Вычислительные технологии **Том 2, № 1, 1997**

НОВЫЙ ПОДХОД К АНАЛИЗУ СТАТИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ИНТЕРВАЛЬНОЙ НЕОПРЕДЕЛЁННОСТЬЮ В ДАННЫХ*

С. П. Шарый †

Институт вычислительных технологий

Новосибирск, Россия

Эта работа посвящена математическим и вычислительным аспектам анализа статических систем в условиях интервальной неопределённости данных: при различных допущениях на входные и выходные данные системы мы рассматриваем задачи гарантированного оценивания её внутренних состояний. Как формализация математической постановки задачи вводится понятие *обобщённых множеств решений* ($\alpha\beta$-*множеств решений*) интервальных уравнений. Основной результат работы — новый *алгебраический подход* к внутреннему оцениванию $\alpha\beta$-множеств решений интервальных уравнений, математической основой которого является замена исходной задачи на задачу отыскания алгебраического решения *одной* вспомогательной системы уравнений в полной интервальной арифметике Каухера.

1. Введение

Предмет настоящей работы — некоторые математические и вычислительные аспекты моделирования статических систем с интервальной неопределённостью. Основным содержательным примером для нас будет служить *обратная задача* системного анализа:

Для известных входных и выходных данных системы найти (или как-то оценить) её внутренние состояния.

Специфика рассматриваемой нами ситуации состоит в том, что входные и выходные данные системы предполагаются известными лишь в пределах некоторых границ, нижней и верхней, или, что эквивалентно, нам известны только интервалы их возможных значений. Всюду в этой работе интервалы и интервальные объекты (векторы, матрицы) обозначаются жирным шрифтом (например, $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$, ..., $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$), тогда как обычные неинтервальные величины никак специально не выделяются. Подчёркивание и надчёркивание означают взятие нижнего и верхнего концов интервала соответственно.

В этой работе мы делаем попытку рассмотрения интервальных статических систем с общей нелинейной зависимостью вход-состояние-выход. Более простые и сильные результаты для линейного случая были получены ранее и изложены, например, в [12, 31, 32].

†Статья публикуется в авторской редакции с сохранением авторской орфографии.

2. Задача анализа интервально заданной системы

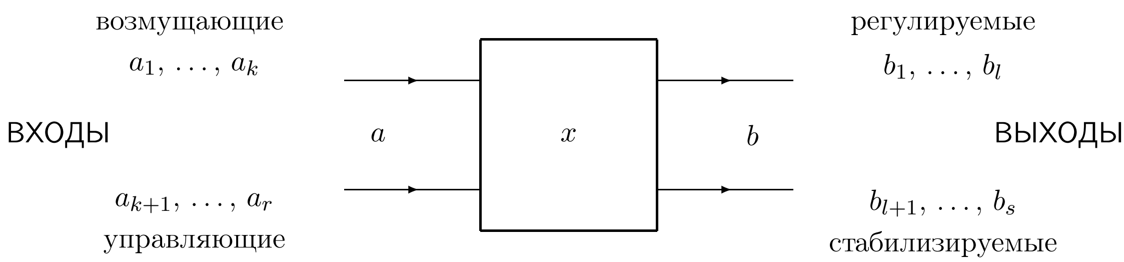
Пусть внутреннее состояние системы, входное воздействие на неё и выходной отклик системы описываются конечномерными векторами $x \in \mathbb{R}^n$, $a \in \mathbb{R}^r$ и $b \in \mathbb{R}^s$ соответственно. При этом во множестве всех входов системы будем различать *возмущения* $a_1, \ldots, a_k$, не зависящие от нас и действующие в пределах интервалов $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k$, и *управления* $a_{k+1}, \ldots, a_r$, которые мы можем выбирать по своей воле из интервалов $\mathbf{a}_{k+1}, \ldots, \mathbf{a}_r$. Аналогично, во множестве выходов системы мы выделяем компоненты $b_1, b_2, \ldots, b_l$, которые должны переводиться в каждое значение из заданных интервалов достижимости $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_l$ (*регулируемые выходы*), и компоненты $b_{l+1}, \ldots, b_s$, от которых требуется гарантированное попадание в некоторые коридоры значений $\mathbf{b}_{l+1}, \ldots, \mathbf{b}_s$ (*стабилизируемые выходы*).

Например, регулируемыми выходами являются координаты механической руки — исполнительного органа робота-манипулятора, — от которых требуется гарантированное "накрытие" каждой точки некоторой заданной рабочей области. Но при этом, вообще говоря, механической рукой могут достигаться и некоторые другие положения. Типичным примером стабилизируемого выхода системы может служить температура внутри химического реактора в ряде технологических процессов: она не должна отличаться от номинальной T больше чем на некоторую величину δT, но приемлемо любое её значение из интервала $[\,T - \delta T, T + \delta T\,]$.

Предполагаем, что зависимость вход-выход в рассматриваемой системе имеет вид

$$F(a, x) = b \tag{1}$$

с некоторой известной функцией $F : \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^s$, компоненты которой $F_1(a, x)$, $F_2(a, x)$, $\ldots$, $F_s(a, x)$ являются рациональными функциями от a и x, непрерывными всюду в рассматриваемой области изменения переменных. В целом ситуация описывается структурной схемой, изображённой на рисунке.



$F(a, x) = b$

По отношению к рассматриваемым нами системам могут возникать вопросы различного сорта. В настоящей работе исследуется следующая математическая постановка — задача о гарантированном оценивании состояний системы по её входным и выходным данным:

Для каких состояний системы x при любых возмущениях $a_1, \ldots, a_k$, не выходящих за пределы интервалов $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k$, и при любых значениях $b_1, \ldots, b_l$ из интервалов достижимости $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_l$ можно подобрать такие управляющие воздействия на систему $a_{k+1} \in \mathbf{a}_{k+1}, \ldots, a_r \in \mathbf{a}_r$, что её выходной отклик $F(a, x)$ будет в точности равен $b_1, \ldots, b_l$ на регулируемых выходах и не выйдет за пределы $\mathbf{b}_{l+1}, \ldots, \mathbf{b}_s$ на стабилизируемых выходах? (2)

Некоторые исследователи возражают против использования терминов “управление”, “регулирование” и т.п. в ситуациях, подобных вышеописанной. Их аргументы сводятся к тому, что смысл, вкладываемый нами в эти понятия, несколько отличается от того, что принят в классической теории автоматического управления. Это действительно так, но классическая теория управления не является единственной дисциплиной, оперирующей с “управлениями”. Напомним, например, повсеместно принятое в исследовании операций определение [1, 6]: операцией называется целенаправленное действие, которое может быть описано в виде

$$U = f(\,X_i, Y_j),$$

где U есть полезность, или значение критерия, характеризующего качество функционирования системы; X_i — переменные, которыми можно *управлять* (контролируемые переменные); Y_j — переменные (и постоянные), не поддающиеся управлению, но влияющие на U, то есть неуправляемые, или возмущающие (неконтролируемые переменные). Таким образом, смысл, вкладываемый нами в понятие “управления” и ему родственные, хорошо согласуется с терминологией исследования операций.

Далее, развитие общей теории систем привело к пониманию того, что зависимость от временной переменной имеет второстепенный характер в определениях управления и управляемости. В самом общем виде понятие управляемости системы (отображения) оказывается тесно связанным с понятием достижимости (см. [10], Глава 7), и формулируется как условие достижения (накрытия) любого элемента из некоторого отмеченного подмножества области определения отображения при подходящем выборе параметров этого отображения. Итак, наше словоупотребление вполне законно.

Но вернёмся к исходной задаче. Если входы и выходы системы заданы точно, решение задачи (2) сводится к решению относительно x системы уравнений (1). Если же входные и выходные данные системы имеют интервальную неопределённость, то, в соответствии с терминологической традицией интервального анализа, процесс решения задачи (2) мы также будем называть “решением” интервальной системы уравнений

$$F(\mathbf{a}, x) = \mathbf{b}, \tag{3}$$

где $\mathbf{a} = (\,\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r)^\top$, $\mathbf{b} = (\,\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_s)^\top$, но смысл, вкладываемый в понятие такого “решения”, потребует специального разъяснения. Прежде всего определим, что будет пониматься под “множеством решений” интервальной системы (3).

Формально множество состояний x, являющихся решениями задачи (2), описывается в точности следующим образом:

$$\begin{aligned}
&\{\; x \in \mathbb{R}^n \mid \\
&\quad (\;\;\forall a_1 \in \mathbf{a}_1\;\;)\;\cdots\;(\forall a_k \in \mathbf{a}_k\,)(\;\;\forall b_1 \in \mathbf{b}_1\;\;)\;\cdots\;(\,\forall b_l \in \mathbf{b}_l\,)\\
&\quad (\,\exists a_{k+1} \in \mathbf{a}_{k+1}\,)\;\cdots\;(\,\exists a_r \in \mathbf{a}_r\,)(\,\exists b_{l+1} \in \mathbf{b}_{l+1}\,)\;\cdots\;(\,\exists b_s \in \mathbf{b}_s\,)\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (\,F(a, x) = b\,)\;\}.
\end{aligned} \tag{4}$$

Определение (4) основано на *аксиоме выделения* из теории множеств (см., например, [8]), и потому впредь мы будем называть предикат, выписанный после вертикальной черты в записи (4), *выделяющим* для множества (4). Помимо задания функциональной зависимости F и интервальных векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, в определении (4) ключевым является указание кванторов, которые находятся при тех или иных элементах системы, имеющих интервальную неопределённость. При этом в отношении входов системы a_j, о которых известна лишь принадлежность некоторым интервалам, логические кванторы всеобщности $\forall$ и существования $\exists$ выражают принципиальное различие [3, 5] между:

> входными воздействиями, которые нашей воле неподвластны и являются внешними неконтролируемыми возмущениями (это соответствует записи $\forall a_j \in \mathbf{a}_j$), и
>
> входными воздействиями, которые мы можем варьировать в пределах заданных интервалов по своей воле, то есть управлять ими (это соответствует записи $\exists a_j \in \mathbf{a}_j$).

