

# ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ УЕДИНЕННЫХ ИНТЕНСИВНЫХ ВОЛН ВТОРОГО ЗВУКА В СВЕРХТЕКУЧЕМ ТУРБУЛЕНТНОМ ГЕЛИИ\*

Л. П. КОНДАУРОВА, С. К. НЕМИРОВСКИЙ, М. В. НЕДОБОЙКО  
*Институт теплофизики СО РАН, Новосибирск, Россия*  
e-mail: theory@itp.nsc.ru

The paper is devoted to the realization of the “discontinuity decay” method for solution of the differential equations describing the dynamics of intense second sound waves in the superfluid helium. The numerical calculation of the evolution of pulses propagating along channel filled with unperturbed helium is carried out. The results of the dynamics of pulses in various temperature ranges are presented. It is shown that the discontinuities are formed either at the leading front or at the trailing edge of the wave depending on the temperature.

## Введение

Среди множества “экзотических” свойств сверхтекучего гелия одним из интереснейших является сверхтеплопроводность. Оно объясняется тем, что под действием перепада температур согласно двухжидкостной модели (см., например, [1, 2]) в He-II возникает встречное движение нормальной и сверхтекучей составляющих (рис. 1), тепло при этом переносится только нормальной “теплосодержащей” частью. Однако при превышении некоторого критического теплового потока сверхтеплопроводность значительно подавляется взаимным трением между этими составляющими. Причиной возникновения этого дополнительного диссипативного механизма является “рождение” квантованных произвольно ориентированных вихревых нитей в объеме сверхтекучей жидкости. Вихревые нити представляют собой хаотически запутанный клубок. Р. П. Фейнман [3] назвал это явление сверхтекучей турбулентностью.

Для количественного описания взаимного влияния вихревой структуры и гидродинамических свойств He-II различными способами были получены системы дифференциальных уравнений [4–6] (так называемые уравнения гидродинамики сверхтекучей турбулентности). Отличия, которые наблюдаются между системами, полученными различными авторами [4–6], становятся несущественными при описании динамики уединенных интенсивных волн второго звука — мощных тепловых импульсов. Эта система уравнений очень громоздка, и даже в простейших случаях не удается найти ее аналитические решения.

---

\*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (инициативный проект №99-02-16942-а).

© Л. П. Кондаурова, С. К. Немировский, М. В. Недобойко, 2001.

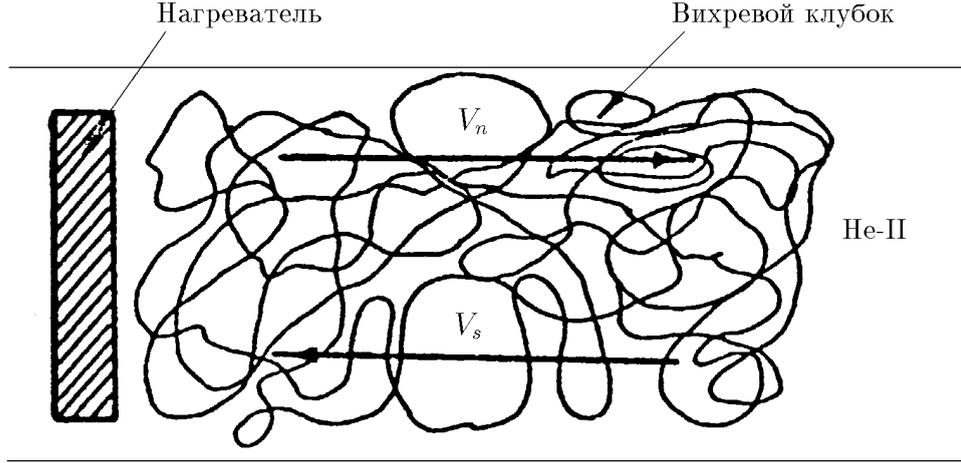


Рис. 1. Иллюстрация турбулентного противотока в He-II. Нормальная составляющая движется от нагревателя, сверхтекучая — к нагревателю.

Известно, что гелий используется в качестве хладагента сверхпроводящих систем. Для элементов реальных обмоток сверхпроводящих магнитов и других устройств наиболее характерными являются плоская и цилиндрическая геометрии. В данной работе представлено численное моделирование динамики уединенных интенсивных волн второго звука в сверхтекучем турбулентном гелии в случае плоской геометрии. Для построения конечно-разностной схемы, аппроксимирующей исходные уравнения в частных производных, используется метод распада разрыва [7]. В статье приводятся реализация этого алгоритма, а также полученные численные решения тестовых задач в различных температурных областях.

