ОБ ОДНОМ ПРИБЛИЖЕННОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ВОССТАНОВЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТА ДВУМЕРНОГО КВАЗИЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Г. Даирбаева, А. Ж. Акжалова
Казахский государственный национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан
e-mail: ak_asel@yahoo.com, dairbaeva@yahoo.com

The problem on reconstruction of heat-conduction coefficient for two-dimensional quasi-linear heat conduction equation is considered. The method for the reconstruction is suggested, which is based on the construction of minimizing functional. The method gives the opportunity to solve the original problem in three-dimensional case and to bypass the problem of economy of computer memory.

1. Постановка задачи

Рассмотрим двумерное квазилинейное уравнение теплопроводности в области $Q = (0,T) \times \Omega$, $\Omega = (0,1) \times (0,1)$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x,y,u)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k(x,y,u)\frac{\partial u}{\partial y}\right) + f(t,x,y),$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad u|_{x=0} = u|_{x=1} = 0, \quad u|_{y=0} = u|_{y=1} = 0,$$

$$k(x_i,y_i,u(t_i,x_i,y_i)) = k_i, \quad u(t_i,x_i,y_i) = u_i, \quad (t_i,x_i,y_i) \in [0,T]\times\Omega, \quad i = 1, \ldots, N, \qquad (1)$$

где $k(x,y,u) \geq 0$ — коэффициент теплопроводности, k_i, u_i, $i = 1, \ldots, N$ заданы. Необходимо восстановить функцию $k(x,y,u)$.

2. Приведение исходной задачи к системе нелинейных алгебраических уравнений

Предположим, что k, u, $f \in C^\infty(\overline{Q})$ по всем своим аргументам (это предположение делается исключительно для математической строгости дальнейших рассуждений, с позиции же инженерных расчетов ими можно пренебречь). Тогда для них справедливы обычные разложения в “отрезке” рядов Тейлора с оценками остаточных членов. Кроме того, для этих уравнений справедливы теоремы о продолжениях. Таким образом, будем считать, что $k(x,y,u)$, $u(t,x,y)$, $f(t,x,y)$ определены для всех значений своих аргументов и достаточно гладкие. Эти предположения о гладкости обозначим через ПГ.

Лемма 1. *Пусть выполнены ПГ, тогда начально-краевая задача (1) эквивалентна задаче*

$$u_t - k(x,y,u)u_{xx} - k_x(x,y,u)u_x - k_u(x,y,u)u_x^2 - k(x,y,u)u_{yy} - k_y(x,y,u)u_y - k_u(x,y,u)u_y^2 = f,$$

$$u_x|_{t=0} = 0, \quad u|_{x=0} = u|_{x=1} = 0, \quad u_y|_{t=0} = 0, \quad u|_{y=0} = u|_{y=1} = 0. \tag{2}$$

Доказательство. Уравнение (2) получено простым дифференцированием произведения в уравнении (1). Начальные условия в (2) отличаются от аналогичных в (1). Их эквивалентность вытекает из ПГ, ибо для гладких в R^2 функций по x и y соответственно из $u_x|_{t=0} = 0$, $u|_{x=0} = u|_{x=1} = 0$, $u_y|_{t=0} = 0$, $u|_{y=0} = u|_{y=1} = 0$ вытекает $u|_{t=0} = 0$.

В дальнейшем нам будет удобнее работать с задачей (2), чем с задачей (1).