В отношении выходов системы b_i логические кванторы выражают разграничение между:

> коридорами стабилизации системы, в пределах которых требуется обеспечить её функционирование, каковы бы ни были значения внешних возмущений (это соответствует записи $\exists b_i \in \mathbf{b}_i$), и
>
> множествами достижимости системы, каждый элемент которых должен быть накрыт в результате подходящего выбора управляющих воздействий (это соответствует записи $\forall b_i \in \mathbf{b}_i$).

3. Обобщённые множества решений интервальных уравнений

К необходимости введения общего определения множества решений вида (4) для интервальных уравнений можно подойти и с других позиций, рассматривая, например, некоторые задачи идентификации систем в условиях интервальной неопределённости данных, или даже с совершенно абстрактных позиций. Действительно, интервальная неопределённость изначально может трактоваться двояко, в соответствии с двойственным характером интерпретации самих интервалов. С одной стороны, интервал $[\underline{x}, \overline{x}]$ может представлять собой множество *всех* вещественных чисел от $\underline{x}$ до $\overline{x}$, а с другой — быть лишь вместилищем, указателем границ для какого-то, *хотя бы одного* значения между $\underline{x}$ и $\overline{x}$.[1] В формальной записи это различие выражается употреблением логических кванторов — либо всеобщности $\forall$, либо существования $\exists$: в первом случае мы пишем $\forall x \in [\underline{x}, \overline{x}]$, а во втором — $\exists x \in [\underline{x}, \overline{x}]$. При этом в соответствующих ситуациях уместно говорить о $\forall$-*типе (A-типе) неопределённости* и $\exists$-*типе (E-типе) неопределённости.* Давая строгое определение множеств решений интервальных уравнений и систем, мы должны чётко разграничивать эти два типа неопределённости, и именно это сделано в определении (4). Особенно рельефно вышеупомянутое различие между двумя типами интервальной неопределённости проявляется тогда, когда мы имеем дело не с единственным интервалом самим по себе, но когда несколько интервалов описывают различные по природе, нередко конфликтующие друг с другом, воздействия на систему.

Несмотря на большую общность определения (4), оно всё же не является самым общим. В принципе, поскольку кванторы $\forall$ и $\exists$ не коммутируют друг с другом [8], путём комбинирования их сочетаний с коэффициентами уравнения и перестановки порядка можно определять и другие множества решений интервальных уравнений. К примеру, для одного уравнения

$$\varphi(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4, x) = \mathbf{b}$$

[1] На эту двойственность в интерпретации интервала указывает, в частности, Ю. В. Матиясевич в своём предисловии к русскому переводу книги [2].

с четырьмя интервальными параметрами в левой части в качестве множества решений можно рассматривать множество

$$\{\, x \in \mathbb{R}^n \mid (\exists a_2 \in \mathbf{a}_2)(\forall a_1 \in \mathbf{a}_1)(\forall a_4 \in \mathbf{a}_4)(\forall b \in \mathbf{b})(\exists a_3 \in \mathbf{a}_3)(\, \varphi(a_1, a_2, a_3, a_4, x) = b\,)\,\},$$

или

$$\{\, x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall a_1 \in \mathbf{a}_1)(\forall a_2 \in \mathbf{a}_2)(\exists a_4 \in \mathbf{a}_4)(\forall b \in \mathbf{b})(\exists a_3 \in \mathbf{a}_3)(\, \varphi(a_1, a_2, a_3, a_4, x) = b\,)\,\}$$

и т.п. Наиболее общее определение множества решений для интервальной системы уравнений $F(\mathbf{a}, x) = \mathbf{b}$ с $\mathbf{a} \in \mathbb{IR}^r$, $\mathbf{b} \in \mathbb{IR}^s$ выглядит, следовательно, так:

$$\{\, x \in \mathbb{R}^n \mid (\, Q_1 c_{\theta_1} \in \mathbf{c}_{\theta_1})(\, Q_2 c_{\theta_2} \in \mathbf{c}_{\theta_2}) \cdots (\, Q_{r+s} c_{\theta_{r+s}} \in \mathbf{c}_{\theta_{r+s}})(\, F(a, x) = b\,)\,\}, \qquad (5)$$

где

$(\, c_1, c_2, \ldots, c_{r+s}) = (\, a_1, a_2, \ldots, a_r, b_1, b_2, \ldots, b_s)$ — агрегированный вектор параметров рассматриваемой системы уравнений,

$(\, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{r+s})$ — некоторая перестановка чисел $\{\, 1, 2, \ldots, r+s\,\}$,

$Q_1, Q_2, \ldots, Q_{r+s} \in \{\, \forall, \exists\,\}$ — логические кванторы.

Определение 1. Множества вида (5) будем называть *обобщёнными множествами решений* для интервальной системы уравнений $F(\mathbf{a}, x) = \mathbf{b}$.

Заметим, что вышеизложенные идеи формализации интервальной постановки задачи в равной степени применимы не только к интервальным алгебраическим уравнениям, но и к интервальным неравенствам, интервальным оптимизационным задачам, интервальным дифференциальным уравнениям и т.п. Обобщённые множества решений интервальных дифференциальных уравнений ещё ждут внимания исследователей[2], а вот опыт рассмотрения интервальных оптимизационных задач и интервальных неравенств, хотя и не слишком обширный, но всё-таки имеется. Пионером изучения общих интервальных постановок задач оптимизации является А. А. Ватолин [5], который впервые выписал для них определение вида (5). Для интервальных линейных неравенств

$$\mathbf{A}x \le \mathbf{b}$$

И. Рон и Я. Креслова в работе [27] изучали, в частности, обобщённое множество решений

$$\{\, x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall A \in \mathbf{A})(\forall b \in \mathbf{b})(Ax \le b)\,\} \qquad (6)$$

(но не выписывали его явно). Введённое ими понятие *сильной разрешимости* интервальной линейной системы неравенств является не чем иным, как свойством непустоты множества решений (6).

Частными случаями введённого в Определении 1 общего понятия являются следующие три множества решений интервальных систем, известные и давно изучаемые в интервальном анализе:

Объединённое множество решений (united solution set), образованное решениями всех точечных систем $F(a, x) = b$ с $a \in \mathbf{a}$ и $b \in \mathbf{b}$, то есть множество

$$\Sigma_{\exists\exists}(F, \mathbf{a}, \mathbf{b}) = \{\, x \in \mathbb{R}^n \mid (\exists a \in \mathbf{a})(\exists\, b \in \mathbf{b})(F(a, x) = b)\,\}. \qquad (7)$$

[2] По существу, это обычные задачи теории управления динамическими системами, но в интервальной постановке.

Исторически оно было первым и по настоящее время является, видимо, наиболее популярным из множеств решений интервальных задач, поэтому его иногда называют просто *множеством решений* [2, 7, 24].

Допустимое множество решений (tolerable solution set), образованное всеми такими векторами $x \in \mathbb{R}^n$, что $F(a, x) \in \mathbf{b}$ для любого $a \in \mathbf{a}$, то есть множество

$$\Sigma_{\forall\exists}(F, \mathbf{a}, \mathbf{b}) = \{\, x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall a \in \mathbf{a})(\exists\, b \in \mathbf{b})(F(a, x) = b)\,\} \tag{8}$$

(см., например, [24, 29]). А. Ноймайер [24] и некоторые другие авторы использовали по отношению к (8) малоудачный термин “restricted solution set”.[3]

Управляемое множество решений (controllable solution set)

$$\Sigma_{\exists\forall}(F, \mathbf{a}, \mathbf{b}) = \{\, x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall\, b \in \mathbf{b})(\exists\, a \in \mathbf{a})(F(a, x) = b)\,\}, \tag{9}$$

образованное всеми такими $x \in \mathbb{R}^n$, что для любого желаемого $b \in \mathbf{b}$ можно подобрать соответствующий $a \in \mathbf{a}$ со свойством $F(a, x) = b$ (см. [28]).

Из определения (5) видно, что обобщённое множество решений интервальной системы уравнений полностью определяется 1) перестановкой компонент агрегированного вектора параметров системы и 2) последовательностью логических кванторов. Другой, более наглядный способ описания множеств решений состоит в том, чтобы пойти от их содержательной интерпретации, данной нами в разделе 2. Для этого расчленим кванторную приставку выделяющего предиката множества решений на АЕ-блоки. Каждый такой блок соответствует одному элементарному акту “возмущение-управление”, или одному шагу процесса принятия решения (или игры). Таким образом, в целом обобщённое множество решений может быть содержательно проинтерпретировано [5] как решение некоторой игры или многошагового процесса принятия решений в условиях интервальной неопределённости.

