

# ОБ АППРОКСИМАЦИЯХ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ГАРАНТИРОВАННОГО ОЦЕНИВАНИЯ СОСТОЯНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ\*

Е. К. КОСТОУСОВА, Л. В. СТАШКОВА

*Институт математики и механики УрО РАН*

*Екатеринбург, Россия*

e-mail: kek@imm.uran.ru

The guaranteed state estimation problem for a parabolic system is considered under “geometric” constraints imposed on unknown input parameters. Convergence of sets, which are obtained by solving approximate problems, to the required informational domain is investigated. The capabilities of using external parallelotopic estimates for solutions of approximate problems are considered.

## Введение

В работе рассматривается задача гарантированного оценивания состояния параболической системы [1–3] при “геометрических” ограничениях на неопределенные возмущения, действующие в системе. Для аппроксимации информационной области, являющейся решением задачи, вводятся (путем дифференциально-разностных или конечно-разностных аппроксимаций) последовательности задач гарантированного оценивания состояния конечномерных систем. Показано, что при сгущении сетки имеет место сходимость к нулю хаусдорфова полурасстояния между искомым множеством и множеством кусочно-постоянных восполнений решений аппроксимирующих задач, и приведены условия (связанные с корректностью задачи и дополнительной гладкостью функций, задающих ограничения), при которых сходимость к нулю имеет место и для второго хаусдорфова полурасстояния; установлена скорость сходимости. Аналогичные результаты справедливы для области достижимости. Обсуждаются результаты численного моделирования, где в качестве внешних оценок для решений аппроксимирующих задач используются параллелепипедозначные оценки [4, 5].

Вопросы вычисления множеств достижимости и информационных областей параболических систем при “геометрических” ограничениях исследовались, например, в [2, 3, 6]. Для аппроксимации можно использовать также эллипсоидальные оценки (см. [7] и приведенную там библиографию).

---

\*Исследования выполнены при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант №99–01–00176.

© Е. К. Костоусова, Л. В. Сташкова, 2001.

## 1. Постановка задачи

Имеется система, состояние которой описывается начально-краевой задачей

$$\begin{aligned} u_t(x, t) &= a^2 u_{xx}(x, t) + cf(x, t), \quad f \in L_2(Q), \quad Q = D \times (0, \vartheta), \quad D = (0, l) \subset \mathbb{R}^1; \\ u(x, t)|_{x \in \partial D} &= 0; \quad u(x, t)|_{t=0} = u_0(x) \in L_2(D), \end{aligned} \quad (1.1)$$

где константа  $c = 0$  или  $c = 1$ . Решение этой задачи будем понимать как обобщенное из энергетического класса [8, с. 161]. Пусть начальное состояние  $u_0(x)$  и функция  $f(x, t)$  (при  $c = 1$ ) неизвестны, но стеснены “геометрическими” ограничениями

$$\begin{aligned} u_0(\cdot) \in \mathcal{U}_0 &= \{u_0(\cdot) \in L_2(D) : |u_0(x) - \bar{u}_0(x)| \leq \omega_1(x), \text{ п.в. } x \in D\}, \\ f(\cdot, \cdot) \in \mathcal{F} &= \{f(\cdot, \cdot) \in L_2(Q) : |f(x, t) - \bar{f}(x, t)| \leq \omega_2(x, t), \text{ п.в. } x, t \in Q\}, \end{aligned} \quad (1.2)$$

где  $\bar{u}_0, \omega_1 \in L_2(D)$ ,  $\bar{f}, \omega_2 \in L_2(Q)$  — известные функции.

Областью достижимости  $\mathcal{U}_a = \mathcal{U}_a(\vartheta)$  системы (1.1), (1.2) в момент  $\vartheta$  называется [6] множество функций  $u(\cdot) \in L_2(D)$ , для каждой из которых существуют  $u_0^*$  и  $f^*$ , удовлетворяющие (1.2) и порождающие решение  $u^*(x, t)$  системы (1.1) такое, что  $u^*(\cdot, \vartheta) = u(\cdot)$ .

Пусть теперь о решении  $u(x, t)$  доставляется информация в силу уравнения измерений

$$y(t) = G(t) u(\cdot, t) + \xi(t), \quad t \in T = [\delta, \vartheta], \quad \delta > 0. \quad (1.3)$$

Здесь  $y(t)$  — данные измерений,  $y(t) \in \mathbb{R}^1$ ;  $T$  — промежуток наблюдения;  $\xi$  — неопределенная помеха, которую будем считать элементом пространства  $Y = L_\infty(T)$ ;  $G(t)$  — линейный оператор наблюдения (“сенсор”), доставляющий либо точечные наблюдения [2], когда измерения производятся вдоль некоторой траектории наблюдения, задаваемой измеримой (по Лебегу) функцией  $X(t)$ :

$$G(t) u(\cdot, t) = u(X(t), t), \quad X(t) \in \bar{D} = [0, l] \text{ при п.в. } t \in T, \quad (1.4)$$

либо пространственно-усредненные [2] с весом  $g(x, t) \in L_2(Q_T)$ ,  $Q_T = D \times T$ , когда

$$G(t) u(\cdot, t) = \int_D g(x, t) u(x, t) dx, \quad 0 < \|g(\cdot, t)\|_{L_2(D)} \leq C < \infty \text{ при п.в. } t \in T. \quad (1.5)$$

Символом  $C$  здесь и ниже обозначаются константы, зависящие только от известных параметров системы (коэффициентов в уравнении, промежутка и оператора наблюдения, параметров ограничений) и не зависящие от начальных условий и возмущений в системе, а также от вводимых ниже шагов дискретизации. Помеха  $\xi$  стеснена ограничением

$$\xi(\cdot) \in \Xi = \{\xi(\cdot) \in Y : |\xi(t) - \bar{\xi}(t)| \leq \omega_3(t), \text{ п.в. } t \in T\}, \quad (1.6)$$

где  $\bar{\xi}, \omega_3 \in Y$  — известные функции.

Задача гарантированного оценивания состояния в конечный момент времени  $\vartheta$  заключается [2, 3] в нахождении *информационной области*  $\mathcal{U} = \mathcal{U}(\vartheta; y(\cdot))$  — множества всех состояний  $u(\cdot, \vartheta)$  системы (1.1), совместимых с данными наблюдений  $y(\cdot)$  из (1.3) и с ограничениями (1.2), (1.6).

Настоящая работа посвящена приближенному построению введенных множеств и нахождению внешних оценок для них.

## 2. Обозначения и вспомогательные результаты

Известно [8], что обобщенное решение задачи (1.1) представимо в виде ряда Фурье

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left( (u_0, \omega_k) e^{-\lambda_k t} + \int_0^t (c f(\cdot, \tau), \omega_k(\cdot)) e^{-\lambda_k(t-\tau)} d\tau \right) \omega_k(x),$$

$$\lambda_k = (a\pi k l^{-1})^2, \quad \omega_k(x) = (2/l)^{1/2} \sin(\pi k l^{-1} x)$$

и его можно считать непрерывной функцией  $x$  и  $t$  в области  $\bar{D} \times (0, \vartheta]$ . Поэтому идеальный сигнал  $z(t) = G(t)u(\cdot, t)$  определен при п.в.  $t \in T$ . Несложно убедиться, что при наших предположениях  $z(\cdot) \in Y = L_{\infty}(T)$  и

$$\|z\|_Y \leq C (\|u_0\| + \|c f\|_{L_2(Q)}). \quad (2.1)$$

Здесь и ниже символами  $(u, v)$  и  $\|u\|$  обозначаются для краткости скалярное произведение и норма в пространстве  $L_2(D)$ . Известно также [8, с. 163], что при любом  $t \in (0, \vartheta]$

$$\max_{0 \leq \tau \leq t} \|u(\cdot, \tau)\| + \|u\|_{W_2^{1,0}(Q)} \leq C (\|u_0\| + \|c f\|_{L_2(Q)}). \quad (2.2)$$

При применении дифференциально-разностной аппроксимации (метод прямых) [9] на множестве  $D$  вводится сетка — множество точек (узлов)  $x^{mi} = i h_m$ ,  $i = 0, \dots, m+1$ ;  $h_m = l(m+1)^{-1}$ ,  $m = 1, 2, \dots$ . Внутренние узлы  $x^{mi}$  ( $i = 1, \dots, m$ ) образуют сетку  $D_h$ . При кусочно-разностной аппроксимации (метод сеток) [10] на множестве  $T$  также вводится сетка  $t^{nj} = j \tau_n$ ,  $j = 0, \dots, n$ ;  $\tau_n = \vartheta n^{-1}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Через  $d_{ih}$  и  $\theta_{j\tau}$  обозначим элементарные ячейки:  $d_{ih} = (x^{mi}, x^{m(i+1)})$ ,  $\theta_{j\tau} = (t^{n(j-1)}, t^{nj}]$ . Функции, определенные на сетке, называются сеточными. Введем пространство  $V^m$ , образованное сеточными функциями  $w^m = (w_1^m, \dots, w_m^m)^{\top}$  ( $\top$  — знак транспонирования), заданными на  $D_h$ , со скалярным произведением  $(u^m, v^m)_m = h_m \sum_{i=1}^m u_i^m v_i^m$  и нормой  $\|u^m\|_m = ((u^m, u^m)_m)^{1/2}$ .