Введем обозначения

$$u_t = u^1_{00}, \quad u_x = u_{10}, \quad u_y = u_{01}, \quad u = u^0_{00},$$

$$k(x,y,u) = k^0_{00}, \quad k_x(x,y,u) = k_{10}, \quad k_y(x,y,u) = k_{01}, \quad k_u(x,y,u) = k^1_{00}. \tag{3}$$

Тогда (2) перепишем в следующем виде:

$$u^1_{00} - k^1_{00}((u_{10})^2 + (u_{01})^2) - k^0_{00}((u_{10})_x + (u_{01})_y) - k_{10}u_{10} - k_{01}u_{01} = f,$$

$$(u^0_{00})_t = u^1_{00}, \quad (u^0_{00})_x = u_{10}, \quad (u^0_{00})_y = u_{01},$$

$$(k^0_{00})_u = k^1_{00}, \quad (k^0_{00})_x = k_{10}, \quad (k^0_{00})_y = k_{01},$$

$$u_{10}|_{t=0} = 0, \quad u^0_{00}|_{x=0} = u^0_{00}|_{x=1} = 0, \quad u^0_{00}|_{y=0} = u^0_{00}|_{y=1} = 0, \quad u_{01}|_{t=0} = 0, \tag{4}$$

где k^0_{00}, k^1_{00}, k_{01}, k_{10} зависят от x, y, u^0_{00}.

Задачи (2) и (4) в силу обозначений (3) эквивалентны. Из решения задачи (2) с помощью обозначений (3) можно перейти к (4), и, обратно, из решения задачи (4) с помощью (3) получаем решение задачи (2). При этом в силу ПГ решение задачи (4) будет также достаточно гладким. Поэтому, пользуясь разложением Тейлора с остаточным членом, в силу краевых и начальных условий получаем, что $u^0_{00} = x(1-x)y(1-y)v^0_{00}$, $u_{10} = tv_{10}$, $u_{01} = tv_{01}$, где $v^0_{00} = v^0_{00}(t,x,y)$, $v_{10} = v_{10}(t,x,y)$, $v_{01} = v_{01}(t,x,y)$ — в силу ПГ достаточно гладкие функции.

Лемма 2. *Положим*

$$u_x = tv_{10}, u_y = tv_{01}, u_t = v^1_{00}, u = x(1-x)y(1-y)v^0_{00},$$

$$\widetilde{k^0_{00}}(x,y,v^0_{00}) = k^0_{00}(x,y,x(1-x)y(1-y)v^0_{00}),$$

$$\widetilde{k_{10}}(x,y,v^0_{00}) = k_{10}(x,y,x(1-x)y(1-y)v^0_{00}),$$

$$\widetilde{k_{01}}(x,y,v^0_{00}) = k_{01}(x,y,x(1-x)y(1-y)v^0_{00}),$$

$$\widetilde{k^1_{00}}(x,y,\eta) = k^1_{00}(x,y,x(1-x)y(1-y)v^0_{00}).$$

Тогда задача (4), а значит, и задача (1) эквивалентны следующей задаче:

$$v^1_{00} - \widetilde{k^1_{00}}t^2((v_{10})^2 + (v_{01})^2) - \widetilde{k^0_{00}}t((v_{10})_x + (v_{01})_y) - t\widetilde{k_{10}}v_{10} - t\widetilde{k_{01}}v_{01} = f,$$
$$x(1-x)y(1-y)(v^0_{00})_t = v^1_{00}, \quad y(1-y)(x(1-x)v^0_{00})_x = tv_{10},$$
$$x(1-x)(y(1-y)v^0_{00})_y = tv_{01},$$
$$\widetilde{k_{10}}(x,y,\eta) = (\widetilde{k^0_{00}}(x,y,\eta))_x - (\widetilde{k^0_{00}}(x,y,\eta))_\eta \frac{\eta(1-2x)}{x(1-x)},$$
$$\widetilde{k_{01}}(x,y,\eta) = (\widetilde{k^0_{00}}(x,y,\eta))_y - (\widetilde{k^0_{00}}(x,y,\eta))_\eta \frac{\eta(1-2y)}{y(1-y)},$$
$$\widetilde{k^1_{00}}(x,y,\eta) = \frac{(\widetilde{k^0_{00}}(x,y,\eta))_\eta}{x(1-x)y(1-y)}, \quad v^0_{00}(t,x,y) = \eta, \tag{5}$$

где t, x, y, η — независимые переменные.