Если интервалы неопределенности параметров системы уже известны, то каждый такой шаг полностью задаётся указанием

элементов, имеющих $\forall$-неопределённость на данном шаге,

элементов, имеющих $\exists$-неопределённость на данном шаге,

элементов, неопределённость которых несущественна на данном шаге.

Далее в этой работе мы не будем рассматривать самый общий случай, а ограничимся только множествами решений интервальных уравнений вида (4), у которых в выделяющем предикате *все вхождения квантора всеобщности* $\forall$ *предшествуют вхождениям квантора существования* $\exists$, или, иными словами, будем рассматривать только те множества решений, для которых выделяющий предикат имеет АЕ-форму.

[3] В русской научной литературе для обозначения условия принадлежности выходов системы к некоторому a priori заданному множеству режимов давно и широко применяется термин “условие живучести” [3]. Аналогичная дифференциальная задача интенсивно исследовалась Ж.-П. Обэном и его сотрудниками (см., например, [11, 14]). Интересно, что Ж.-П. Обэн использовал тот же самый термин — viability condition, — но переведённый в русских изданиях его книг то как “условие жизненности”, то как “условие жизнеспособности”. По-видимому, терминология интервального анализа в этом пункте должна быть скорректирована соответствующим образом.

Для конкретизации типов неопределённости компонент векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ нами будут использоваться два эквивалентных способа. Первый — это задание кванторных векторов α и β тех же размеров, что $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, таких что

$$\alpha_j = \begin{cases} \forall, & \text{если } \mathbf{a}_j \text{ представляет } \forall\text{-неопределённость}, \\ \exists, & \text{если } \mathbf{a}_j \text{ представляет } \exists\text{-неопределённость}, \end{cases}$$

$$\beta_i = \begin{cases} \forall, & \text{если } \mathbf{b}_i \text{ представляет } \forall\text{-неопределённость}, \\ \exists, & \text{если } \mathbf{b}_i \text{ представляет } \exists\text{-неопределённость}, \end{cases}$$

Второй способ описания распределения различных типов неопределённости по интервальным элементам системы $F(\mathbf{a}, x) = \mathbf{b}$ заключается во введении, наряду с кванторными векторами α и β, ещё интервальных векторов $\mathbf{a}^\forall = (\,\mathbf{a}_j^\forall)$ и $\mathbf{a}^\exists = (\,\mathbf{a}_j^\exists)$ и интервальных векторов $\mathbf{b}^\forall = (\,\mathbf{b}_i^\forall)$ и $\mathbf{b}^\exists = (\,\mathbf{b}_i^\exists)$ тех же размеров, что $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ следующим образом:

$$\mathbf{a}_j^\forall = \begin{cases} \mathbf{a}_j, & \text{если } \ \alpha_j = \forall, \\ 0, & \text{иначе}, \end{cases} \qquad \mathbf{a}_j^\exists = \begin{cases} \mathbf{a}_j, & \text{если } \ \alpha_j = \exists, \\ 0, & \text{иначе}, \end{cases}$$

$$\mathbf{b}_i^\forall = \begin{cases} \mathbf{b}_i, & \text{если } \ \beta_i = \forall, \\ 0, & \text{иначе}, \end{cases} \qquad \mathbf{b}_i^\exists = \begin{cases} \mathbf{b}_i, & \text{если } \ \beta_i = \exists, \\ 0, & \text{иначе}. \end{cases}$$

Таким образом, векторы $\mathbf{a}^\forall$, $\mathbf{a}^\exists$ и $\mathbf{b}^\forall$, $\mathbf{b}^\exists$ представляют собой интервалы с однотипной неопределённостью. При этом

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}^\forall + \mathbf{a}^\exists, \qquad \mathbf{b} = \mathbf{b}^\forall + \mathbf{b}^\exists$$

$$\text{и} \qquad \mathbf{a}_j^\forall\, \mathbf{a}_j^\exists = 0, \qquad \mathbf{b}_i^\forall\, \mathbf{b}_i^\exists = 0 \qquad \text{для всех } i, j,$$

то есть векторы $\mathbf{a}^\forall$ и $\mathbf{a}^\exists$, $\mathbf{b}^\forall$ и $\mathbf{b}^\exists$ образуют *дизъюнктные разложения* (взаимно-дополнительные разложения) для $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ соответственно.

Определение 2. Пусть для интервальной системы уравнений $F(\mathbf{a}, x) = \mathbf{b}$ тип интервальной неопределённости компонент $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ конкретизируется кванторными векторами α и β и соответствующими дизъюнктными разложениями

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}^\forall + \mathbf{a}^\exists, \qquad \mathbf{b} = \mathbf{b}^\forall + \mathbf{b}^\exists.$$

Мы будем называть множество

$$\Sigma_{\alpha\beta}(F, \mathbf{a}, \mathbf{b}) = \bigl\{\, x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall \hat{a} \in \mathbf{a}^\forall)(\forall \hat{b} \in \mathbf{b}^\forall)(\exists \check{a} \in \mathbf{a}^\exists)(\exists \check{b} \in \mathbf{b}^\exists)\bigl(\, F(\hat{a} + \check{a}, x) = \hat{b} + \check{b}\,\bigr) \,\bigr\}$$

обобщённым множеством решений типа $\alpha\beta$ (или $\alpha\beta$-обобщённым множеством решений или просто *$\alpha\beta$-множеством решений*) и обозначать через $\Sigma_{\alpha\beta}(F, \mathbf{a}, \mathbf{b})$.

4. Постановка математической задачи

Сложность прямого описания множеств $\alpha\beta$-решений экспоненциально растёт с ростом размерности n, так что оперирование с этими прямыми описаниями оказывается практически невозможным уже в простейших ситуациях, для сколько-нибудь значительной размерностей системы [22]. Имеет смысл ограничиться приближённым описанием $\alpha\beta$-множеств решений, под которым всюду ниже, исходя из нашей практической интерпретации, будем понимать их *внутреннее* оценивание некоторыми более простыми *подмножествами*: ведь только для подмножеств $\Pi \subseteq \Sigma_{\alpha\beta}(F, \mathbf{a}, \mathbf{b})$ ответ на вопрос (2) является положительным для любой точки $x \in \Pi$. В качестве таких оценивающих подмножеств естественно взять прямоугольники со сторонами, параллельными координатным осям, то есть интервальные векторы, и, соответственно, мы переформулируем нашу основную задачу следующим образом:

> Найти интервальный вектор, который содержится во множестве решений $\Sigma_{\alpha\beta}(F, \mathbf{a}, \mathbf{b})$ интервальной системы уравнений $F(\mathbf{a}, \mathbf{x}) = \mathbf{b}$. (10)

Подчеркнём, что другие способы оценивания обобщённых множеств решений также имеют смысл и полезны в некоторых практических ситуациях. Например, внешнее оценивание, то есть нахождение простых объемлющих множеств для $\Sigma_{\alpha\beta}(F, \mathbf{a}, \mathbf{b})$, важно при анализе чувствительности управляемых систем, подверженных возмущениям. Но постановка подобных вопросов относится уже к другим задачам, отличным от (10), и мы не будем рассматривать их в этой работе.

До сих пор задачи вида (2), (10) решались лишь минимаксными методами математического программирования. Цель настоящей работы — представить новый, алгоритмически эффективный подход к анализу статических систем с интервальной неопределённостью, то есть к решению задачи (10), и ключевым в наших построениях является понятие *алгебраического решения* интервальной системы уравнений, впервые рассмотренное для одного уравнения в работах [16, 26] и для системы линейных уравнений в комплексной круговой арифметике в работе [25].

Определение 3. Интервальный вектор называется *алгебраическим решением* интервальной системы уравнений, если его подстановка в эту систему и выполнение всех интервальных арифметических операций приводят к равенству.

Более точно, развиваемый нами *алгебраический подход* подразумевает замену задачи (10) на задачу нахождения алгебраического решения некоторой специальной системы уравнений в полной интервальной арифметике Каухера, сводя тем самым исходную задачу к *одной* задаче численного анализа. Это весьма привлекательно, несмотря на то, что решение вспомогательной системы может не существовать даже тогда, когда соответствующее множество решений $\Sigma_{\alpha\beta}(F, \mathbf{a}, \mathbf{b})$ непусто, то есть задача (10) имеет решение.