Начально-краевая задача (1.1) и уравнение наблюдений (1.3) заменяются последовательностями конечномерных систем

$$\dot{u}^m(t) = B^m u^m(t) + c F^m(t), \quad t \in (0, \vartheta]; \quad u^m(0) = u_0^m; \quad u^m, F^m \in \mathbb{R}^m; \quad (2.3)$$

$$y^m(t) = G^m(t) u^m(t) + \xi^m(t), \quad t \in T; \quad y^m \in \mathbb{R}^1, \quad (2.4)$$

или соответственно

$$u^{\Delta}[j] = B^{\Delta} u^{\Delta}[j-1] + \tau_n B^{\Delta} c F^{\Delta}[j], \quad j = 1, \dots, n; \quad u^{\Delta}[0] = u_0^m; \quad u^{\Delta}, F^{\Delta} \in \mathbb{R}^m; \quad (2.5)$$

$$y^{\Delta}[j] = G^{\Delta}[j] u^{\Delta}[j] + \xi^{\Delta}[j], \quad j = p_n + 1, \dots, n; \quad p_n = [\delta \tau_n^{-1}] + 1; \quad y^{\Delta} \in \mathbb{R}^1. \quad (2.6)$$

Здесь  $[z]$  означает целую часть числа  $z$ ; символом  $\Delta$  обозначена пара индексов  $\Delta = (m, n)$ ;  $B^m = a^2 A^m$ ,  $B^{\Delta} = (E^m - a^2 \tau_n A^m)^{-1}$ ,  $A^m$  — трехдиагональные  $m \times m$ -матрицы, на главных диагоналях которых стоят элементы вида  $-2h_m^{-2}$ , а на прилежащих — вида  $h_m^{-2}$ ;  $E^m$  — единичные  $m \times m$ -матрицы.

Решения систем (2.3), (2.5) представимы в виде конечных рядов Фурье [9, с. 570; 10, с. 283]

$$u^m(t) = \sum_{s=1}^m \left\{ (u_0^m, \Omega^{ms})_m e^{-\Lambda^{ms} t} + \int_0^t (c F^m(\tau), \Omega^{ms})_m e^{-\Lambda^{ms}(t-\tau)} d\tau \right\} \Omega^{ms}, \quad t > 0,$$

$$u^{\Delta}[j] = \sum_{s=1}^m \left\{ (u_0^m, \Omega^{ms})_m (\mu_s^{\Delta})^j + \tau_n \sum_{l=0}^{j-1} (c F^{\Delta}[l+1], \Omega^{ms})_m (\mu_s^{\Delta})^{j-l} \right\} \Omega^{ms}, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$\Lambda^{ms} = a^2 \Lambda_s^m, \quad \mu_s^{\Delta} = (1 + \tau_n \Lambda^{ms})^{-1}, \quad \Lambda_s^m = 4h_m^{-2} \sin^2(0.5\pi x^{ms} l^{-1}), \quad \Omega_i^{ms} = (2/l)^{1/2} \sin(\pi s x^{mi} l^{-1}),$$

где  $\{\Omega^{ms}\}_{s=1}^m$  — система собственных векторов матрицы  $A^m$ , образующая в  $V^m$  ортонормированный базис:  $(\Omega^{ms}, \Omega^{mj})_m = \delta_{sj}$  ( $s, j = 1, \dots, m$ ), а  $-\Lambda_s^m$ ,  $-\Lambda^{ms}$  и  $\mu_s^\Delta$  — соответствующие им собственные числа матриц  $A^m$ ,  $B^m$  и  $B^\Delta$ .

Переход от функций непрерывного пространственного аргумента к сеточным функциям и обратно формализуют следующие операторы. Оператор  $\mathcal{L}^m$  отображает функцию  $w(\cdot) \in L_2(D)$  в вектор  $w^m \in V^m$  по правилу  $\mathcal{L}^m w(\cdot) = w^m$ , где  $w_i^m = h_m^{-1} \int_{d_{ih}} w(x) dx$  ( $i = 1, \dots, m$ ), а оператор  $\mathcal{R}^m$  ставит в соответствие вектору  $w^m \in V^m$  кусочно-постоянную функцию  $w(\cdot) \in L_2(D)$ :  $\mathcal{R}^m w^m = w(\cdot)$ , где  $w(x) = w_i^m$  при  $x \in d_{ih}$  ( $i = 1, \dots, m$ ) и  $w(x) = w_1^m$  при  $x \in d_{0h}$ . Несложно проверить, что введенные операторы обладают следующими свойствами [11]. Если  $w^m = \mathcal{L}^m w(\cdot)$ , то  $\sum_{k=1}^m (w^m, \Omega^{mk})_m^2 = \|w^m\|_m^2 \leq \|w\|^2$ ,  $|(w, \omega_k) - (w^m, \Omega^{km})_m| \leq C \|w\| k h_m$  ( $k = 1, \dots, m$ ), а если  $w^h = \mathcal{R}^m w^m$ , то  $\|w^h\| \leq 2 \|w^m\|_m$ ,  $|(w^h, \omega_k) - (w^m, \Omega^{km})_m| \leq C \|w^m\|_m k h_m$ .

Оператор  $\mathcal{M}_{\delta\vartheta}^n$  ( $0 \leq \delta \leq \vartheta$ ) отображает  $v(t)$ ,  $t \in [\delta, \vartheta]$ , в сеточную функцию  $v^n[j]$ ,  $j = p_n, \dots, n$ :  $\mathcal{M}_{\delta\vartheta}^n v(\cdot) = v^n[\cdot]$ , где  $v^n[j] = \tau_n^{-1} \int_{\theta_{j\tau} \cap [\delta, \vartheta]} v(t) dt$ ,  $j = p_n, \dots, n$ ,  $p_n = [\delta \tau_n^{-1}] + 1$ , а оператор  $\mathcal{S}_{\delta\vartheta}^n$ , наоборот, отображает функцию  $v^n[j]$  ( $j = p_n, \dots, n$ ) дискретного аргумента  $j$  в кусочно-постоянную функцию  $v(t)$ ,  $t \in [\delta, \vartheta]$ :  $\mathcal{S}_{\delta\vartheta}^n v^n[\cdot] = v(\cdot)$ , где  $v(t) = v^n[j]$  при  $t \in \theta_{j\tau} \cap [\delta, \vartheta]$  ( $j = p_n, \dots, n$ ).

В уравнениях (2.4), (2.6), аппроксимирующих уравнение (1.3), полагаем, что

$$y^m(t) \equiv y(t), \quad t \in T; \quad y^\Delta[\cdot] = \mathcal{M}_{\delta\vartheta}^n y(\cdot),$$

где  $y(\cdot)$  — именно тот сигнал, который реализовался в (1.3). Вектор-строчные функции  $G^m(t)$  ( $t \in T$ ) и  $G^\Delta[j]$  ( $j = p_n, \dots, n$ ) для точечных наблюдений имеют вид

$$\begin{aligned} G_k^m(t) &= 1, \quad k = k^m(t) = [X(t) h_m^{-1}], \quad G_i^m(t) = 0, \quad 1 \leq i \leq m, \quad i \neq k^m(t), \\ G_k^\Delta[j] &= 1, \quad k = k^\Delta[j] = [X(t^{nj}) h_m^{-1}], \quad G_i^\Delta[j] = 0, \quad 1 \leq i \leq m, \quad i \neq k^\Delta[j], \end{aligned}$$

причем, если получилось  $G^m(t) = 0$  или  $G^\Delta[j] = 0$ , то эту нуль-строку заменяем на  $(1, 0, \dots, 0)$ . Для пространственно-усредненных наблюдений

$$G^m(t)^\top = h_m \mathcal{L}^m g(\cdot, t); \quad (G^\Delta)^\top[\cdot] = \mathcal{M}_{\delta\vartheta}^n (h_m \mathcal{L}^m g(\cdot, \cdot)).$$