Формулировка задачи (5) не содержит явного указания граничных и начальных условий. Это важное обстоятельство позволит при численных расчетах не на каждом шаге обращаться к граничным условиям. Задача (5) — вырожденная, и без ПГ результат леммы 2 перестает быть верным. В задаче (5) $\widetilde{k^0_{00}}$, $\widetilde{k^1_{00}}$, $\widetilde{k_{01}}$, $\widetilde{k_{10}}$, v^1_{00}, v^0_{00}, v_{01}, v_{10} — неизвестные. Таким образом, неизвестных — восемь, уравнений — также восемь (если η считать независимой переменной). Задача (5) не имеет однозначного решения, так как содержит частные производные первого порядка от неизвестных. Задание неизвестных на некоторых точках также не обеспечивает однозначной разрешимости. Так же обстоит дело и в частном случае, когда $k(x,y,u) = k(x,y)$. Поэтому k_i, u_i выбираем из условия так, чтобы $k(x,y,u)$, $u(t,x,y)$ были близки (в среднеквадратичном смысле) в заданных точках (t_i, x_i, y_i), $i = 1, ..., N$.

3. Построение минимизирующего функционала

Из первоначальной постановки (1) имеем, что в точках (t_i, x_i, y_i) известны значения

$$v_{00}(t_i, x_i, y_i) = \frac{u(t_i, x_i, y_i)}{x_i(1-x_i)y_i(1-y_i)} = v^{(i)}, \quad i = 1, ..., N, \tag{6}$$

а в точках (x_i, y_i, η_i), где $\eta_i = v_{00}(t_i, x_i, y_i)$, известны значения

$$\widetilde{k^0_{00}}(x_i, y_i, \eta_i) = k(x_i, y_i, u(t_i, x_i, y_i)) = \widetilde{k^{(i)}}, \quad i = 1, ..., N. \tag{7}$$

За область изменения аргумента η возьмем интервал $(c - \delta,\ d + \delta)$, где

$$c = \min\left(\frac{u(t_i, x_i, y_i)}{x_i(1-x_i)y_i(1-y_i)}\right), \quad d = \max\left(\frac{u(t_i, x_i, y_i)}{x_i(1-x_i)y_i(1-y_i)}\right), \quad i = 1, ..., N,$$

а $\delta > 0$ — некоторое число, выбираемое интуитивно.

Из (5) имеем

$$v^1_{00} - \widetilde{k^1_{00}}t^2(u^0_{11}v_{10} + u^1_{11}v_{01}) - \widetilde{k^0_{00}}t((v_{10})_x + (v_{01})_y) - t\widetilde{k_{10}}v_{10} - t\widetilde{k_{01}}v_{01} = f,$$
$$u^0_{11} - v_{10} = 0, \quad u^1_{11} - v_{01} = 0, \quad x(1-x)y(1-y)(v^0_{00})_t - v^1_{00} = 0,$$

$$y(1-y)(x(1-x)v^0_{00})_x - tv_{10} = 0, \quad x(1-x)(y(1-y)v^0_{00})_y - tv_{01} = 0,$$
$$(\widetilde{k^0_{00}})_\eta - x(1-x)y(1-y)\widetilde{k^1_{00}} = 0, \quad (\widetilde{k^0_{00}})_x - \eta(1-2x)y(1-y)\widetilde{k^1_{00}} - \widetilde{k_{10}} = 0,$$
$$(\widetilde{k^0_{00}})_y - \eta(1-2y)x(1-x)\widetilde{k^1_{00}} - \widetilde{k_{01}} = 0, \quad v^0_{00}(t,x,y) - \eta = 0. \tag{8}$$