5. Аналитическая характеризация $\alpha\beta$-множеств решений

Предложение 1. *Пусть отображение F таково, что каждый из параметров системы $a_{k+1}, \ldots, a_r$, соответствующих $\exists$-типу неопределённости, входит лишь в одну из компонент $F_i(a, x)$. Тогда принадлежность $x \in \Sigma_{\alpha\beta}(F, \mathbf{a}, \mathbf{b})$ равносильна следующей системе* *неравенств:*

$$
\left\{
\begin{array}{l}
\left\{
\begin{array}{rcl}
\min\limits_{\hat a\in\mathbf{a}^\forall}\ \max\limits_{\check a\in\mathbf{a}^\exists}\ F_i(\hat a+\check a,x) & \geq & \overline{\mathbf{b}}_i,\\
\max\limits_{\hat a\in\mathbf{a}^\forall}\ \min\limits_{\check a\in\mathbf{a}^\exists}\ F_i(\hat a+\check a,x) & \leq & \underline{\mathbf{b}}_i,
\end{array}
\right.\\
\qquad\text{— \textit{для регулируемых выходов}, } i=1,\dots,l,\\[2ex]
\left\{
\begin{array}{rcl}
\min\limits_{\hat a\in\mathbf{a}^\forall}\ \max\limits_{\check a\in\mathbf{a}^\exists}\ F_i(\hat a+\check a,x) & \geq & \underline{\mathbf{b}}_i,\\
\max\limits_{\hat a\in\mathbf{a}^\forall}\ \min\limits_{\check a\in\mathbf{a}^\exists}\ F_i(\hat a+\check a,x) & \leq & \overline{\mathbf{b}}_i,
\end{array}
\right.\\
\qquad\text{— \textit{для стабилизируемых выходов}, } i=l+1,\dots,s.
\end{array}
\right.
\tag{11}
$$

Доказательство предложения мы проводим путём эквивалентных преобразований выделяющего предиката множества решений интервальной системы. Положим $b = (\,b_1, b_2, \dots, b_s) = \hat b + \check b$, $\hat b$, $\check b \in \mathbb{R}^s$. Тогда

$$
\begin{array}{l}
\Sigma_{\alpha\beta}(F,\mathbf{a},\mathbf{b}) = \\[1ex]
\{\ x\in\mathbb{R}^n \mid (\forall\hat a\in\mathbf{a}^\forall)(\forall\hat b\in\mathbf{b}^\forall)(\exists\check a\in\mathbf{a}^\exists)(\exists\check b\in\mathbf{b}^\exists)(\,F(a,x)=b\,)\ \} = \\[1ex]
\{\ x\in\mathbb{R}^n \mid (\forall\hat a\in\mathbf{a}^\forall)(\forall\hat b\in\mathbf{b}^\forall)(\exists\check a\in\mathbf{a}^\exists) \\
\qquad (\quad F_1(a,x)=b_1 \\
\qquad\ \ \& \qquad \cdots \\
\qquad\ \ \&\ F_l(a,x)=b_l \\
\qquad\ \ \&\ F_{l+1}(a,x)\in\mathbf{b}_{l+1} \\
\qquad\ \ \& \qquad \cdots \\
\qquad\ \ \&\ F_s(a,x)\in\mathbf{b}_s \quad)\ \} = \\
\{\ x\in\mathbb{R}^n \mid (\forall\hat a\in\mathbf{a}^\forall)(\forall\hat b\in\mathbf{b}^\forall)(\exists\check a\in\mathbf{a}^\exists) \\
\qquad (\quad F_1(a,x)\geq b_1\ \&\ F_1(a,x)\leq b_1 \\
\qquad\ \ \& \qquad \cdots \\
\qquad\ \ \&\ F_l(a,x)\geq b_l\ \&\ F_l(a,x)\leq b_l \\
\qquad\ \ \&\ F_{l+1}(a,x)\geq\underline{\mathbf{b}}_{l+1}\ \&\ F_{l+1}(a,x)\leq\overline{\mathbf{b}}_{l+1} \\
\qquad\ \ \& \qquad \cdots \\
\qquad\ \ \&\ F_s(a,x)\geq\underline{\mathbf{b}}_s\ \&\ F_s(a,x)\leq\overline{\mathbf{b}}_s \quad)\ \} = \\[2ex]
\{\ x\in\mathbb{R}^n \mid (\forall\hat a\in\mathbf{a}^\forall)(\forall\hat b\in\mathbf{b}^\forall) \\
\qquad (\quad (\exists\check a\in\mathbf{a}^\exists)(F_1(a,x)\geq b_1)\ \&\ (\exists\check a\in\mathbf{a}^\exists)(F_1(a,x)\leq b_1) \\
\qquad\ \ \& \qquad \cdots \\
\qquad\ \ \&\ (\exists\check a\in\mathbf{a}^\exists)(F_l(a,x)\geq b_l)\ \&\ (\exists\check a\in\mathbf{a}^\exists)(F_l(a,x)\leq b_l) \\
\qquad\ \ \&\ (\exists\check a\in\mathbf{a}^\exists)(F_{l+1}(a,x)\geq\underline{\mathbf{b}}_{l+1})\ \&\ (\exists\check a\in\mathbf{a}^\exists)(F_{l+1}(a,x)\leq\overline{\mathbf{b}}_{l+1}) \\
\qquad\ \ \& \qquad \cdots \\
\qquad\ \ \&\ (\exists\check a\in\mathbf{a}^\exists)(F_s(a,x)\geq\underline{\mathbf{b}}_s)\ \&\ (\exists\check a\in\mathbf{a}^\exists)(F_s(a,x)\leq\overline{\mathbf{b}}_s) \quad)\ \}.
\end{array}
$$

Последнее равенство является верным в силу того ограничения, которое мы наложили на F: каждая его компонента имеет лишь единственное вхождение переменных, соответствующих ненулевым элементам в $\mathbf{a}^\exists$, и потому мы можем “проносить” кванторы всеобщности к отдельным членам конъюнкции [8].

Отметим, что для любой функции f, непрерывной на некотором интервале $\mathbf{a}$, имеют место следующие эквивалентности:

$$(\exists a \in \mathbf{a})(\, f(a) \geq b\,) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \max_{a\in\mathbf{a}} f(a) \geq b,$$

$$(\exists a \in \mathbf{a})(\, f(a) \leq b\,) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \min_{a\in\mathbf{a}} f(a) \leq b.$$

Поэтому можно продолжить наши выкладки следующим образом:

$$\begin{aligned}
&\Sigma_{\alpha\beta}(F,\mathbf{a},\mathbf{b}) = \\
&\{\; x\in\mathbb{R}^n \mid (\forall \hat{a}\in\mathbf{a}^{\forall})(\forall \hat{b}\in\mathbf{b}^{\forall}) \\
&\quad (\quad (\,\max\nolimits_{\check{a}\in\mathbf{a}^{\exists}} F_1(a,x) \geq b_1)\ \&\ (\,\min\nolimits_{\check{a}\in\mathbf{a}^{\exists}} F_1(a,x) \leq b_1) \\
&\quad\ \&\qquad \cdots \\
&\quad\ \&\ (\,\max\nolimits_{\check{a}\in\mathbf{a}^{\exists}} F_l(a,x) \geq b_l)\ \&\ (\,\min\nolimits_{\check{a}\in\mathbf{a}^{\exists}} F_l(a,x) \leq b_l) \\
&\quad\ \&\ (\,\max\nolimits_{\check{a}\in\mathbf{a}^{\exists}} F_{l+1}(a,x) \geq \underline{\mathbf{b}}_{l+1})\ \&\ (\,\min\nolimits_{\check{a}\in\mathbf{a}^{\exists}} F_{l+1}(a,x) \leq \overline{\mathbf{b}}_{l+1}) \\
&\quad\ \&\qquad \cdots \\
&\quad\ \&\ (\,\max\nolimits_{\check{a}\in\mathbf{a}^{\exists}} F_s(a,x) \geq \underline{\mathbf{b}}_s)\ \&\ (\,\min\nolimits_{\check{a}\in\mathbf{a}^{\exists}} F_s(a,x) \leq \overline{\mathbf{b}}_s)\ )\ \}.
\end{aligned}$$

Далее,

$$(\forall\, b \in \mathbf{b})(\, f(a) \geq b\,) \qquad \Longleftrightarrow \qquad f(a) \geq \overline{\mathbf{b}},$$

$$(\forall\, b \in \mathbf{b})(\, f(a) \leq b\,) \qquad \Longleftrightarrow \qquad f(a) \leq \underline{\mathbf{b}},$$

так что имеем

$$\begin{aligned}
&\Sigma_{\alpha\beta}(F,\mathbf{a},\mathbf{b}) = \\
&\{\; x\in\mathbb{R}^n \mid (\forall \hat{a}\in\mathbf{a}^{\forall}) \\
&\quad (\quad (\,\max\nolimits_{\check{a}\in\mathbf{a}^{\exists}} F_1(a,x) \geq \overline{\mathbf{b}}_1)\ \&\ (\,\min\nolimits_{\check{a}\in\mathbf{a}^{\exists}} F_1(a,x) \leq \underline{\mathbf{b}}_1) \\
&\quad\ \&\qquad \cdots \\
&\quad\ \&\ (\,\max\nolimits_{\check{a}\in\mathbf{a}^{\exists}} F_l(a,x) \geq \overline{\mathbf{b}}_l)\ \&\ (\,\min\nolimits_{\check{a}\in\mathbf{a}^{\exists}} F_l(a,x) \leq \underline{\mathbf{b}}_l) \\
&\quad\ \&\ (\,\max\nolimits_{\check{a}\in\mathbf{a}^{\exists}} F_{l+1}(a,x) \geq \underline{\mathbf{b}}_{l+1})\ \&\ (\,\min\nolimits_{\check{a}\in\mathbf{a}^{\exists}} F_{l+1}(a,x) \leq \overline{\mathbf{b}}_{l+1}) \\
&\quad\ \&\qquad \cdots \\
&\quad\ \&\ (\,\max\nolimits_{\check{a}\in\mathbf{a}^{\exists}} F_s(a,x) \geq \underline{\mathbf{b}}_s)\ \&\ (\,\min\nolimits_{\check{a}\in\mathbf{a}^{\exists}} F_s(a,x) \leq \overline{\mathbf{b}}_s)\ )\ \}.
\end{aligned}$$

