных кинетических уравнений с высокой симметрией можно закончить построение фактор-уравнений и поиск их решений в явном виде, которые даже при отсутствии физического смысла возможно использовать для тестирования численных методов. Полезно также определить, например, для уравнения Смолуховского, каким подалгебрам (классам эквивалентности) соответствуют известные инвариантные решения, найденные без обращения к групповому анализу [3].

Для таких уравнений представляется также возможным выполнить их групповую классификацию по отношению к “произвольному элементу”[4], т. е. найти все возможные расширения основной допустимой алгебры для конкретных спецификаций этого элемента. Например, это вполне достижимо и представляет интерес для уравнения Смолуховского, где таким элементом является ядро коагуляции.

При групповом анализе кинетических уравнений в качестве определяющих получаются однородные переопределенные системы линейных интегродифференциальных уравнений. Поэтому для успешного вычисления наиболее широких допустимых алгебр Ли необходимо найти эффективный алгоритм решения систем уравнений такого типа.

Для полного уравнения Больцмана с общим и степенными потенциалами взаимодействия найденные оптимальные системы подалгебр в принципе могут служить отправным пунктом программы исследований, аналогичной заявленной в [23] для системы уравнений газовой динамики. Естественно продолжить исследование инвариантных решений с одной и двумя независимыми инвариантными переменными, для которых уже получены функциональные представления. Следующий этап предполагает вывод фактор-уравнений для найденных представлений инвариантных решений. Однако здесь в отличие от дифференциальных уравнений, где это в общем случае сводится к замене переменных в уравнениях в произвольных криволинейных координатах, процедура вывода преобразования интеграла столкновений не алгоритмизуется. Вследствие этого к настоящему времени найдено всего несколько таких уравнений.

Тем не менее вывод фактор-уравнений и поиск их решений в явном виде прежде всего для характеристических функций (Фурье-преобразований ФР) не представляются совершенно безнадежным делом. Реальное продвижение потребует энтузиазма и усилий многих исследователей.

Список литературы

[1] Балеску Р. Статистическая механика заряженных частиц. М.: Мир, 1984.

[2] Ферцигер Дж., Капер Г. Математическая теория процессов переноса в газах. М.: Мир, 1976.

[3] Волощук В. М., Седунов Ю. С. Процессы коагуляции в дисперсных системах. Л.: Гидрометеоиздат, 1975.

[4] Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.

[5] Олвер П. Приложение групп Ли к дифференциальным уравнениям. М.: Мир, 1989.

[6] Григорьев Ю. Н., Мелешко С. В. Исследование инвариантных решений кинетического уравнения Больцмана и его моделей. Новосибирск, 1986 (Препр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. ИТПМ; №18–86).

[7] Григорьев Ю. Н., Мелешко С. В. Групповой анализ интегродифференциального уравнения Больцмана // Докл. АН СССР. 1987. Т. 297. С. 323–327.

[8] Grigoryev Yu. N., Meleshko S. V. Group theoretical analysis of kinetic Boltzmann equation and its models // Arch. Mech. 1990. No. 6. P. 693–701.

[9] Grigoryev Yu. N., Meleshko S. V. Group analysis of kinetic equations // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modell. 1995. Vol. 10, No. 5. P. 425–447.

[10] Григорьев Ю. Н., Мелешко С. В. Полная группа Ли и инвариантные решения системы уравнений Больцмана многокомпонентной смеси газов // Сиб. мат. журн. 1997. Т. 38, №3. С. 511–525.

[11] Григорьев Ю. Н., Мелешко С. В. Групповой анализ уравнений Больцмана релаксирующего многокомпонентного газа // Докл. РАН. 1998. Т. 360, №4. С. 459–462.

[12] Ernst M. H. Nonlinear model-Boltzmann equations and exact solutions // Phys. Rep. 1981. No. 78. P. 1–171.

[13] Таранов В. Б. О симметрии одномерных высокочастотных движений бесстолкновительной плазмы // ЖТФ. 1982. №46. С. 1271–1277.

[14] Grigoryev Yu. N., Meleshko S. V. Bobylev — Krook — Wu-modes for multicomponent gas mixtures // Phys. Rev. Letters. 1998. Vol. 81, No. 1. P. 93–95.

[15] Grigoryev Yu. N. Bobylev — Krook — Wu-modes: explicit form and applications for modeling // Book of Abstracts of 21st Intern. Symp. on Rarefied Gas Dynamics, Marseille, France, July 26–31, 1998. Pt II. P. 33–34.

[16] Бунимович А. И., Краснослободцев А. В. Инвариантно-групповые решения кинетических уравнений // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1982. №4. С. 135–140.

[17] Bobylev A. V. Boltzmann equation and group transformations // Math. Models Methods Appl. Sci. 1993. No. 3. P. 443–476.

[18] Головин С. В. Оптимальная система подалгебр для алгебры Ли операторов, допустимых уравнениями газовой динамики политропного газа. Новосибирск, 1996. (Препр. / РАН. Сиб. отд-ние. Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева; №5–96).

[19] Черевко А. А. Оптимальная система подалгебр для алгебры Ли операторов, допустимых уравнениями газовой динамики с уравнением состояния $p = f(S)\rho^{5/3}$. Новосибирск, 1996. (Препр. / РАН. Сиб. отд-ние. Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева; №4–96).

[20] Grigoryev Yu. N., Meleshko S. V., Sattayatham P. Classification of the Invariant Solutions of the Boltzmann Equation // Phys. A: Math. and General.1999. No. 32. P. L337–L343.

[21] Grigoryev Y. N., Meleshko S. V. Classification of invariant solutions of the full Boltzmann equation // Proc. Xth Intern. Conf. on Waves and Stability in Continuous Media (WASCOM 99), 7–12th June, Italy, 1999.

[22] Grigoryev Y. N., Meleshko S. V. Group Classification and Representations of Invariant Solutions of the full Boltzmann Equation // Proc. 22nd Intern. Symp. on Rarefied Gas Dynamics, Sydney, Australia, 9–14 July 2000.

[23] Овсянников Л. В. Программа “ПОДМОДЕЛИ”. Газовая динамика // Прикладная математика и механика. 1994. №58. С. 30–55.

[24] Григорьев Ю. Н., Михалицын А. Н. Спектральный метод численного решения кинетического уравнения Больцмана // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1983. Т. 23, №6. С. 1454–1463.

Поступила в редакцию 23 ноября 2001 г.