Возьмем малые числа $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$. Число ε_1, хотя и малое, но существенно больше ε_2. Для численного решения системы (8) введем функционал:

$$J(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \alpha, \beta, \widetilde{k_{01}}, \widetilde{k_{10}}, \widetilde{k^0_{00}}, \widetilde{k^1_{00}}, v_{01}, v_{10}, v^0_{00}, v^1_{00}, u^1_{11}, u^0_{11}) =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon_2}\int\limits_0^T\int\limits_0^1\int\limits_0^1\int\limits_c^d \{|v^1_{00} - \widetilde{k^0_{00}}t(v_{10})_x - \widetilde{k^0_{00}}t(v_{01})_y - \widetilde{k_{01}}tv_{01} - \widetilde{k_{10}}tv_{10} - \widetilde{k^1_{00}}t^2v_{10}u^0_{11} - \widetilde{k^1_{00}}t^2v_{01}u^1_{11} - f|^2 +$$
$$+|u^0_{11} - v_{10}|^2 + |u^1_{11} - v_{01}|^2 + |x(1-x)y(1-y)(v^0_{00})_t - v^1_{00}|^2 + |y(1-y)(x(1-x)v^0_{00})_x - tv_{10}|^2 +$$
$$+|v^0_{00}(t,x) - \eta|^2 + |x(1-x)(y(1-y)v^0_{00})_y - tv_{01}|^2 + |(\widetilde{k^0_{00}})_\eta - x(1-x)y(1-y)\widetilde{k^1_{00}}|^2 +$$
$$+|(\widetilde{k^0_{00}})_x - \eta(1-2x)y(1-y)\widetilde{k^1_{00}} - \widetilde{k_{10}}|^2\} + |(\widetilde{k^0_{00}})_y - \eta(1-2y)x(1-x)\widetilde{k^1_{00}} - \widetilde{k_{01}}|^2 d\eta dy dx dt +$$
$$+\beta\sum_{i=1}^N |\widetilde{k^{(i)}} - \widetilde{k^0_{00}}(x_i, y_i, \eta_i)|^2 + \alpha\sum_{i=1}^N |v^i - v^0_{00}(t_i, x_i, y_i)|^2 (x_i(1-x_i)y_i(1-y_i))^2 +$$
$$+\varepsilon_1\int\limits_0^1\int\limits_0^1\int\limits_c^d \{|\widetilde{k^0_{00}}|^2 + |\widetilde{k_{01}}|^2 + |\widetilde{k_{10}}|^2\} d\eta dy dx + \varepsilon_1\int\limits_0^T\int\limits_0^1\int\limits_0^1 \{|v^0_{00}|^2 + |(v^0_{00})_x|^2 + |(v^0_{00})_t|^2\} dy dx dt.$$

Здесь v^i взято из (6), а $\widetilde{k^{(i)}}$ — из (7).

В выражении для J слагаемое, поделенное на ε_2, отвечает за приближенное выполнение уравнения, слагаемые, умноженные на ε_1, отвечают за то, чтобы $\widetilde{k^0_{00}}$ и v^0_{00} оставались ограниченными в классе Соболева, и, наконец, слагаемые, содержащие $\alpha > 0$ и $\beta > 0$, отвечают за то, чтобы приближенно выполнялись (6) и (7). В уравнение (8) введены новые функции $u^0_{11}(t,x,y)$, $u^1_{11}(t,x,y)$. Это сделано ради удобства минимизации функционала J.

Если, минимизируя функционал J, мы получим, что J мал, то из определения J получим ограниченное приближенное решение системы (8), а значит, и приближенное решение поставленной задачи.

Таким образом, имеет место

Лемма 3. *Если значение функионала J мало, то $k(x,y,u)$, $u(t,x,y)$ есть приближенное решение задачи (1), для которого приближенно в среднеквадратичном смысле выполняются равенства (8):*