Наконец,

$$(\forall\, a \in \mathbf{a})(\, f(a) \geq b\,) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \min_{a\in\mathbf{a}} f(a) \geq b,$$

$$(\forall\, a \in \mathbf{a})(\, f(a) \leq b\,) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \max_{a\in\mathbf{a}} f(a) \leq b,$$

и мы получаем

$$\begin{aligned}
&\Sigma_{\alpha\beta}(F,\mathbf{a},\mathbf{b}) = \\
&\{\; x\in\mathbb{R}^n \mid \\
&\quad (\quad (\,\min_{\hat{a}\in\mathbf{a}^{\forall}}\ \max_{\check{a}\in\mathbf{a}^{\exists}} F_1(a,x) \geq \overline{\mathbf{b}}_1)\ \&\ (\,\max_{\hat{a}\in\mathbf{a}^{\forall}}\ \min_{\check{a}\in\mathbf{a}^{\exists}} F_1(a,x) \leq \underline{\mathbf{b}}_1) \\
&\quad\ \&\qquad \cdots \\
&\quad\ \&\ (\,\min_{\hat{a}\in\mathbf{a}^{\forall}}\ \max_{\check{a}\in\mathbf{a}^{\exists}} F_l(a,x) \geq \overline{\mathbf{b}}_l)\ \&\ (\,\max_{\hat{a}\in\mathbf{a}^{\forall}}\ \min_{\check{a}\in\mathbf{a}^{\exists}} F_l(a,x) \leq \underline{\mathbf{b}}_l) \\
&\quad\ \&\ (\,\min_{\hat{a}\in\mathbf{a}^{\forall}}\ \max_{\check{a}\in\mathbf{a}^{\exists}} F_{l+1}(a,x) \geq \underline{\mathbf{b}}_{l+1})\ \&\ (\,\max_{\hat{a}\in\mathbf{a}^{\forall}}\ \min_{\check{a}\in\mathbf{a}^{\exists}} F_{l+1}(a,x) \leq \overline{\mathbf{b}}_{l+1}) \\
&\quad\ \&\qquad \cdots \\
&\quad\ \&\ (\,\min_{\hat{a}\in\mathbf{a}^{\forall}}\ \max_{\check{a}\in\mathbf{a}^{\exists}} F_s(a,x) \geq \underline{\mathbf{b}}_s)\ \&\ (\,\max_{\hat{a}\in\mathbf{a}^{\forall}}\ \min_{\check{a}\in\mathbf{a}^{\exists}} F_s(a,x) \leq \overline{\mathbf{b}}_s)\ )\ \},
\end{aligned}$$

что совпадает с системой (11).

6. Полная интервальная арифметика

Из характеризации (11) можно непосредственно видеть, что задачи (2), (10) являются по своей природе *минимаксными*, то есть такими, в которых привлекается операция взятия минимакса от функции нескольких переменных. Для решения подобных задач нам нужна специальная минимаксная интервальная арифметика, то есть некоторая интервальная арифметика, которая реализует вычисление минимакса на уровне элементарных арифметических операций — сложения, умножения, вычитания и деления. Классическая интервальная арифметика и её широко известные обобщения — арифметика Кахана, арифметика Хансена и ряд других — созданы для оценивания области значений арифметических операций и очевидным образом не подходят для нашей цели. К счастью, требуемая минимаксная интервальная арифметика уже существует и нам не нужно строить её на пустом месте. Это — *полная интервальная арифметика*, называемая также *интервальной арифметикой Каухера*.

Как известно, классическая интервальная арифметика — это алгебраическая система $\langle\, \mathbb{IR}, +, -, \cdot, /\, \rangle$, носитель которой образован интервалами вещественной оси $[\, \underline{x}, \overline{x}\,]$, $\underline{x} \leq \overline{x}$, а операции сложения, вычитания, умножения и деления таковы, что фундаментальное свойство — определение операций над множествами через операции над их представителями

$$\mathbf{x} \star \mathbf{y} = \{\, x \star y \mid x \in \mathbf{x},\, y \in \mathbf{y}\,\} \tag{12}$$

— оказывается выполненным для всех интервалов $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, таких что $(x \star y)$, $\star \in \{\, +,\, -,\, \cdot,\, /\,\}$, имеет смысл для любых $x \in \mathbf{x}$, $y \in \mathbf{y}$ [2, 7, 23, 24]. Развёрнутое определение интервальных арифметических операций таково:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x} + \mathbf{y} &= \left[\, \underline{\mathbf{x}} + \underline{\mathbf{y}},\ \overline{\mathbf{x}} + \overline{\mathbf{y}}\, \right], \\
\mathbf{x} - \mathbf{y} &= \left[\, \underline{\mathbf{x}} - \overline{\mathbf{y}},\ \overline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{y}}\, \right], \\
\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} &= \left[\, \min\{\underline{\mathbf{x}}\,\underline{\mathbf{y}}, \underline{\mathbf{x}}\,\overline{\mathbf{y}}, \overline{\mathbf{x}}\,\underline{\mathbf{y}}, \overline{\mathbf{x}}\,\overline{\mathbf{y}}\},\ \max\{\underline{\mathbf{x}}\,\underline{\mathbf{y}}, \underline{\mathbf{x}}\,\overline{\mathbf{y}}, \overline{\mathbf{x}}\,\underline{\mathbf{y}}, \overline{\mathbf{x}}\,\overline{\mathbf{y}}\}\, \right], \\
\mathbf{x}/\mathbf{y} &= \mathbf{x} \cdot \left[\, 1/\overline{\mathbf{y}},\ 1/\underline{\mathbf{y}}\, \right] \qquad \text{для} \ \ \mathbf{y} \not\ni 0.
\end{aligned}$$

Классическая интервальная арифметика является всего лишь полугруппой как по сложению, так и по умножению: интервалы с ненулевой шириной, то есть большинство элементов $\mathbb{IR}$, не имеют ни обратных, ни противоположных. Кроме того, $\mathbb{IR}$ не является даже решёткой относительно естественного порядка по включению "$\subseteq$", поскольку из операций

$$\begin{aligned}
\mathbf{x} \wedge \mathbf{y} &= \left[\, \max\{\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{y}}\},\ \min\{\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}\}\, \right] \ \text{— взятие инфимума относительно } \subseteq, \\
\mathbf{x} \vee \mathbf{y} &= \left[\, \min\{\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{y}}\},\ \max\{\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}\}\, \right] \ \text{— взятие супремума относительно } \subseteq,
\end{aligned}$$

первая не всегда осуществима в классической интервальной арифметике.

"Неполнота" как алгебраической, так и порядковой структур $\mathbb{IR}$ естественно стимулировала попытки "достроить" классическую интервальную арифметику, создать на её основе "более совершенную" интервальную арифметику. Такая достройка $\mathbb{IR}$ была осуществлена в работах Э. Каухера (см. [18, 19] и имеющиеся там ссылки), который называл получившуюся алгебраическую систему "интервальной арифметикой $\mathbb{IR}$". Мы будем придерживаться термина "полная интервальная арифметика", иногда используя также термин "интервальная арифметика Каухера". Впоследствии ею занимались также Е. Гарденес и А. Трепат

[17], установившие ряд полезных свойств и важных приложений. Подробное описание интервальной арифметики $\mathbb{IR}$ можно найти в работах [17, 19], а здесь мы опишем лишь те её свойства, которые понадобятся нам в дальнейшем изложении.

Элементами $\mathbb{IR}$ являются вещественные пары $[\,\underline{x},\,\overline{x}\,]$, не обязательно связанные соотношением $\underline{x} \le \overline{x}$. Таким образом, $\mathbb{IR}$ получается присоединением *неправильных* интервалов $[\,\underline{x},\overline{x}\,]$, $\underline{x} > \overline{x}$, к множеству *правильных* интервалов и вещественных чисел $\mathrm{I}\mathbb{R} = \{\,[\,\underline{x},\overline{x}\,] \mid \underline{x},\,\overline{x} \in \mathbb{R},\ \underline{x} \le \overline{x}\,\}$. Элементы полной интервальной арифметики и составленные из них объекты мы будем обозначать, как и обычные интервалы, буквами жирного шрифта.

Правильные и неправильные интервалы, две половинки $\mathbb{IR}$, меняются местами в результате отображения *дуализации*

$$\mathrm{dual}\ : \mathbb{IR} \to \mathbb{IR},$$

переворачивающего концы интервала, то есть такого что

$$\mathrm{dual}\,\mathbf{x} = [\,\overline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{x}}\,].$$

Как и в классической интервальной арифметике,

$$\mathbf{x} \subseteq \mathbf{y} \quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad \underline{\mathbf{x}} \ge \underline{\mathbf{y}} \ \text{ и } \ \overline{\mathbf{x}} \le \overline{\mathbf{y}}, \tag{13}$$

но, в отличие от $\mathrm{I}\mathbb{R}$, интервальная арифметика $\mathbb{IR}$ является относительно такого порядка по включению условно полной решеткой [4].