Естественно считать, что начальные условия и правые части в системах (2.3), (2.5) стеснены геометрическими ограничениями в виде параллелепипедов

$$u_0^m \in U_0^m = \mathcal{P}(p^m[0], E^m, \pi^m[0]), \quad p^m[0] = \mathcal{L}^m \bar{u}_0, \quad \pi^m[0] = \mathcal{L}^m \omega_1, \quad (2.7)$$

$$F^m(t) \in \mathcal{W}^m(t) = \mathcal{P}(r^m(t), E^m, \rho^m(t)), \quad r^m(t) = \mathcal{L}^m \bar{f}(\cdot, t), \quad \rho^m(t) = \mathcal{L}^m \omega_2(\cdot, t), \quad (2.8)$$

$$F^\Delta[j] \in \mathcal{W}^\Delta[j] = \mathcal{P}(r^\Delta[j], E^m, \rho^\Delta[j]), \quad r^\Delta = \mathcal{M}_{0\vartheta}^n \mathcal{L}^m \bar{f}, \quad \rho^\Delta = \mathcal{M}_{0\vartheta}^n \mathcal{L}^m \omega_2, \quad (2.9)$$

а помехи в уравнениях измерений (2.4), (2.6) — ограничениями

$$|\xi^m(t) - \bar{\xi}^m(t)| \leq \sigma^m(t), \quad t \in T, \quad \bar{\xi}^m(t) \equiv \bar{\xi}(t), \quad \sigma^m(t) = \omega_3(t) + \delta_m, \quad (2.10)$$

$$|\xi^\Delta[j] - \bar{\xi}^\Delta[j]| \leq \sigma^\Delta[j], \quad j = p_n, \dots, n, \quad \bar{\xi}^\Delta = \mathcal{M}_{\delta\vartheta}^n \bar{\xi}, \quad \sigma^\Delta = \mathcal{M}_{\delta\vartheta}^n \omega_3 + \delta_\Delta. \quad (2.11)$$

Добавки  $\delta_m$  и  $\delta_\Delta$  будут конкретизированы ниже.

Параллелепипедом  $\mathcal{P}(p, P, \pi)$  в  $\mathbb{R}^m$  мы называем множество

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}(p, P, \pi) = \{x : x = p + \sum_{i=1}^m p^i \pi_i \xi_i, \quad |\xi_i| \leq 1, \quad i = 1, \dots, m\}.$$

Здесь  $p \in \mathbb{R}^m$ ;  $P = \{p^i\}$  — неособая  $m \times m$ -матрица со столбцами  $p^i$  единичной длины;  $\pi \in \mathbb{R}^m$ ,  $\pi_i \geq 0$ . Можно сказать, что  $p$  задает центр параллелепипеда,  $p^i$  — “направления”, а  $\pi_i$  — величины его “полуосей”.

Обозначим через  $U_a^m(\vartheta)$  и  $U_a^\Delta[n]$  соответственно области достижимости систем (2.3), (2.7), (2.8) и (2.5), (2.7), (2.9), а через  $U^m(\vartheta; y^m(\cdot))$  и  $U^\Delta[n; y^\Delta[\cdot]]$  — соответственно информационные области тех же систем, дополненных соотношениями (2.4), (2.10) и (2.6), (2.11) (определения этих множеств аналогичны приведенным ранее). Для аппроксимации  $\mathcal{U}_a$  и  $\mathcal{U}$  используем кусочно-постоянные восполнения введенных множеств

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_a^m &= U_a^m(\vartheta) = \mathcal{R}^m U_a^m(\vartheta), & \mathcal{U}_a^\Delta &= U_a^\Delta(\vartheta) = \mathcal{R}^m U_a^\Delta[n], \\ \mathcal{U}^m &= U^m(\vartheta; y(\cdot)) = \mathcal{R}^m U^m(\vartheta; y^m(\cdot)), & \mathcal{U}^\Delta &= U^\Delta(\vartheta; y(\cdot)) = \mathcal{R}^m U^\Delta[n; y^\Delta[\cdot]]. \end{aligned}$$

Аргументы  $\vartheta$ ,  $y(\cdot)$ ,  $y^m(\cdot)$ ,  $n$ ,  $y^\Delta[\cdot]$  будем далее для краткости опускать.

Заметим также, что множества  $U^m$  и  $U^\Delta$  можно рассматривать как области достижимости аппроксимирующих систем (2.3), (2.7), (2.8) и (2.5), (2.7), (2.9) при соответствующих фазовых ограничениях в виде гиперполос

$$u^m(t) \in \Sigma^m(t) = \Sigma(c^m(t), G^m(t), \sigma^m(t)), \quad c^m(t) = y(t) - \bar{\xi}(t), \quad (2.12)$$

$$u^\Delta[j] \in \Sigma^\Delta[j] = \Sigma(c^\Delta[j], G^\Delta[j], \sigma^\Delta[j]), \quad c^\Delta[\cdot] = \mathcal{M}_{\delta\vartheta}^n(y(\cdot) - \bar{\xi}(\cdot)). \quad (2.13)$$

*Гиперполосой*  $\Sigma = \Sigma(c, s, \sigma)$  в  $\mathbb{R}^m$  мы называем множество  $\Sigma = \{x : |sx - c| \leq \sigma\}$ . Здесь  $c$  и  $\sigma > 0$  — числа,  $m$ -строки  $\pm s$  определяют внешние нормали к гиперплоскостям, задающим гиперполосу.

### 3. Аппроксимации множеств достижимости и информационных областей

Утверждения о сходимости сформулируем в терминах *хаусдорфова полурасстояния*  $h_+$  в  $L_2(D)$ :  $h_+(\mathcal{U}^1, \mathcal{U}^2) = \min\{\gamma \geq 0 : \mathcal{U}^1 \subseteq \mathcal{U}^2 + \gamma S\}$  ( $S$  — единичный шар в  $L_2(D)$ ).

**Предположение 3.1.** При использовании конечно-разностных аппроксимаций считаем функции  $X(t)$ ,  $g(x, t)$  кусочно-гладкими по  $t$ .

**Теорема 3.1.** *При сделанных предположениях найдутся такие константы  $C$ , что при выборе добавок  $\delta_m$  и  $\delta_\Delta$  в (2.10), (2.11) в виде*

$$\delta_m = C(h_m + c h_m^\lambda), \quad \delta_\Delta = C(h_m + \tau_n + c(h_m^\lambda + \tau_n^\lambda)), \quad (3.1)$$

где  $\lambda = 1/4$  в случае точечных наблюдений и  $\lambda = 1/2$  в случае пространственно-усредненных, информационные области  $U^m$  и  $U^\Delta$  в аппроксимирующих задачах непусты. При этом имеют место оценки

$$h_+(\mathcal{U}_a, \mathcal{U}_a^m) \leq \varepsilon_m, \quad h_+(\mathcal{U}, \mathcal{U}^m) \leq \varepsilon_m, \quad h_+(\mathcal{U}_a, \mathcal{U}_a^\Delta) \leq \varepsilon_\Delta, \quad h_+(\mathcal{U}, \mathcal{U}^\Delta) \leq \varepsilon_\Delta, \quad (3.2)$$

где  $\varepsilon_m = C(h_m + c h_m^{1/2})$ ,  $\varepsilon_\Delta = C(h_m + \tau_n + c(h_m^{1/2} + \tau_n^{1/2}))$ .

Значения упомянутых констант  $C$  не выписываем во избежание громоздкости. Для доказательства нам потребуется

**Лемма 3.1.** Пусть  $u(x, t)$ ,  $u^m(t)$  и  $u^\Delta[j]$  — соответственно решения систем (1.1), (2.3) и (2.5), в которых входные данные связаны соотношениями

$$u_0^m = \mathcal{L}^m u_0(\cdot), \quad c F^m(t) = \mathcal{L}^m(c f(\cdot, t)), \quad \text{при п.в. } t \in [0, \vartheta], \quad c F^\Delta = \mathcal{M}_{0\vartheta}^n \mathcal{L}^m(c f). \quad (3.3)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \|u(\cdot, \vartheta) - \mathcal{R}^m u^m(\vartheta)\| &\leq C (h_m \|u_0\| + h_m^{1/2} \|c f\|_{L_2(Q)}); \\ \|G(t) u(\cdot, t) - G^m(t) u^m(t)\|_Y &\leq C (h_m \|u_0\| + h_m^\lambda \|c f\|_{L_2(Q)}); \\ \|u(\cdot, \vartheta) - \mathcal{R}^m u^\Delta[n]\| &\leq C ((h_m + \tau_n) \|u_0\| + (h_m^{1/2} + \tau_n^{1/2}) \|c f\|_{L_2(Q)}); \\ |\mathcal{M}_{\delta\vartheta}^n(G u)[j] - G^\Delta[j] u^\Delta[j]| &\leq C ((h_m + \tau_n) \|u_0\| + (h_m^\lambda + \tau_n^\lambda) \|c f\|_{L_2(Q)}), \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Доказательство основано на представлении решений указанных систем в виде бесконечного и конечных рядов Фурье и проводится путем добавления и вычитания перекрестных членов и прямых оценок с использованием соотношений из раздела 2 (см. [11]).