$$v^1_{00} - \widetilde{k^1_{00}}t^2(u^0_{11}v_{10} + u^1_{11}v_{01}) - \widetilde{k^0_{00}}t((v_{10})_x + (v_{01})_x) - t\widetilde{k_{10}}v_{10} - t\widetilde{k_{01}}v_{01} = f,$$
$$u^0_{11} - v_{10} = 0,\ u^1_{11} - v_{01} = 0, \quad x(1-x)y(1-y)(v^0_{00})_t - v_{01} = 0,$$
$$y(1-y)(x(1-x)v_{00})_x - tv_{10} = 0, \quad x(1-x)(y(1-y)v_{00})_y - tv_{01} = 0,$$
$$(\widetilde{k^0_{00}})_\eta - x(1-x)y(1-y)\widetilde{k^1_{00}} = 0, \quad (\widetilde{k^0_{00}})_x - \eta(1-2x)y(1-y)\widetilde{k^1_{00}} - \widetilde{k_{10}} = 0,$$
$$(\widetilde{k^0_{00}})_y - \eta(1-2y)x(1-x)\widetilde{k^1_{00}} - \widetilde{k_{01}} = 0, \quad v_{00}(t,x,y) - \eta = 0. \tag{9}$$

Ниже приведем алгоритм минимизации функционала J.

Если исходную задачу рассматривать в трехмерном случае (по пространственным переменным), то получим уравнение с более чем пятью переменными. Дело в том, что с численным решением интегродифференциальных уравнений, имеющих более трех переменных, не могут справиться самые мощные компьютеры.

Мы дадим алгоритм, обходящий эту проблему, хотя бы в вопросе "экономии памяти" компьютеров.

Обозначим

$$\bar{k}(x,y,\eta) = (\widetilde{k_{00}^0}(x,y,\eta), \widetilde{k_{10}}(x,y,\eta), \widetilde{k_{01}}(x,y,\eta), \widetilde{k_{00}^1}(x,y,\eta)),$$

$$\bar{v}(x,y,\eta) = (\widetilde{v_{00}^0}(x,y,\eta), \widetilde{v_{10}}(x,y,\eta), \widetilde{v_{01}}(x,y,\eta), \widetilde{v_{00}^1}(x,y,\eta)),$$

$$\bar{u}(t,x,y) = (u_{11}^0(t,x,y), u_{11}^1(t,x,y)). \tag{10}$$

Тогда $J = J(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \alpha, \beta, \widetilde{k_{ij}}, \widetilde{k_{00}^n}, v_{lm}, v_{00}^n, u_{11}^0, u_{11}^1) = J(\bar{k}, \bar{v}, \bar{u})$.

В дальнейшем в обозначениях J зависимость от ε_1, ε_2 опускаем.

Если $\gamma > 0$, то

$$J(\bar{k} + \gamma \overset{0}{\bar{k}}, \bar{v}, \bar{u}) = J_{11}(\bar{k}, \overset{0}{\bar{k}}, \bar{v}, \bar{u}) + 2\gamma J_{12}(\bar{k}, \overset{0}{\bar{k}}, \bar{v}, \bar{u}) + \gamma^2 J_{13}(\bar{k}, \overset{0}{\bar{k}}, \bar{v}, \bar{u}) = J_{11} + 2\gamma J_{12} + \gamma^2 J_{13},$$

$$J(\bar{k}, \bar{v} + \gamma \overset{0}{\bar{v}}, \bar{u}) = J_{21}(\bar{k}, \overset{0}{\bar{v}}, \bar{v}, \bar{u}) + 2\gamma J_{22}(\bar{k}, \overset{0}{\bar{v}}, \bar{v}, \bar{u}) + \gamma^2 J_{23}(\bar{k}, \overset{0}{\bar{v}}, \bar{v}, \bar{u}) = J_{21} + 2\gamma J_{22} + \gamma^2 J_{23},$$

$$J(\bar{k}, \bar{v}, \bar{u} + \gamma \overset{0}{\bar{u}}) = J_{31}(\bar{k}, \overset{0}{\bar{u}}, \bar{v}, \bar{u}) + 2\gamma J_{32}(\bar{k}, \overset{0}{\bar{u}}, \bar{v}, \bar{u}) + \gamma^2 J_{33}(\bar{k}, \overset{0}{\bar{u}}, \bar{v}, \bar{u}) = J_{31} + 2\gamma J_{32} + \gamma^2 J_{33}.$$

Выражения для $J_{i,j}$ $(i,j = 1,2,3)$ получаются приравниванием коэффициентов при степенях γ. Отметим, что J_{13}, J_{23}, J_{33} — положительные.