Сложение и умножение на вещественные числа определяются на $\mathbb{IR}$ следующим образом:

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} := \left[\,\underline{\mathbf{x}} + \underline{\mathbf{y}}, \overline{\mathbf{x}} + \overline{\mathbf{y}}\,\right],$$

$$\lambda \cdot \mathbf{x} := \begin{cases} [\,\lambda\,\underline{\mathbf{x}}, \lambda\,\overline{\mathbf{x}}\,], & \text{если } \ \lambda \ge 0, \\ [\,\lambda\,\overline{\mathbf{x}}, \lambda\,\underline{\mathbf{x}}\,], & \text{иначе.} \end{cases}$$

Очевидно, что каждый элемент $\mathbf{x}$ из $\mathbb{IR}$ имеет единственный противоположный элемент $[\,-\underline{\mathbf{x}}, -\overline{\mathbf{x}}\,]$, и относительно сложения полная интервальная арифметика $\mathbb{IR}$ является коммутативной группой, изоморфной аддитивной группе стандартного линейного пространства $\mathbb{R}^2$.

Для того, чтобы выписать явные формулы для умножения, выделим в $\mathbb{IR}$ следующие подмножества:

$$\begin{aligned}
\mathcal{P} &:= \{\,\mathbf{x} \in \mathbb{IR} \mid (\underline{\mathbf{x}} \ge 0)\ \&\ (\overline{\mathbf{x}} \ge 0)\,\}, && \text{— положительные интервалы,} \\
\mathcal{Z} &:= \{\,\mathbf{x} \in \mathbb{IR} \mid \underline{\mathbf{x}} \le 0 \le \overline{\mathbf{x}}\,\}, && \text{— нульсодержащие интервалы,} \\
-\mathcal{P} &:= \{\,\mathbf{x} \in \mathbb{IR} \mid -\mathbf{x} \in \mathcal{P}\,\}, && \text{— отрицательные интервалы,} \\
\mathrm{dual}\,\mathcal{Z} &:= \{\,\mathbf{x} \in \mathbb{IR} \mid \mathrm{dual}\,\mathbf{x} \in \mathcal{Z}\,\}, && \text{— интервалы, содержащиеся в нуле.}
\end{aligned}$$

В целом $\mathbb{IR} = \mathcal{P} \cup \mathcal{Z} \cup -\mathcal{P} \cup \mathrm{dual}\,\mathcal{Z}$. Тогда умножение в полной интервальной арифметике может быть описано следующей таблицей [19]:

Умножение в $\mathbb{IR}$	$\mathbf{y}\in\mathcal{P}$	$\mathbf{y}\in\mathcal{Z}$	$\mathbf{y}\in -\mathcal{P}$	$\mathbf{y}\in \mathrm{dual}\,\mathcal{Z}$
$\mathbf{x}\in\mathcal{P}$	$[\,\underline{\mathbf{x}}\,\underline{\mathbf{y}}, \overline{\mathbf{x}}\,\overline{\mathbf{y}}\,]$	$[\,\overline{\mathbf{x}}\,\underline{\mathbf{y}}, \overline{\mathbf{x}}\,\overline{\mathbf{y}}\,]$	$[\,\overline{\mathbf{x}}\,\underline{\mathbf{y}}, \underline{\mathbf{x}}\,\overline{\mathbf{y}}\,]$	$[\,\underline{\mathbf{x}}\,\underline{\mathbf{y}}, \underline{\mathbf{x}}\,\overline{\mathbf{y}}\,]$
$\mathbf{x}\in\mathcal{Z}$	$[\,\underline{\mathbf{x}}\,\overline{\mathbf{y}}, \overline{\mathbf{x}}\,\overline{\mathbf{y}}\,]$	$[\,\min\{\underline{\mathbf{x}}\,\overline{\mathbf{y}}, \overline{\mathbf{x}}\,\underline{\mathbf{y}}\},$ $\max\{\underline{\mathbf{x}}\,\underline{\mathbf{y}}, \overline{\mathbf{x}}\,\overline{\mathbf{y}}\}\,]$	$[\,\overline{\mathbf{x}}\,\underline{\mathbf{y}}, \underline{\mathbf{x}}\,\underline{\mathbf{y}}\,]$	0
$\mathbf{x}\in -\mathcal{P}$	$[\,\underline{\mathbf{x}}\,\overline{\mathbf{y}}, \overline{\mathbf{x}}\,\underline{\mathbf{y}}\,]$	$[\,\underline{\mathbf{x}}\,\overline{\mathbf{y}}, \underline{\mathbf{x}}\,\underline{\mathbf{y}}\,]$	$[\,\overline{\mathbf{x}}\,\overline{\mathbf{y}}, \underline{\mathbf{x}}\,\underline{\mathbf{y}}\,]$	$[\,\overline{\mathbf{x}}\,\overline{\mathbf{y}}, \overline{\mathbf{x}}\,\underline{\mathbf{y}}\,]$
$\mathbf{x}\in \mathrm{dual}\,\mathcal{Z}$	$[\,\underline{\mathbf{x}}\,\underline{\mathbf{y}}, \overline{\mathbf{x}}\,\underline{\mathbf{y}}\,]$	0	$[\,\overline{\mathbf{x}}\,\overline{\mathbf{y}}, \underline{\mathbf{x}}\,\overline{\mathbf{y}}\,]$	$[\,\max\{\underline{\mathbf{x}}\,\underline{\mathbf{y}}, \overline{\mathbf{x}}\,\overline{\mathbf{y}}\},$ $\min\{\underline{\mathbf{x}}\,\overline{\overline{\mathbf{y}}}, \overline{\mathbf{x}}\,\underline{\mathbf{y}}\}\,]$

Как видим, умножение в полной арифметике допускает нетривиальные делители нуля. Например, $[\,-1,\,2\,]\cdot[\,5,\,-3\,]=0$. Интервальное умножение в $\mathbb{IR}$ является коммутативным и ассоциативным, как и его прародитель из $\mathbb{IR}$, но мультипликативную группу в $\mathbb{IR}$ образуют лишь интервалы $\mathbf{x}$ с $\underline{\mathbf{x}}\,\overline{\mathbf{x}}>0$ (т.е. множество $\mathcal{P}\cup-\mathcal{P}$), поскольку закон сокращения не выполняется ни на каком более широком подмножестве $\mathbb{IR}$ [18].

Определения интервальных вычитания и деления в арифметике $\mathbb{IR}$ аналогичны соответствующим определениям для обычной арифметики $\mathbb{IR}$:

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{x}-\mathbf{y}=\mathbf{x}+(-1)\cdot\mathbf{y},\\
&\mathbf{x}\,/\,\mathbf{y}=\mathbf{x}\cdot\big[\,1/\overline{\mathbf{y}},1/\underline{\mathbf{y}}\,\big]\qquad \text{для}\ \ \underline{\mathbf{y}}\,\overline{\mathbf{y}}>0.
\end{aligned}
$$

Важно отметить, что в полной арифметике свойство монотонности по включению также остаётся справедливым:

$$
\mathbf{x}\subseteq\mathbf{x}',\ \mathbf{y}\subseteq\mathbf{y}'\quad\Longrightarrow\quad \mathbf{x}\star\mathbf{y}\subseteq\mathbf{x}'\star\mathbf{y}'
$$

для $\star\in\{\,+\,,\,-\,,\,\cdot\,,\,/\,\}$ и любых $\mathbf{x}$, $\mathbf{x}'$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{y}'\in\mathbb{IR}$. Подобно обычной интервальной арифметике полная интервальная арифметика не обладает свойством дистрибутивности умножения по сложению [17, 19]. Кроме того, не имеет места и дистрибутивность умножения относительно решёточных операций $\vee$ и $\wedge$.

Заметим, что с помощью операции взятия супремума относительно порядка по включению определение (12) можно переписать в следующем эквивалентном виде

$$
\mathbf{x}\star\mathbf{y}=\bigvee_{x\in\mathbf{x}}\ \bigvee_{y\in\mathbf{y}}(x\star y),\qquad \star\in\{\,+,\,-,\,\cdot,\,/\,\}. \tag{14}
$$

Наиболее удивительным фактом, относящимся к полной интервальной арифметике, является то, что в ней, построенной чисто алгебраическими средствами, выполнено тем не менее представление, обобщающее (12) и (14). Именно, для каждой интервальной арифметической операции $\star$ в $\mathbb{IR}$ имеет место

$$
\mathbf{x}\star\mathbf{y}=\mathop{\text{И}}\nolimits^{\mathbf{x}}_{x\in\mathrm{pro}\,\mathbf{x}}\ \mathop{\text{И}}\nolimits^{\mathbf{y}}_{y\in\mathrm{pro}\,\mathbf{y}}\,(x\star y), \tag{15}
$$

где

$$\text{И}^{\mathbf{x}} := \begin{cases} \bigvee, & \text{если } \mathbf{x} \text{ правильный}, \\ \bigwedge, & \text{иначе}, \end{cases} \quad — \quad \begin{array}{l}\text{условная операция}\\ \text{взятия экстремума}\\ \text{по включению,}\end{array}$$

$$\operatorname{pro}\mathbf{x} := \begin{cases} \mathbf{x}, & \text{если } \mathbf{x} \text{ правильный}, \\ \operatorname{dual}\mathbf{x}, & \text{иначе}, \end{cases} \quad — \quad \begin{array}{l}\text{правильная}\\ \text{проекция}\\ \text{интервала.}\end{array}$$

Оно выражает связь между интервальным результатом интервальной операции $\mathbf{x} \star \mathbf{y}$ и результатами отдельных точечных операций $x \star y$ для $x \in \operatorname{pro}\mathbf{x}$ и $y \in \operatorname{pro}\mathbf{y}$.