**Доказательство теоремы 3.1.** Докажем, к примеру, четвертое из неравенств (3.2). Любой функции  $u_* \in \mathcal{U}$  отвечает некоторая тройка  $\{u_0, c f, \xi\}$  (возможно, не единственная), удовлетворяющая (1.2), (1.6), такая, что для соответствующего решения  $u(x, t)$  системы (1.1)

$$u(\cdot, \vartheta) = u_*(\cdot), \quad y(t) = G(t) u(\cdot, t) + \xi(t). \quad (3.4)$$

Построим соответствующие в силу (3.3) значения  $u_0^m$  и  $c F^\Delta[\cdot]$  и рассмотрим отвечающее им решение  $u^\Delta[\cdot]$  системы (2.5). Значения  $u_0^m$  и  $c F^\Delta[\cdot]$  удовлетворяют включениям (2.7), (2.9), так как, например,  $|F^\Delta[j] - r^\Delta[j]| \leq \mathcal{M}_{0\vartheta}^n \mathcal{L}^m(|f - \bar{f}|) \leq \mathcal{M}_{0\vartheta}^n \mathcal{L}^m \omega_2 = \rho^\Delta[j]$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Далее имеем (2.6), где  $\xi^\Delta = \mathcal{M}_{\delta\vartheta}^n(G u) - G^\Delta u^\Delta + \mathcal{M}_{\delta\vartheta}^n \xi$ , причем в силу последней оценки из леммы 3.1 выполнено ограничение (2.11):  $|\xi^\Delta[j] - \bar{\xi}^\Delta[j]| \leq \delta_\Delta + \mathcal{M}_{\delta\vartheta}^n(|\xi - \bar{\xi}|) \leq \sigma^\Delta[j]$ ,  $j = p_n, \dots, n$ . Таким образом,  $u^\Delta[n] \in U^\Delta$ . Соотношение  $\|u(\cdot, \vartheta) - \mathcal{R}^m u^\Delta[n]\| \leq \varepsilon_\Delta$ , имеющее место также в силу леммы 3.1, означает, что  $h_+(\mathcal{U}, \mathcal{U}^\Delta) \leq \varepsilon_\Delta$ . ■

При сформулированных ниже дополнительных условиях можно гарантировать сходимость аппроксимирующих множеств к исходным в хаусдорфовой метрике.

**Предположение 3.2.** Функции  $\bar{u}_0$ ,  $\omega_1$ ,  $\bar{f}$ ,  $\omega_2$  — кусочно-гладкие. При конечно-разностных аппроксимациях кусочно-гладкими считаем также функции  $\bar{\xi}$ ,  $\omega_3$  и  $y$ .

**Предположение 3.3.** Имеет место следующая сходимость

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} h_+(\mathcal{U}^{(\alpha)}, \mathcal{U}) = 0. \quad (3.5)$$

Здесь  $\mathcal{U}^{(\alpha)} = \mathcal{U}^{(\alpha)}(\vartheta; y(\cdot))$  — информационная область в задаче гарантированного оценивания  $u(\cdot, \vartheta)$  в системе (1.1), (1.3) при ограничениях (1.2) и

$$\xi(\cdot) \in \Xi^{(\alpha)} = \{\xi(\cdot) \in Y : |\xi(t) - \bar{\xi}(t)| \leq \omega_3(t) + \alpha, \text{ п.в. } t \in T\}, \quad \text{где } \alpha \geq 0. \quad (3.6)$$

Поскольку  $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{U}^{(\alpha)}$ , то  $h_+(\mathcal{U}, \mathcal{U}^{(\alpha)}) = 0$  и соотношение (3.5) означает сходимость  $\mathcal{U}^{(\alpha)}$  к  $\mathcal{U}$  в метрике Хаусдорфа. Сформулируем некоторые условия, обеспечивающие (3.5).

**Замечание 3.1.** Предположим, что

$$c = 0, \quad u_0(\cdot) \in L_2(D), \quad (3.7)$$

$$\xi(t) \equiv 0, \quad t \in T \quad (3.8)$$

и система (1.1), (1.3), (3.7), (3.8) или, короче, система (1.1), (3.9)

$$z(t) = G(t)u(\cdot, t), \quad t \in T, \quad (c = 0) \quad (3.9)$$

непрерывно наблюдаема в конечный момент времени  $\vartheta$  [12], т. е. существует такая константа  $K > 0$ , что для любого решения  $u(x, t)$  задачи (1.1) справедливо неравенство  $\|u(\cdot, \vartheta)\| \leq K \|z\|_Y$ , где  $Y = L_\infty(T)$ . Иначе говоря,  $\|C^{-1}z\| \leq K \|z\|_Y$ , где  $C$  — оператор, ставящий в соответствие функции  $u(\cdot, \vartheta)$  сигнал  $z(\cdot)$ . В этом случае  $h_+(\mathcal{U}^{(\alpha)}, \mathcal{U}) \leq K\alpha$ .

Действительно, если  $u_* \in \mathcal{U}^{(\alpha)}$ , то найдутся  $u_0 \in L_2(D)$  и  $\xi \in \Xi^{(\alpha)}$  такие, что для соответствующего решения  $u$  системы (1.1) имеем (3.4). Тогда для расстояния (в  $L_2(D)$ ) между  $u_*$  и  $\mathcal{U}$  справедливы соотношения  $\rho(u_*, \mathcal{U}) = \inf_{u \in \mathcal{U}} \|u_* - u\| = \inf_{\zeta \in \Xi} \|C^{-1}(y - \xi) - C^{-1}(y - \zeta)\| \leq K \inf_{\zeta \in \Xi} \|\xi - \zeta\|_Y \leq K\alpha$  и, значит, выполнено приведенное неравенство.

**Замечание 3.2.** Известно (см., например, [13]), что непрерывная наблюдаемость эквивалентна сильной наблюдаемости системы (1.1), (1.3), (3.7), состоящей [3] в том, что множество  $\mathcal{U}(\vartheta; y(\cdot))$  в задаче оценивания (1.1), (3.7), (1.3) с условием  $\|\xi\|_Y \leq 1$  ограничено в  $L_2(D)$  при любом наблюдаемом сигнале  $y(\cdot)$ . Операторы  $G(\cdot)$ , обеспечивающие непрерывную (сильную) наблюдаемость, существуют. Например, в случае точечных наблюдений достаточно рассмотреть стационарные, когда  $X(t) \equiv X$ , где  $X l^{-1}$  является алгебраическим иррациональным числом какой-либо степени  $\geq 2$ , либо взять в качестве траектории наблюдения непрерывную функцию  $X(t)$ , область значений которой совпадает с  $D$  [3].