4. Итерационный метод приближенного вычисления функционала

Возьмем систему четырехмерных векторов-функций от трех переменных

$$\psi_j(x,y,\eta) = \begin{pmatrix} \psi_{j,1}(x,y,\eta) \\ \psi_{j,2}(x,y,\eta) \\ \psi_{j,3}(x,y,\eta) \\ \psi_{j,4}(x,y,\eta) \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2, \ldots, M.$$

Пусть эти четырехмерные вектор-функции ортонормированы в $L_2(G) \times L_2(G) \times L_2(G) \times L_2(G)$, где G — любое множество, содержащее $[0,1] \times [0,1] \times [c,d]$. Аналогично возьмем четырехмерные вектор-функции $\varphi_j(t,x,y)$, $j = 1, 2, \ldots, M$, ортонормированные в $L_2(D) \times L_2(D) \times L_2(D) \times L_2(D)$, где D — любое множество, содержащее $[0,T] \times [0,1] \times [0,1]$. И пусть, наконец, $\theta_j(t,x,y)$, $j = 1,2,\ldots,M$, — двумерные вектор-функции, ортонормированные в $L_2(D) \times L_2(D)$.

Дадим алгоритм вычисления проекции $(\bar{k}, \bar{v}, \bar{u})$ на подпространство, натянутое на $\{\psi_j, \varphi_j, \theta_j\}_{j=1,\ldots,M}$. Здесь $(\bar{k}, \bar{v}, \bar{u})$ — значения, доставляющие минимум функционалу J.

Очевидно, эти проекции есть приближенное решение задачи (в силу возможности разложения в ряды Фурье).

Пусть $W^{(0)} = (\bar{k}^{(0)}, \bar{v}^{(0)}, \bar{u}^{(0)})$ — нулевое приближение. Положим $W_1^{(0)} = (\bar{k}^{(0)} + \gamma\psi_1, \bar{v}^{(0)}, \bar{u}^{(0)})$. Тогда из (10) имеем

$$J(W_1^{(0)}) = J_{11}(W^{(0)}, \psi_1) + 2\gamma J_{12}(W^{(0)}, \psi_1) + \gamma^2 J_{13}(W^{(0)}, \psi_1).$$

Выберем $\gamma = \gamma_0 \equiv [J_{13}^{-1}(W^{(0)}, \psi_1) J_{12}(W^{(0)}, \psi_1)]$. Тогда

$$J(W_1^{(0)}) = J_{11}(W^{(0)}, \psi_1) - \frac{J_{12}^2(W^{(0)}, \psi_1)}{J_{13}(W^{(0)}, \psi_1)} \leq J(W^0).$$

Теперь положим $W_2^{(0)} = (\bar{k}^{(0)} + \gamma_0\psi_1, \bar{v}^{(0)} + \gamma\varphi_1, \bar{u}^{(0)})$. Выберем γ (используя (10)): $\gamma = \gamma_1 \equiv [J_{23}^{-1}(W_1^{(0)}, \varphi_1) J_{22}(W_1^{(0)}, \varphi_1)]$. Тогда получим

$$J(W_2^{(0)}) = J_{21}(W_1^{(0)}, \varphi_1) - \frac{J_{22}^2(W_1^{(0)}, \varphi_1)}{J_{23}(W_1^{(0)}, \varphi_1)} \leq J(W_1^0), \quad J(W_2^{(0)}) \leq J(W_1^0) \leq J(W^0).$$