Какое отношение имеет полная интервальная арифметика к рассматриваемым нами задачам? Как следует из представления (15), полная интервальная арифметика и является искомой минимаксной интервальной арифметикой! Действительно, формула (15) отражает, в частности, тот факт, что в полной арифметике концы результирующего интервала являются минимаксом и максимином результатов арифметических операций между точками правильных проекций интервалов-операндов, если один из операндов — правильный интервал, а другой — неправильный.

Векторные и матричные операции в полной арифметике Каухера определяются точно так же, как и для $\mathbb{IR}$ (см., например, [2, 24]), а порядок по включению на множествах интервальных векторов и матриц является прямым произведением [4] порядков по включению на отдельных компонентах. Аналогично, действие операции дуализации "dual" на интервальные векторы и матрицы и взятие их правильной проекции "pro" будем понимать покомпонентно.

Из (15) по индукции нетрудно заключить, что если рациональное выражение $f(x, y) = f(x_1, \ldots, x_p, y_1, \ldots, y_q)$ имеет лишь по одному вхождению каждой переменной в первой степени, то для любых правильных интервальных векторов $\mathbf{x} \in \mathbb{IR}^p$, $\mathbf{y} \in \mathbb{IR}^q$ имеет место равенство

$$\left[\, \min_{x \in \mathbf{x}} \max_{y \in \mathbf{y}} f(x, y),\ \max_{x \in \mathbf{x}} \min_{y \in \mathbf{y}} f(x, y) \,\right] = f(\mathbf{x}, \operatorname{dual}\mathbf{y}). \tag{16}$$

Более сложный случай, который также может быть обоснован математической индукцией: если рациональное выражение $f(x, y) = f(x_1, \ldots, x_p, y_1, \ldots, y_q)$ имеет лишь по одному вхождению переменных y_i в первой степени, то для любых правильных интервальных векторов $\mathbf{x} \in \mathbb{IR}^p$, $\mathbf{y} \in \mathbb{IR}^q$ справедливо включение

$$\left[\, \min_{x \in \mathbf{x}} \max_{y \in \mathbf{y}} f(x, y),\ \max_{x \in \mathbf{x}} \min_{y \in \mathbf{y}} f(x, y) \,\right] \subseteq f(\mathbf{x}, \operatorname{dual}\mathbf{y}). \tag{17}$$

Интервалы левой и правой частей соотношений (16) и (17) могут быть, вообще говоря, неправильными.

7. Алгебраический подход

Основой предлагаемого нами алгебраического подхода к решению задачи (10), — процедуры для "анализа статических систем при интервальной неопределённости", — являются следующие результаты.

Предложение 2. *Пусть отображение F таково, что каждая из переменных a_{k+1}, …, a_r, имеющих $\exists$-неопределённость, входит не более одного раза в первой степени* *в единственное из компонентных выражений $F_1, F_2, \dots, F_s$. Если для вектора $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$ выполнено включение*

$$F(\,\mathbf{a}^{\forall} + \operatorname{dual}\mathbf{a}^{\exists}, \tilde{x}\,) \subseteq \operatorname{dual}\mathbf{b}^{\forall} + \mathbf{b}^{\exists}, \tag{18}$$

то $\tilde{x} \in \Sigma_{\alpha\beta}(F, \mathbf{a}, \mathbf{b})$.

Если каждая из переменных $a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_r$ встречается не более одного раза в первой степени в единственном из компонентных выражений $F_1,\ F_2,\ \dots,\ F_s$, то верно и обратное утверждение, то есть принадлежность $x \in \Sigma_{\alpha\beta}(F, \mathbf{a}, \mathbf{b})$ эквивалентна включению (18).

Доказательство. Основываясь на определении порядка по включению (13), перепишем условия принадлежности обобщённому множеству решений (11) в терминах полной интервальной арифметики. Они оказываются эквивалентными следующим включениям:

$$\Bigl[\, \min_{\hat{a}\in\mathbf{a}^{\forall}} \max_{\check{a}\in\mathbf{a}^{\exists}} F_i(\hat{a}+\check{a}, x),\ \max_{\hat{a}\in\mathbf{a}^{\forall}} \min_{\check{a}\in\mathbf{a}^{\exists}} F_i(\hat{a}+\check{a}, x) \,\Bigr] \subseteq \operatorname{dual}\mathbf{b}_i, \qquad i = 1, 2, \dots, l,$$

$$\Bigl[\, \min_{\hat{a}\in\mathbf{a}^{\forall}} \max_{\check{a}\in\mathbf{a}^{\exists}} F_i(\hat{a}+\check{a}, x),\ \max_{\hat{a}\in\mathbf{a}^{\forall}} \min_{\check{a}\in\mathbf{a}^{\exists}} F_i(\hat{a}+\check{a}, x) \,\Bigr] \subseteq \mathbf{b}_i, \qquad i = l+1, \dots, s,$$

или, в единообразной форме,

$$\Bigl[\, \min_{\hat{a}\in\mathbf{a}^{\forall}} \max_{\check{a}\in\mathbf{a}^{\exists}} F_i(\hat{a}+\check{a}, x),\ \max_{\hat{a}\in\mathbf{a}^{\forall}} \min_{\check{a}\in\mathbf{a}^{\exists}} F_i(\hat{a}+\check{a}, x) \,\Bigr] \subseteq (\operatorname{dual}\mathbf{b}^{\forall} + \mathbf{b}^{\exists})_i, \qquad i = 1, \dots, s. \tag{19}$$

Если для некоторой точки $\tilde{x}$ выполнено (18), то, комбинируя с (17), получим (19), то есть согласно Предложению 1 $x \in \Sigma_{\alpha\beta}(F, \mathbf{a}, \mathbf{b})$.

Второе утверждение Предложения 2 непосредственно следует из равенства (16).

Предложение 3. *Пусть отображение F таково, что каждая из переменных a_{k+1}, $\dots$, a_r, имеющих $\exists$-тип неопределённости, входит лишь не более одного раза в первой степени в единственное из компонентных выражений $F_1, F_2, \dots, F_s$. Если правильный интервальный вектор $\mathbf{x}$ является алгебраическим решением уравнения*

$$F(\,\mathbf{a}^{\forall} + \operatorname{dual}\mathbf{a}^{\exists}, x\,) = \operatorname{dual}\mathbf{b}^{\forall} + \mathbf{b}^{\exists}, \tag{20}$$

то $\mathbf{x} \subseteq \Sigma_{\alpha\beta}(F, \mathbf{a}, \mathbf{b})$, иными словами интервальный вектор $\mathbf{x}$ является решением задачи (10).

Определение 4. Для интервальной системы $F(\mathbf{a}, x) = \mathbf{b}$ мы будем называть систему уравнений (20) *уравнением в дуализациях*, соответствующим её множеству $\alpha\beta$-решений.

Доказательство. Пусть правильный интервальный вектор $\mathbf{x}$ является алгебраическим решением уравнения в дуализациях (20) и $\tilde{x} \in \mathbf{x}$. Принимая во внимание свойство монотонности по включению арифметических операций в $\mathbb{IR}$, имеем

$$F(\,\mathbf{a}^{\forall} + \operatorname{dual}\mathbf{a}^{\exists}, \tilde{x}\,) \subseteq F(\,\mathbf{a}^{\forall} + \operatorname{dual}\mathbf{a}^{\exists}, \mathbf{x}\,) = \operatorname{dual}\mathbf{b}^{\forall} + \mathbf{b}^{\exists}.$$

Таким образом, $\tilde{x} \in \Sigma_{\alpha\beta}(F, \mathbf{a}, \mathbf{b})$ в силу Предложения 2. Поскольку эта принадлежность верна для любого $\tilde{x} \in \mathbf{x}$, то $\mathbf{x} \subseteq \Sigma_{\alpha\beta}(F, \mathbf{a}, \mathbf{b})$, что и требовалось.

Имеет смысл отдельно сформулировать частные случаи вышедоказанных общих утверждений, которые относятся к внутреннему интервальному оцениванию объединённого, допустимого и управляемого множеств решений (7)–(9).

Пусть отображение F таково, что каждая из переменных $a_1, a_2, \ldots, a_r$ входит лишь один раз в первой степени в единственное из компонентных выражений $F_1, F_2, \ldots, F_s$. Если правильный интервальный вектор $\mathbf{x}$ является алгебраическим решением уравнения

$$F(\text{dual}\,\mathbf{a}, x) = \mathbf{b},$$

то $\mathbf{x} \subseteq \Sigma_{\exists\exists}(F, \mathbf{a}, \mathbf{b})$, т.е. $\mathbf{x}$ является внутренней интервальной оценкой объединённого множества решений системы $F(\mathbf{a}, x) = \mathbf{b}$. Этот результат применим, в частности, к интервальным линейным системам (см. [20, 30]).

Если правильный интервальный вектор $\mathbf{x}$ является алгебраическим решением уравнения

$$F(\mathbf{a}, x) = \mathbf{b},$$

то $\mathbf{x} \subseteq \Sigma_{\forall\exists}(F, \mathbf{a}, \mathbf{b})$, т.е. $\mathbf{x}$ является внутренней интервальной оценкой для допустимого множества решений системы $F(\mathbf{a}, x) = \mathbf{b}$ (или, иначе, по терминологии А.Ноймайера [24] и работы [29], решением соответствующей *задачи о допусках*).