**Замечание 3.3.** Пусть  $\omega_3(t)$  такова, что  $\min_{t \in T} \omega_3(t) = \omega_3^* > 0$ , и сигнал  $y(\cdot)$  — регулярный [3], т. е. найдутся число  $\beta$ ,  $\omega_3^* > \beta > 0$ , и хотя бы одна тройка функций  $\{\hat{u}_0, c\hat{f}, \hat{\xi}\}$ , порождающих этот сигнал в силу (1.1)–(1.3), такая, что  $|\hat{\xi}(t) - \bar{\xi}(t)| \leq \omega_3(t) - \beta$ , п.в.  $t \in T$ . Тогда

$$h_+(\mathcal{U}^{(\alpha)}, \mathcal{U}) \leq C(\|\bar{u}_0\| + \|\omega_1\| + \|c\bar{f}\|_{L_2(Q)} + \|c\omega_2\|_{L_2(Q)})\alpha(\alpha + \beta)^{-1}. \quad (3.10)$$

Действительно, если  $u_* \in \mathcal{U}^{(\alpha)}$ , то найдутся  $u_0 \in \mathcal{U}_0$ ,  $f \in \mathcal{F}$  и  $\xi \in \Xi^{(\alpha)}$ , дающие (3.4). Функции  $u_0^\lambda = \lambda\hat{u}_0 + (1-\lambda)u_0 \in \mathcal{U}_0$ ,  $f^\lambda = \lambda\hat{f} + (1-\lambda)f \in \mathcal{F}$  порождают решение  $u^\lambda$  задачи (1.1), для которого  $G(t)u^\lambda(\cdot, t) = y(t) - \xi^\lambda(t)$ ,  $\xi^\lambda = \lambda\hat{\xi} + (1-\lambda)\xi$ , причем  $|\xi^\lambda(t) - \bar{\xi}(t)| \leq \lambda|\hat{\xi}(t) - \bar{\xi}(t)| + (1-\lambda)|\xi(t) - \bar{\xi}(t)| \leq \omega_3(t) - \lambda\beta + (1-\lambda)\alpha$ . Полагая  $\lambda = \alpha/(\beta + \alpha)$ , получаем  $\xi^\lambda \in \Xi$  и, значит,  $u^\lambda(\cdot, \vartheta) \in \mathcal{U}$ . Но  $\|u_0 - u_0^\lambda\| = \lambda\|\hat{u}_0 - u_0\| \leq \lambda C(\|\bar{u}_0\| + \|\omega_1\|)$  и аналогично для  $\|f - f^\lambda\|_{L_2(Q)}$ . Теперь из (2.2) следует оценка сверху для  $\|u(\cdot, \vartheta) - u^\lambda(\cdot, \vartheta)\|$ , обеспечивающая (3.10).

**Теорема 3.2.** Пусть выполнены все условия, сформулированные в разделе 1, предположения 3.1 и 3.2, а  $\mathcal{U}_a^m$ ,  $\mathcal{U}^m$ ,  $\mathcal{U}_a^\Delta$ ,  $\mathcal{U}^\Delta$  — множества, фигурирующие в теореме 3.1. Тогда

$$\begin{aligned} h_+(\mathcal{U}_a^m, \mathcal{U}_a) &\leq \varepsilon_m, & h_+(\mathcal{U}^m, \mathcal{U}) &\leq \varepsilon_m + h_+(\mathcal{U}^{(\delta_m)}, \mathcal{U}), \\ h_+(\mathcal{U}_a^\Delta, \mathcal{U}_a) &\leq \varepsilon_\Delta, & h_+(\mathcal{U}^\Delta, \mathcal{U}) &\leq \varepsilon_\Delta + h_+(\mathcal{U}^{(\delta_\Delta)}, \mathcal{U}), \end{aligned} \quad (3.11)$$

где  $\delta_m$ ,  $\delta_\Delta$ ,  $\varepsilon_m$  и  $\varepsilon_\Delta$  имеют такую же форму, как в теореме 3.1.

Для доказательства нам потребуются две леммы. Доказательство первой аналогично доказательству леммы 3.1, вторая проверяется с помощью формулы Ньютона — Лейбница.

**Лемма 3.2.** Пусть  $u^m(t)$  и  $u^\Delta[j]$  — решения систем (2.3) и (2.5), а  $u^h(x, t)$  и  $u^{h\tau}(x, t)$  — решения системы (1.1), в которой входные данные равны соответственно

$$\begin{aligned} u_0^h &= \mathcal{R}^m u_0^m, & c f^h(\cdot, t) &= \mathcal{R}^m(c F^m(t)) \text{ при п.в. } t \in [0, \vartheta], \\ u_0^h &= \mathcal{R}^m u_0^m, & c f^{h\tau}(\cdot, \cdot) &= \mathcal{S}_{0\vartheta}^n \mathcal{R}^m(c F^\Delta[\cdot]). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \|u^h(\cdot, \vartheta) - \mathcal{R}^m u^m(\vartheta)\| &\leq C (h_m \|u_0^m\|_m + h_m^{1/2} (\int_0^\vartheta \|c F^m(t)\|_m^2 dt)^{1/2}), \\ \|G(t) u^h(\cdot, t) - G^m(t) u^m(t)\|_Y &\leq C (h_m \|u_0^m\|_m + h_m^\lambda (\int_0^\vartheta \|c F^m(t)\|_m^2 dt)^{1/2}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|u^{h\tau}(\cdot, \vartheta) - \mathcal{R}^m u^\Delta[n]\| &\leq C ((h_m + \tau_n) \|u_0^m\|_m + (h_m^{1/2} + \tau_n^{1/2}) (\tau_n \sum_{j=1}^n \|c F^\Delta[j]\|_m^2)^{1/2}), \\ \|G u^{h\tau} - \mathcal{S}_{\delta\vartheta}^n(G^\Delta u^\Delta)\|_Y &\leq C ((h_m + \tau_n) \|u_0^m\|_m + (h_m^\lambda + \tau_n^\lambda) (\tau_n \sum_{j=1}^n \|c F^\Delta[j]\|_m^2)^{1/2}). \end{aligned}$$

**Лемма 3.3.** Пусть  $u_0^m$ ,  $F^m(\cdot)$ ,  $F^\Delta[\cdot]$ ,  $\xi^m(\cdot)$  и  $\xi^\Delta[\cdot]$  удовлетворяют включениям (2.7) – (2.11), функции  $u_0^h$ ,  $f^h$ ,  $f^{h\tau}$  имеют вид (3.12), а  $\xi^h(t) \equiv \xi^m(t)$ ,  $\xi^{h\tau}(\cdot) = \mathcal{S}_{\delta\vartheta}^n \xi^\Delta[\cdot]$ . Тогда при выполнении предположения 3.2

$$u_0^h \in \mathcal{U}_0^{(\beta_m)}, \quad f^h \in \mathcal{F}^{(\beta_m)}, \quad f^{h\tau} \in \mathcal{F}^{(\beta_\Delta)}, \quad \xi^h \in \Xi^{(\delta_m + \gamma_n)}, \quad \xi^{h\tau} \in \Xi^{(\delta_\Delta + \gamma_n)},$$

где  $\beta_m = Ch_m$ ;  $\beta_\Delta = C(h_m + \tau_n)$ ;  $\gamma_n = C\tau_n$ ;  $\delta_m$  и  $\delta_\Delta$  введены выше;  $\Xi^{(\alpha)}$  определено в (3.6);

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_0^{(\alpha)} &= \{u_0(\cdot) \in L_2(D) : |u_0(x) - \bar{u}_0(x)| \leq \omega_1(x) + \alpha, \text{ н.в. } x \in D\}; \\ \mathcal{F}^{(\alpha)} &= \{f(\cdot, \cdot) \in L_2(Q) : |f(x, t) - \bar{f}(x, t)| \leq \omega_2(x, t) + \alpha, \text{ н.в. } x, t \in Q\}. \end{aligned}$$

**Доказательство теоремы 3.2.** Докажем, например, четвертое из неравенств (3.11). Любой функции  $u_* \in \mathcal{U}^\Delta$  отвечает некоторая тройка  $\{u_0^m, c F^\Delta, \xi^\Delta\}$ , удовлетворяющая (2.7), (2.9), (2.11), такая, что для соответствующего решения  $u^\Delta[\cdot]$  системы (2.5) имеем  $\mathcal{R}^m u^\Delta[n] = u_*(\cdot)$  и (2.6). Построим в силу (3.12) функции  $u_0^h$  и  $c f^{h\tau}$  и рассмотрим соответствующее им решение  $u^{h\tau}$  системы (1.1). По лемме 3.3  $u_0^h \in \mathcal{U}_0^{(\beta_m)}$ ,  $f^{h\tau} \in \mathcal{F}^{(\beta_\Delta)}$ . Далее можно заметить, что  $y(t) = G(\cdot) u^{h\tau}(\cdot, t) + \xi^{h\tau}(t)$ , где  $\xi^{h\tau}(t) = \mathcal{S}_{\delta\vartheta}^n \xi^\Delta + \mathcal{S}_{\delta\vartheta}^n G^\Delta u^\Delta - G u^{h\tau} + y - \mathcal{S}_{\delta\vartheta}^n y^\Delta$ , причем ввиду лемм 3.2, 3.3 и кусочной гладкости  $y(\cdot)$  получаем, что  $\xi^{h\tau} \in \Xi^{(\delta_\Delta + \gamma_n + \delta_\Delta + C\tau_n)} = \Xi^{(\delta_\Delta)}$  (здесь и далее для краткости используется условная запись для добавок, отражающая порядок их малости). Таким образом,  $u^{h\tau}(\cdot, \vartheta) \in \mathcal{U}^{\beta_m, c\beta_\Delta, \delta_\Delta}$ , где символом  $\mathcal{U}^{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3} = \mathcal{U}^{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3}(\vartheta; y(\cdot))$  обозначена информационная область системы (1.1), (1.3) с неопределенностями из  $\mathcal{U}_0^{(\alpha_1)}$ ,  $c\mathcal{F}^{(\alpha_2)}$  и  $\Xi^{(\alpha_3)}$ . Соотношение  $\|u^{h\tau}(\cdot, \vartheta) - u_*(\cdot)\| \leq \varepsilon_\Delta$ , имеющее место ввиду леммы 3.2, означает, что  $h_+(\mathcal{U}^\Delta, \mathcal{U}^{\beta_m, c\beta_\Delta, \delta_\Delta}) \leq \varepsilon_\Delta$ .