Возьмем, наконец, $W_3^{(0)} = (\bar{k}^{(0)} + \gamma_0\psi_1, \bar{v}^{(0)} + \gamma_1\varphi_1, \bar{u}^{(0)} + \gamma\theta_1)$. Выберем γ (опять-таки из условия минимума функционала J): $\gamma = \gamma_2 \equiv [J_{33}^{-1}(W_2^{(0)}, \theta_1) J_{32}(W_2^{(0)}, \theta_1)]$. Тогда получим

$$J(W_3^{(0)}) = J_{31}(W_2^{(0)}, \theta_1) - \frac{J_{32}^2(W_2^{(0)}, \theta_1)}{J_{33}(W_2^{(0)}, \theta_1)} \leq J(W_2^0).$$

Отсюда

$$J(W_3^{(0)}) \leq J(W_2^{(0)}) \leq J(W_1^0) \leq J(W^0).$$

За первое приближение возьмем $W^{(1)} = W_3^{(0)}$. Теперь по первому приближению построим $W^{(2)}$ так же, как мы строили по нулевому приближению $W^{(1)}$. При этом вместо $(\psi_1, \varphi_1, \theta_1)$ будем использовать $(\psi_2, \varphi_2, \theta_2)$. Продолжая процесс, построим $W^{(0)}$, $W^{(1)}$, ..., $W^{(M)}$. Построение $W^{(k+1)}$ по $W^{(k)}$ проводится аналогично построению $W^{(1)}$ по $W^{(0)}$, но вместо $(\psi_1, \varphi_1, \theta_1)$ используется $(\psi_{k+1}, \varphi_{k+1}, \theta_{k+1})$. Теперь, принимая за нулевое приближение $W^{(M)}$, как и выше, построим $W^{(M+1)}$, $W^{(M+2)}$, ..., $W^{(2M)}$. Далее продолжим этот процесс, принимая за нулевое приближение $W^{(2M)}$ и т. д. Построим $W^{(kM)}$ (k — целое). Приняв его за нулевое приближение, построим $W^{(kM+1)}$, $W^{(kM+2)}$, ..., $W^{((k+1)M)}$. Таким образом, мы построили $W^{(0)}$, $W^{(1)}$, ..., $W^{(M)}$, ..., где $W^{(n)} = (\bar{k}^{(n)}, \bar{v}^{(n)}, \bar{u}^{(n)})$.

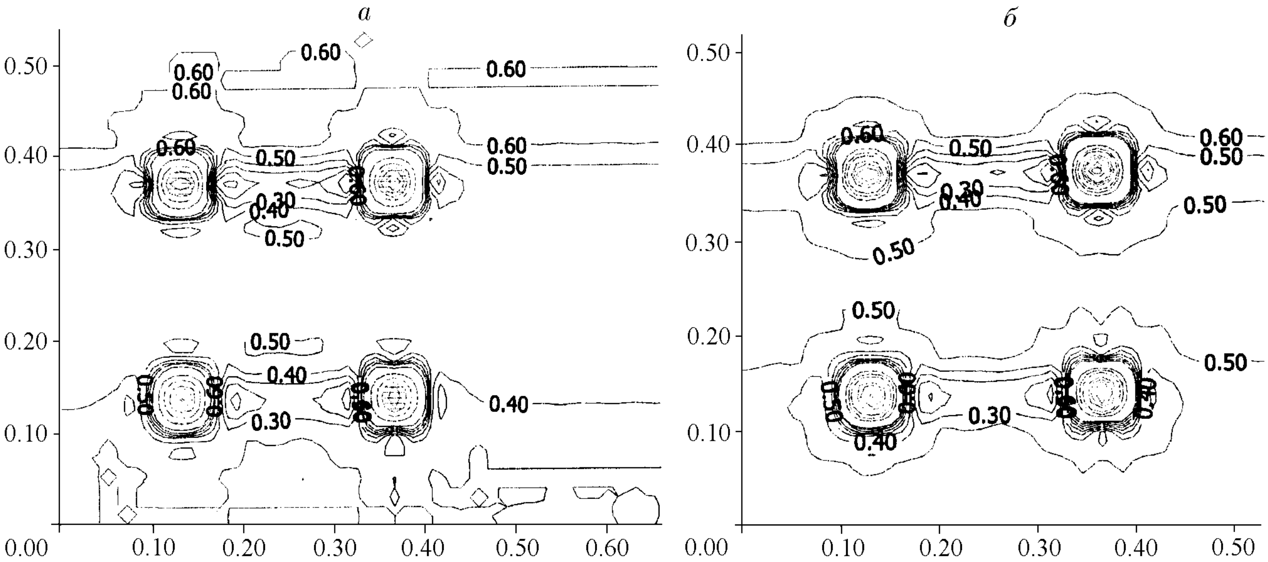
Лемма 4. *Процесс сходится, а именно предел последовательности $(W^{(n)} = (\bar{k}^{(n)}, \bar{v}^{(n)}, \bar{u}^{(n)}))$ при $n \to \infty$ доставляет локальный минимум функционалу $J = J(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \bar{k}, \bar{v}, \bar{u})$.*