Пусть отображение F таково, что каждая из переменных $a_1, a_2, \ldots, a_r$ входит лишь один раз в первой степени в единственное из компонентных выражений $F_1, F_2, \ldots, F_s$. Если правильный интервальный вектор $\mathbf{x}$ является алгебраическим решением уравнения

$$F(\text{dual}\,\mathbf{a}, x) = \text{dual}\,\mathbf{b},$$

то $\mathbf{x} \subseteq \Sigma_{\exists\forall}(F, \mathbf{a}, \mathbf{b})$, т.е. $\mathbf{x}$ является внутренней интервальной оценкой управляемого множества решений системы $F(\mathbf{a}, x) = \mathbf{b}$.

Наконец, рассмотрим вопрос о качестве интервального решения задачи (10), которое может быть получено с использованием алгебраического подхода, или, иначе, вопрос о размерах интервальной оценки множеств решений $\Sigma_{\alpha\beta}(F, \mathbf{a}, \mathbf{b})$. Наиболее сильным из известных на настоящий момент результатов в этом направлении является

Предложение 4. *Если все компоненты $F_i(a, x)$ — билинейные функции a и x (т.е. $F_i(a, x) = \sum_{j,k} h_{ijk} a_j x_k$ с некоторыми $h_{ijk} \in \mathbb{R}$) и каждый a_j входит лишь в одно из выражений F_i, то максимальное по включению алгебраическое решение уравнения в дуализациях (20) является максимальной по включению внутренней интервальной оценкой для обобщённого множества решений $\Sigma_{\alpha\beta}$, или, иначе, максимальным по включению решением задачи (10).*

Доказательство можно найти, например, в [32].

8. Что дальше?

Итак, предложенный выше "алгебраический подход" позволяет свести задачу внутреннего интервального оценивания обобщённых множеств решений к задаче решения *одной* формально интервальной, а фактически неинтервальной системы уравнений (уравнения в дуализациях), то есть к традиционной задаче численного анализа. Практичность и эффективность этой методики решающим образом зависят от эффективности алгоритмов для решения уравнения в дуализациях (20). Уместно отметить, что для этой цели мы в большинстве случаев едва ли сможем воспользоваться какими-либо методами исключения, символьными преобразованиями и т.п. Препятствием является тот факт, что алгебраические свойства $\mathbb{IR}$ весьма плохи. И хотя они значительно лучше, чем у классической интервальной арифметики, отсутствие полноценной дистрибутивности в $\mathbb{IR}$ делает невозможной даже такую простейшую операцию, как например, приведение подобных членов. По этой причине все алгоритмы, реализующие алгебраический подход, являются (по крайней мере на данный момент) существенно *численными.*

Отметим, что даже для интервальной системы линейных уравнений А. В. Лакеев недавно доказал NP-трудность задачи нахождения алгебраического решения в полной арифметике Каухера [21]. Тем не менее, несмотря на этот неблагоприятный факт, для интервальных линейных систем с "не очень широкими" интервалами имеется ряд эффективных численных методов, быстро вычисляющих алгебраическое решение [13, 30]. Таковыми являются *субдифференциальный метод Ньютона* [30] (превращающийся для некоторых случаев в квазидифференциальный метод Ньютона) и различные модификации одношаговых стационарных итерационных методов [13]. В целом можно считать, что для линейного случая проблема нахождения алгебраического решения интервальных уравнений решается более или менее успешно.

Для общих нелинейных систем конструирование численных методов для решения уравнения в дуализациях является большой интересной открытой проблемой. При развитии подходов к ней главную роль должны, по-видимому, играть конкретные потребности практики, хотя и в общем случае ситуация здесь отнюдь не безнадёжная. Несмотря на то, что мы оказываемся лишенными таких эффективных инструментов, как субдифференциальный метод Ньютона и его обобщения, всегда имеется возможность попытаться использовать универсальную схему стационарных итерационных процессов вида $x^{(k+1)} = G(\,x^{(k)})$ и её многочисленные модификации: если G имеет сжимающий оператор Липшица, то последовательность $x^{(k)}$ сходится к требуемому решению. Другая привлекательная возможность решения уравнений в дуализациях состоит в том, чтобы прибегнуть к помощи какого-либо из пакетов-решателей нелинейных систем, основанных на технике "распространения ограничений" ("constraint propagation"), интенсивно развивающейся в последние годы. Конкретно мы рекомендуем очень мощный решатель UniCalc [15], разработанный в Новосибирском филиале РосНИИ Искусственного Интеллекта и в настоящее время доступный на рынке программных продуктов.

Автор благодарен Хун Хонгу за незабываемые дискуссии по поводу представленных в этой работе результатов.

Список литературы

[1] Акофф Р., Сасиени М. *Основы исследования операций.* Мир, М., 1971.

[2] Алефельд Г., Херцбергер Ю. *Введение в интервальные вычисления.* Мир, М., 1987.

[3] Ащепков Л. Т. К проблеме повышения живучести управляемых систем. В:*"Модели и методы исследования операций"* Наука, Новосибирск, 1988, 69–85.

[4] Биркгоф Г. *Теория решёток.* Наука, М., 1984.

[5] Ватолин А. А. О задачах линейного программирования с интервальными коэффициентами. *ЖВМ и МФ* **24**, №11, 1984, 1629–1637.

[6] Гермейер Ю. Б. *Введение в теорию исследования операций.* Наука, М., 1971.

[7] Калмыков С. А., Шокин Ю. И., Юлдашев З. Х. *Методы интервального анализа.* Наука, Новосибирск, 1986.

[8] Клини С. *Математическая логика.* Мир, М., 1973.

[9] Лакеев А. В., Носков С. И. О множестве решений линейного уравнения с интервально заданными оператором и правой частью. *Сиб. матем. журн.* **35**, №5, 1994, 1074–1084.

[10] Месарович М., Такахара Я. *Общая теория систем: математические основы.* Мир, М., 1978.

[11] Обэн Ж.-П. *Нелинейный анализ и его экономические приложения.* Мир, М., 1988.

[12] Шарый С. П. Линейные статические системы с интервальной неопределенностью: эффективные алгоритмы для решения задач управления и стабилизации. *Вычислительные технологии*, ИВТ СО РАН, Новосибирск, **4**, у 13, 1995, 64–80.

[13] Шарый С. П. Численное нахождение алгебраического решения интервальных линейных систем. В *“Дискретная математика”,* КГТУ, Красноярск, 1996, 129–145.

[14] Aubin J.-P. *Viability theory.* Birkhäuser, Boston, 1991.

[15] Babichev A. B., Kadyrova O. B., Kashevarova T. P., Leshchenko A. S. and Semenov A. L. UniCalc, a novel approach to solving systems of algebraic equations. *Interval Computations* №2, 1993, 29–47.

[16] Berti S. The solution of an interval equation. *Mathematica* **11**, №2, 1969, 189–194.

[17] Gardeñes E., Trepat A. Fundamentals of SIGLA, an interval computing system over the completed set of intervals. *Computing* **24**, 1980, 161–179.

[18] Kaucher E. Algebraische Erweiterungen der Intervallrechnung unter Erhaltung Ordnungs- und Verbandsstrukturen. *Computing Suppl.* **1**, 1977, 65–79.

[19] Kaucher E. Interval analysis in the extended interval space $\mathbb{IR}$. *Ibid* **2**, 1980, 33–49.

[20] Kupriyanova L. Inner estimation of the united solution set of interval linear algebraic system. *Reliable Computing* **1**, №1, 1995, 15–31.

[21] Lakeyev A. V. On the computational complexity of the solution of linear systems with moduli. *Ibid* **2**, №2, 1996, 125–131.

[22] Lakeyev A. V., Shary S. P., Rohn J. On characterization and complexity of generalized solution sets to interval linear systems. *Reliable Computing* в печати.

[23] Moore R. E. In *“Methods and Applications of Interval Analysis”.* SIAM, Philadelphia, 1979.

[24] Neumaier A. *Interval Methods for Systems of Equations.* Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[25] Nickel K. Die Auflösbarkeit linearer Kreisscheiben- und Intervall-Gleichungssystemen. *Linear Algebra Appl.* **44**, 1982, 19–40.

[26] Ratschek H., Sauer W. Linear interval equations. *Computing* **28**, 1982, 105–115.

[27] Rohn J., Kreslova Ja. Linear interval inequalities. *Linear and Multilinear Algebra* **38**, 1994, 41–43.

[28] Shary S. P. On controlled solution set of interval algebraic systems. *Interval Computations* **2**, №6, 1992, 66–75.

[29] Shary S. P. Solving the linear interval tolerance problem. *Mathematics and Computers in Simulation* **39**, 1995, 53–85.

[30] Shary S. P. Algebraic approach to the interval linear static identification, tolerance and control problems, or One more application of Kaucher arithmetic. *Reliable Computing* **2**, №1, 1996, 3–33.

[31] Shary S. P. Algebraic approach to the analysis of linear static system with interval uncrtainty. *Rus. J. Numer. Anal. Math. Modelling* **11**, №3, 1996, 259–274.

[32] Shary S. P. Algebraic solutions to interval linear equations and their applications. In *"Numer. Methods and Error Bounds"*. G. Alefeld and J. Herzberger, eds., Akademie-Verlag, Berlin, 1996, 224–233.