Докажем теперь оценку типа  $h_+(\mathcal{U}^{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3}, \mathcal{U}^{0,0,\alpha_3+C_1(\alpha_1+\alpha_2)}) \leq C_2(\alpha_1 + \alpha_2)$ . В самом деле, каждой функции  $u_* \in \mathcal{U}^{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3}$  соответствуют некоторые  $u_0 \in \mathcal{U}_0^{(\alpha_1)}$ ,  $f \in \mathcal{F}^{(\alpha_2)}$ ,  $\xi \in \Xi^{(\alpha_3)}$ , такие, что для соответствующего решения  $u$  имеем (3.4). Построим  $\tilde{u}_0$  по правилу  $\tilde{u}_0(x) = u_0(x)$  при  $|u_0(x) - \bar{u}_0(x)| \leq \omega_1(x)$ ,  $\tilde{u}_0(x) = u_0(x) + \omega_1(x)$  при  $u_0(x) > \bar{u}_0(x) + \omega_1(x)$ ,  $\tilde{u}_0(x) = u_0(x) - \omega_1(x)$  при  $u_0(x) < \bar{u}_0(x) - \omega_1(x)$ . Тогда  $\tilde{u}_0 \in \mathcal{U}_0$  и  $|\tilde{u}_0(x) - u_0(x)| \leq \alpha_1$ . Аналогично построим  $\tilde{f} \in \mathcal{F}$ ,  $|\tilde{f} - f| \leq \alpha_2$ . Неравенства (2.1), (2.2) обеспечивают, что для порождаемого функциями  $\tilde{u}_0$  и  $\tilde{f}$  решения  $\tilde{u}$  имеем  $\|\tilde{u}(\cdot, \vartheta) - u(\cdot, \vartheta)\| \leq C_2(\alpha_1 + \alpha_2)$  и  $|y(t) - G(t)\tilde{u}(\cdot, t) - \tilde{\xi}(t)| \leq \omega_3(t) + \alpha_3 + C_1(\alpha_1 + \alpha_2)$ . Значит,  $\tilde{u}(\cdot, \vartheta) \in \mathcal{U}^{0,0,\alpha_3+C_1(\alpha_1+\alpha_2)}$ , и упомянутая оценка верна.

Используя полученные оценки и неравенство треугольника для  $h_+$ , учитывая вид  $\beta_m$  и  $\beta_\Delta$ , а также вспоминая, что  $\mathcal{U}^{0,0,\delta_\Delta} = \mathcal{U}^{(\delta_\Delta)}$ , получаем четвертое из неравенств (3.11).

## 4. Внешние оценки и численное моделирование

Для нахождения внешних оценок множеств  $\mathcal{U}_a$  и  $\mathcal{U}$  можно использовать параллелепипедозначные оценки решений аппроксимирующих задач. Например, если построены параллелепипеды  $\mathcal{P}^{\Delta+}[j] \supseteq U^\Delta[j]$ ,  $j = 1, \dots, n$ , то  $h_+(\mathcal{U}, \mathcal{R}^m \mathcal{P}^{\Delta+}[n]) \leq \varepsilon_\Delta$  по теореме 3.1.

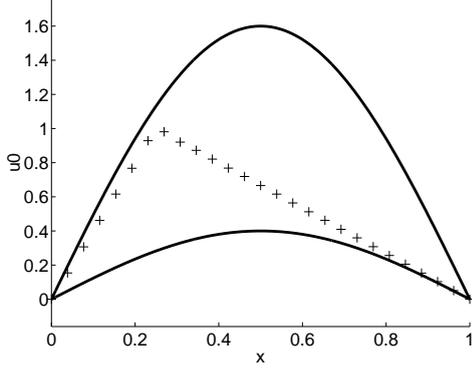


Рис. 1.

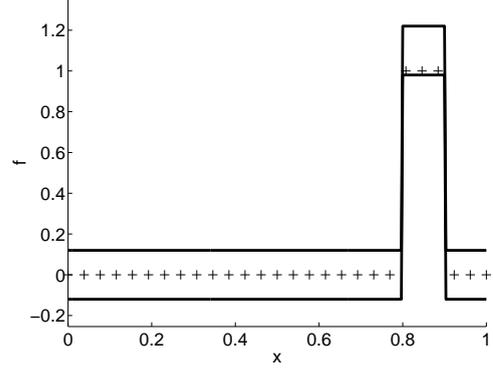


Рис. 2.

**Пример 4.1.** Построим внешние оценки для множества достижимости  $\mathcal{U}_a$  и информационной области  $\mathcal{U}$  системы (1.1)–(1.4), (1.6), в которой  $a = 0.1$ ,  $l = 1$ ,  $c = 1$ ,  $\delta = 0.5$ ,  $\vartheta = 10$ ,  $X(t) = l(|\sin(2\pi(t-\delta)/(\vartheta-\delta))|)^{1/2}$ ,  $\bar{u}_0(x) = \sin(\pi x)$ ,  $\omega_1(x) = 0.6 \sin(\pi x)$ ,  $\bar{f}(x, t) \equiv 1.1$  при  $0.8 \leq x \leq 0.9$  и  $\bar{f}(x, t) \equiv 0$  при остальных значениях  $x \in D$ ,  $\omega_2(x, t) \equiv 0.12$ ,  $\bar{\xi}(t) \equiv 0$ ,  $\omega_3(t) \equiv 0.1$ , сигнал  $y(t)$  порожден решением  $u$  системы (1.1), соответствующим  $u_0$  и  $f$ , где  $u_0(x)$  — это отрезок ряда Фурье (30 первых членов) кусочно-линейной функции  $\tilde{u}_0$ :  $\tilde{u}_0(x) = x/\lambda$  при  $0 \leq x \leq \lambda$ ,  $\tilde{u}_0(x) = (l-x)/(l-\lambda)$  при  $\lambda \leq x \leq l$ ,  $\lambda = 0.25$ , а  $f(x, t) \equiv 1$  при  $0.8 \leq x \leq 0.9$  и  $f(x, t) \equiv 0$  для остальных  $x$ ; помеха  $\xi(t) = 0.1 \cos(\pi t)$ . Полагаем  $n = 5(m+1)$ .

Построим внешние оценки  $\mathcal{P}^{\Delta+}[k] = \mathcal{P}(p^{\Delta+}[k], P^{\Delta+}[k], \pi^{\Delta+}[k])$  для множеств  $U_a^{\Delta}[k]$  и  $U^{\Delta}[k]$  в системах (2.5), (2.7), (2.9) и (2.5), (2.7), (2.9), (2.13). Ниже для краткости индексы  $m$ ,  $n$  и  $\Delta$  в обозначениях опускаем. Оценки  $\mathcal{P}^+[k]$  строим по рекуррентным формулам [5]:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^{a+}[k] &= \mathbf{P}_{P^{1+}[k]}^+(B\mathcal{P}^+[k-1] + \tau B\mathcal{W}[k]), \quad k = 1, \dots, n, \\ \mathcal{P}^+[k] &= \begin{cases} \mathcal{P}^{a+}[k] & \text{при оценивании } U_a[k], \\ \mathbf{P}_{P^{2+}[k]}^+(\mathcal{P}^{a+}[k] \cap \Sigma[k]) & \text{при оценивании } U[k], \end{cases} \\ \mathcal{P}^+[0] &= \mathbf{P}_{P^{1+}[0]}^+(U_0), \end{aligned} \quad (4.1)$$

где символом  $\mathbf{P}_P^+(U)$  обозначена [5] операция построения внешнего для множества  $U$  параллелепипеда, наименьшего по включению среди всех параллелепипедов с матрицей ориентации  $P$ . Варьируя матрицы  $P^{1+}[k]$  и  $P^{2+}[k]$ , получаем семейство внешних оценок.