Доказательство вытекает из компактности конечномерного пространства и определения J.

Замечание 1. *Если при счете какой-либо из коэффициентов J_{12}, J_{22}, J_{32} станет равным нулю, то γ следует взять равным нулю.*

Замечание 2. *Чтобы оборвать процесс, нужно обратиться к определению J. Из J нужно выбросить член, отвечающий за “ограниченность” (т. е. тот, который имеет множитель ε_1), если остальные члены малы, то нужно остановить процесс. Если же при фиксированном M процесс не останавливается, следует увеличить M.*

Таким образом, проблему приближенного решения исходной задачи (1) – (2) — определения $k(x, y, u)$ — мы свели к нахождению приближенного минимума функционала $J = J(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \bar{k}, \bar{v}, \bar{u})$. Нетрудно увидеть, что так можно поступить и в случае более общих



(векторных и скалярных) уравнений любого числа переменных и привести их к минимизации соответствующего функционала.

С помощью предложенного метода была численно решена задача течения однородной жидкости в неоднородном пласте в двумерном случае в области $Q = (0,T] \times \Omega$, $\Omega = (0,L) \times (0,L)$[1]:

$$c^* \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x,y,u)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k(x,y,u)\frac{\partial u}{\partial y}\right) + f(x,y,t),$$

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad u|_{x=0} = u|_{x=L} = 0, \quad u|_{y=0} = u|_{y=L} = 0,$$

$$c^* = \mu(m_0\beta_f + \beta_p, \quad f(x,y,t) = \mu \sum_{l=1}^{N} q_l(t)\delta_l(x,y)h^{-1},$$

$$\delta_l(x,y) = \text{const}, \quad (x,y) \in \Omega_l, \quad \delta_l(x,y) = 0, \quad (x,y) \notin \Omega_l,$$

$$k(x_i, y_i, u(t_i, x_i, y_i)) = k_i, \quad u(t_i, x_i, y_i) = u_i, \quad (t_i, x_i, y_i) \in [0,T] \times \Omega, \quad i = 1, ..., N, \tag{11}$$

где $k(x,y,u) \geq 0$ — проницаемость пласта; k_i, u_i, $i = 1, ..., N$, заданы; $h - \text{const}$ — толщина пласта; μ — вязкость жидкости; m_0 — пористость; β_f — коэффициент сжимаемости жидкости; β_p — коэффициент пористой среды; N — число скважин; q_l — дебит (положительный для добывающих скважин); u — давление пласта; t — время; Ω_l — область l-й скважины. Необходимо было восстановить $k(x,y,u)$. На рисунке показан характер начальной проницаемости (*а*) и проницаемости, полученной с помощью предложенного метода (*б*).

Поступила в редакцию 27 июня 2001 г.

[1] Вирновский Г. А., Левитан Е. И. Применение методов оптимального управления в задачах анализа и синтеза гидродинамических исследований объектов разработки // Методы мат. моделирования объектов и процессов разработки нефтяных месторождений: Сб. науч. тр. М.: ВНИИ, 1991. С. 88–95.