Выбирая в (4.1) матрицы  $P^{1+}[k]$  и  $P^{2+}[k]$  единичными на каждом  $k$ -м шаге, несложно построить трубки  $\mathcal{P}_I^+[\cdot]$  и  $\mathcal{P}_I^+[\cdot]$ , образованные параллелепипедами с гранями, параллельными координатным плоскостям, как бывает при классических интервальных вычислениях [14, 15]. Вычисление  $\mathcal{P}^+[k]$  на основе  $\mathcal{P}^{a+}[k]$  в (4.1) производится с помощью следующего предложения, которое несложно проверить, пользуясь результатами [16].

**Предложение 4.1.** Пусть  $\mathcal{P} = \mathcal{P}(p, P, \pi)$ ,  $\Sigma = \Sigma(c, s, \sigma)$  и  $\mathcal{P} \cap \Sigma \neq \emptyset$ . Тогда  $\mathbf{P}_P^+(\mathcal{P} \cap \Sigma) = \mathcal{P}(\tilde{p}, P, \tilde{\pi})$ , где

$$\begin{aligned} \tilde{p} &= p + P \text{diag}\{\pi\} \text{diag}\{\nu\} (r^+ - r^-) / 2; \quad \tilde{\pi} = \text{diag}\{(r^+ + r^-) / 2\} \pi; \quad \alpha = \text{Abs}(sP \text{diag}\{\pi\}); \\ r_j^\pm &= \begin{cases} \min\{1, \gamma^\pm / \alpha_j - 1\}, & \text{если } \alpha_j \neq 0, \\ 1 & \text{в противном случае,} \end{cases} \quad j = 1, \dots, m; \quad \gamma^\pm = \sigma \mp sp \pm c + \sum_{i=1}^m \alpha_i, \end{aligned}$$

$\nu_i = 1$ , если  $sp^i \pi_i \geq 0$ , и  $\nu_i = -1$ , если  $sp^i \pi_i < 0$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Пересечение  $\mathcal{P} \cap \Sigma$  непусто тогда и только тогда, когда  $\gamma^+$  и  $\gamma^-$  неотрицательны.

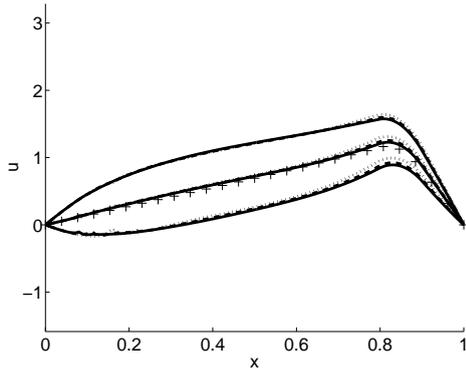


Рис. 3.

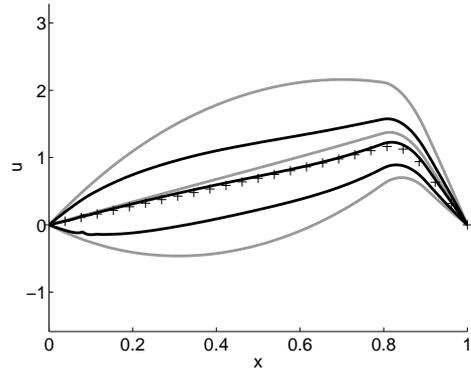


Рис. 4.

Символ  $\text{diag} \{v\}$  (или  $\text{diag} \{v_i\}$ ) означает диагональную матрицу, диагональные элементы которой равны компонентам  $v_i$  вектора  $v$ ; символом  $\text{Abs} C$  обозначена матрица абсолютных величин элементов матрицы  $C$ .

На рис. 1 изображены границы области  $\mathcal{U}_0$  и крестиками — моделируемое начальное условие  $u_0(\cdot)$ , на рис. 2 — границы множества допустимых значений правой части в уравнении (1.1) при каждом  $t$  и крестиками — реализация  $f(\cdot, t)$ . Порождаемое уравнением измерений фазовое ограничение представлено на рис. 7. На рис. 3 показаны моделируемое решение  $u(\cdot, \cdot)$  при  $t = \vartheta$  (крестиками), а также границы и центры внешних оценок для информационной области  $\mathcal{U}(\vartheta; y(\cdot))$ , построенные при  $m = 49$ ,  $m = 99$  и  $m = 199$  (соответственно точечными, штриховыми и сплошными линиями). Для изучения качественной картины добавки  $\delta_\Delta$  в (2.11) были взяты в виде (3.1), где число  $C = 0.15$  подобрано так, чтобы обеспечить непустоту оценок  $\mathcal{P}^+[k]$ . На рис. 4 изображены для сравнения границы и центры внешних оценок для множества достижимости  $\mathcal{U}_a(\vartheta)$  и информационной области  $\mathcal{U}(\vartheta; y(\cdot))$ , полученные при  $m = 199$  (серым и черным цветом соответственно), а также функция  $u(\cdot, \vartheta)$ .

Как известно, при таком выборе матриц ориентации может проявиться нежелательный “эффект упаковки” [17]. В [4] отмечалось, что отказ от постоянства матриц ориентации и их ортогональности может помочь избежать этого эффекта. Следуя [4], рассмотрим сначала оценки для  $U_a[k]$ . Фиксируя  $P^{1+}[0]$  и выбирая матрицы  $P^{1+}[k] = P^+[k]$ ,  $k = 1, \dots, n$ , “в силу системы” конкретизируем формулы (4.1) с учетом (2.7), (2.9):

$$p^+[k] = B(p^+[k-1] + \tau r[k]), \quad k = 1, \dots, n, \quad p^+[0] = p[0];$$

$$P^*[k] = B P^+[k-1], \quad N[k] = \text{diag} \{ \|p^{*i}[k]\| \}, \quad P^+[k] = P^*[k] N[k]^{-1}, \quad k = 1, \dots, n;$$

$$\pi^+[k] = N[k] (\pi^+[k-1] + \tau \text{Abs} (Q[k-1]) \rho[k]), \quad k = 1, \dots, n, \quad \pi^+[0] = \text{Abs} (Q[0]) \pi[0];$$

$$Q[k] = N[k] Q[k-1] B^{-1} = N[k] Q[k-1] (E - a^2 \tau A), \quad k = 1, \dots, n, \quad Q[0] = P^+[0]^{-1}. \quad (4.2)$$

Здесь  $\|p^{*i}[k]\|$  — значения евклидовой нормы столбцов матрицы  $P^*[k]$ ; матрицы  $Q[k]$  — обратные к  $P^+[k]$ . Вычисление произведений типа  $Bv = (E - a^2 \tau A)^{-1}v$  можно проводить экономичным способом (методом прогонки [10]).

Численное моделирование при  $P^+[0] = E$  показало неустойчивость схемы (4.2) (уже при  $m = 9$  наблюдается отклонение элементов  $Q[n]P^+[n] - E$  от нуля порядка 0.1).

Поэтому были рассмотрены оценки, построенные по формулам, вытекающим из (4.2), когда  $P^{1+}[k] \equiv P^+[0]$ , а в качестве столбцов  $P^+[0]$  взяты собственные векторы матрицы

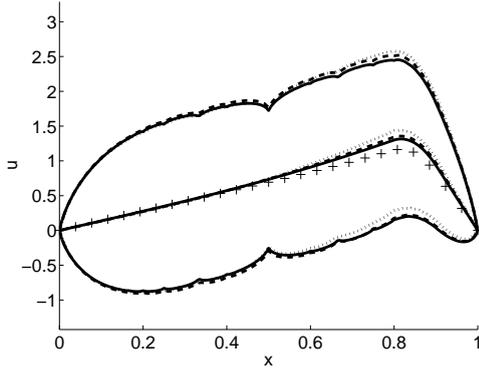


Рис. 5.

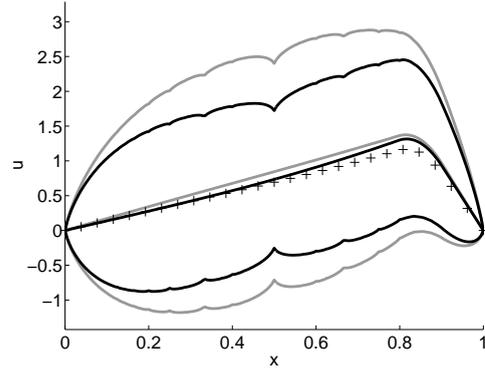


Рис. 6.

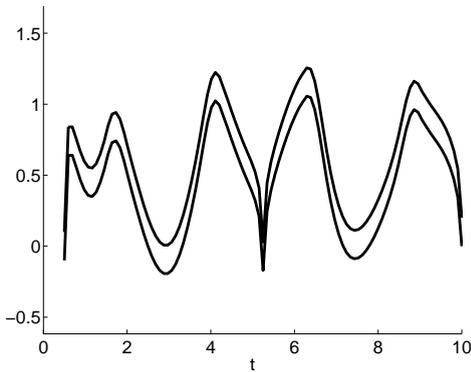


Рис. 7.

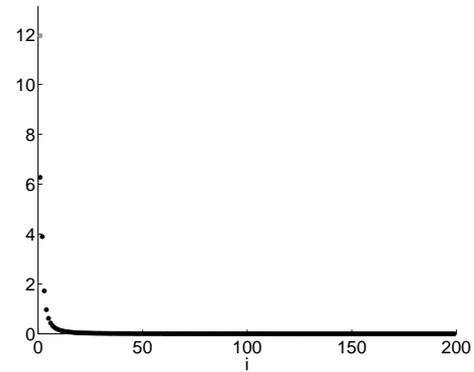


Рис. 8.

$A: P^+[0] = h^{1/2}\{\Omega^1 \dots \Omega^m\}$ . При этом  $P^+[k] \equiv P^+[0]$ ,  $Q[k] \equiv Q[0] = P^+[0]^\top$  и упрощаются формулы для  $\pi^+[k] = \pi^{a+}[k]$ :  $\pi^{a+}[k] = \text{diag}\{\mu_i\}(\pi^+[k-1] + \tau \text{Abs}(Q[k-1])\rho[k])$ ,  $k = 1, \dots, n$ , где  $\mu_i$  — собственные числа матрицы  $B$ . При построении оценок  $\mathcal{P}^+[k]$  для информационных областей  $U[k]$  в соотношениях (4.1) полагается  $P^{2+}[k] \equiv P^{1+}[k] \equiv P^+[0]$ .

Построенные таким образом оценки для рассматриваемого примера иллюстрируют рис. 5 и 6, аналогичные по содержанию рис. 3 и 4. Здесь значения верхней и нижней границ для  $u(x, t)$  в момент  $t = \vartheta$  в узлах сетки  $x^{mi}$  равны значениям опорной функции  $\rho(l\mathcal{P}^+[n]) = \sup\{l^\top u : u \in \mathcal{P}^+[n]\}$  на соответствующих векторах  $l = \pm e^i$ , где  $e^i = (0, \dots, 1, \dots, 0)^\top$  (единица стоит на  $i$ -м месте) —  $i$ -й орт в пространстве  $\mathbb{R}^m$ . Итак, построены простые внешние оценки для  $\mathcal{U}_a$  и  $\mathcal{U}$  и очерчены границы для возможных значений  $u(x, t)$  при  $t = \vartheta$ . Видно, что учет результатов измерений позволил сузить границы возможных значений. К сожалению, оказалось, что в соответствующих параллелепипедах  $\mathcal{P}^{a+}[n]$  и  $\mathcal{P}^+[n]$  величины полуосей  $\pi_i^+[n] < \pi_i^{a+}[n]$  только для  $i = 1$ , а для остальных значений  $i = 2, \dots, m$  имеют место равенства  $\pi_i^+[n] = \pi_i^{a+}[n]$ . По-видимому, это является следствием жесткости системы (2.5) (большой разброс собственных чисел матрицы  $B$  приводит к большому разбросу величин полуосей  $\pi_1^+[n] \gg \pi_2^+[n] \gg \dots \gg \pi_m^+[n]$ , затрудняющему оценивание). Величины полуосей параллелепипедов  $\mathcal{P}^+[n]$  при  $m = 199$  показаны на рис. 8, где  $\pi_1^+[n] \approx 6.27 < \pi_1^{a+}[n] \approx 11.95$ . Хотя области, показанные на рис. 3, кажутся “меньше”, чем на рис. 5, следует иметь в виду, что параллелепипеды  $\mathcal{P}^+[n]$  и  $\mathcal{P}_I^+[n]$  имеют разные матрицы ориентации, а на рисунках показан результат проектирования на орты в  $\mathbb{R}^m$ . В качестве меры для сравнения “величины” [7, с. 101] ортогональных параллелепипедов в  $\mathbb{R}^m$  можно рассмотреть, например, сумму квадратов полуосей  $\mu_1(\mathcal{P}(p, P, \pi)) = \sum_{i=1}^m (\pi_i)^2$  или объем  $\mu_2(\mathcal{P}) = \text{vol}(\mathcal{P})$ . В случае  $m = 199$  получилось, что  $\mu_1(\mathcal{P}_I^+[n]) \approx 32.40 < \mu_1(\mathcal{P}^+[n]) \approx 59.26$ ,

$\mu_2(\mathcal{P}_I^+[n]) \approx 1.69 \cdot 10^{-35} > \mu_2(\mathcal{P}^+[n]) \approx 0$  (машинный нуль), т. е.  $\mathcal{P}_I^+[n]$  “меньше”, чем  $\mathcal{P}^+[n]$ , в смысле критерия  $\mu_1$  ( $\mu_1(\mathcal{P}_I^+[n])/\mu_1(\mathcal{P}^+[n]) \approx 0.55$ ) и значительно “больше” — в смысле критерия  $\mu_2$  ( $\mu_2(\mathcal{P}_I^+[n])/\mu_2(\mathcal{P}^+[n]) \approx 0.29 \cdot 10^{390}$ ). Моделирование проводилось в системе MATLAB 5.

## Список литературы

- [1] КУРЖАНСКИЙ А.Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977.
- [2] КУРЖАНСКИЙ А.Б. Гарантированное оценивание распределенных процессов по результатам наблюдений // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. мат. и кибернетика. 1995. №1. С. 33–40.
- [3] KURZHANSKI A.B., KNAPALOV A.YU. An observation theory for distributed-parameter systems // J. Math. Sys., Estim. & Control. 1991. Vol. 1, No. 4. P. 389–440.
- [4] КОСТОУСОВА Е.К., КУРЖАНСКИЙ А.Б. Гарантированные оценки точности вычислений в задачах управления и оценивания // Вычисл. технологии. 1997. Т. 2, №1. С. 19–27.
- [5] KOSTOUSOVA E.K. State estimation for dynamic systems via parallelotopes: optimization and parallel computations // Optimization Methods & Software. 1998. Vol. 9, No. 4. P. 269–306.
- [6] ЛОТОВ А.В. О понятии и построении обобщенных множеств достижимости для линейных управляемых систем в частных производных // Докл. АН СССР. 1981. Т. 261, №2. С. 297–300.
- [7] KURZHANSKI A.B., VÁLYI I. Ellipsoidal Calculus for Estimation and Control. Boston: Birkhäuser, 1996.
- [8] ЛАДЫЖЕНСКАЯ О.А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973.
- [9] БЕРЕЗИН И.С., ЖИДКОВ Н.П. Методы вычислений. Т. 2. М.: Физматгиз, 1962.
- [10] САМАРСКИЙ А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1977.
- [11] КОСТОУСОВА Е.К. Приближенные методы решения задач оценивания для систем с распределенными параметрами. Дис. ... канд. физ.-матем. наук. Свердловск, 1991.
- [12] EL JAI A., PRITCHARD A.J. Sensors and actuators in distributed systems // Int. J. Control. 1987. Vol. 46, No. 4. P. 1139–1153.
- [13] СИВЕРГИНА И.Ф. Обратимость и наблюдаемость эволюционных систем // Докл. АН. 1996. Т. 351, №3. С. 304–308.
- [14] АЛЕФЕЛЬД Г., ХЕРЦБЕРГЕР Ю. Введение в интервальные вычисления. М.: Мир, 1987.

- [15] КАЛМЫКОВ С.А., ШОКИН Ю.И., ЮЛДАШЕВ З.Х. Методы интервального анализа. Новосибирск: Наука, 1986.
- [16] VICINO A., ZAPPA G. Sequential approximation of feasible parameter sets for identification with set membership uncertainty // IEEE Trans. Automat. Contr. 1996. Vol. 41, No. 6. P. 774–785.
- [17] GOGVAN A.N., SHOKIN YU.I., VERBITSKII V.I. Simultaneously dissipative operators and the infinitesimal wrapping effect in interval spaces // Вычисл. технологии. 1997. Т. 2, №4. С. 16–48.

*Поступила в редакцию 1 июля 1999 г.*