## 1. Исходные уравнения и их аппроксимация

При описании динамики теплового импульса мощной амплитуды (см. экспериментальные работы [8–12]) необходимо принимать во внимание нелинейные искажения, поэтому в уравнениях гидродинамики сверхтекучей турбулентности (ГСТ) следует учитывать члены второго порядка малости. В экспериментах [8–12] при допущении отсутствия потока массы выполнялось условие  $j = \rho_n V_n + \rho_s V_s = 0$ . Во втором приближении для случая плоской геометрии уравнения ГСТ принимают следующий вид [13]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T'}{\partial t'} - \left( \frac{\sigma_o(\rho + \rho_n)}{\sigma_T \rho_n \rho} \frac{\partial \rho_n}{\partial T} - \frac{\rho_s}{\rho} \right) W' \frac{\partial T'}{\partial x'} - \frac{\rho_s}{\rho} \left( \frac{\sigma_o \sigma_{TT}}{\sigma_T^2} - 1 \right) T' \frac{\partial W'}{\partial x'} + \frac{\rho_o \rho_s}{\sigma_T \rho} \frac{\partial W'}{\partial x'} = \\ = \frac{1}{\rho \sigma_T T_o} (\alpha_1 L' W'^2 + \varepsilon_\beta \beta L'^2), \end{aligned} \quad (1)$$

$$\frac{\partial W'}{\partial t'} + \frac{\rho_s}{2\rho} \left( 3 - \frac{\sigma_o}{\sigma_T \rho_n} \frac{\partial \rho_n}{\partial T} \right) \frac{\partial W'^2}{\partial x'} + \frac{\rho \sigma_o}{\rho_n} \frac{\partial T'}{\partial x'} + \frac{\rho \sigma_T}{2\rho_n} \frac{\partial T'^2}{\partial x'} = -\frac{\rho \alpha_1}{\rho_s \rho_n} L' W' - \frac{\rho \varepsilon_\beta \alpha}{\rho_s} L'^{3/2} \frac{W'}{|W'|}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial L'}{\partial t'} - \frac{\rho_n}{\rho} \frac{\partial W' L'}{\partial x'} = \chi_1 \frac{B \rho_n}{\rho} |W'| L'^{3/2} - \chi_2 \kappa L'^2. \quad (3)$$

В этих уравнениях и в дальнейшем использованы следующие обозначения:  $T'$  — отклонение от равновесной температуры  $T_o$ ;  $W' = V'_n - V'_s$  ( $W'$ ,  $V'_n$ ,  $V'_s$  — относительная,

нормальная и сверхтекучая скорости соответственно);  $L'$  — плотность вихревой линии;  $t'$  — время;  $x'$  — координата;  $\rho = \rho_s + \rho_n$  ( $\rho$ ,  $\rho_s$ ,  $\rho_n$  — плотность жидкости, сверхтекучая и нормальная плотности жидкости соответственно);  $\sigma_o$  — энтропия на единицу массы при  $T_o$ ,  $\sigma_T = \partial\sigma/\partial T$ ,  $\sigma_{TT} = \partial^2\sigma/\partial T^2$ ;  $\alpha = \chi_1 B \rho_n / 2\rho$ ,  $\alpha_1 = A \rho_s \rho_n \beta^2 / \alpha^2$ ;  $\beta = \kappa \chi_2 / 2\pi$ ;  $\varepsilon_\beta = \rho_s \kappa^2$ ;  $A = \chi_1^2 \pi B^3 \rho_n^2 m_{\text{He}} / (6 \chi_2^2 \rho^3 h)$  — постоянная Гортера — Меллинка;  $\chi_1$ ,  $\chi_2$ , — параметры в уравнении (3) (уравнение Вайнена);  $B$  — коэффициент Холла — Вайнена;  $\kappa = 2\pi \hbar / m_{\text{He}}$  — квант циркуляции;  $m_{\text{He}}$  — масса атома гелия.

Уравнения (1)–(3) позволяют описывать гидродинамические процессы в сверхтекучем гелии при превышении критических скоростей.

Для проведения численных расчетов введем следующие безразмерные переменные:  $T' = (c_{20} \rho_n / \sigma \rho) W_0 T$ ,  $W' = W_0 W$ ,  $x' = c_{20} t_H x$ ,  $t' = t_H t$ ,  $L' = L_0 L$ , где  $c_{20}^2 = \rho_s \sigma_o^2 / (\rho_n \sigma_T)$  — скорость линейного второго звука;  $W_0 = Q / (\rho_s \sigma_o T_o)$  — амплитуда импульса ( $Q$  — плотность теплового потока);  $t_H$  — длительность подаваемого на нагреватель теплового импульса,  $L_0 = (\alpha \rho V_{no} / \beta \rho_s)^2$ . В итоге получаем

$$\frac{\partial T}{\partial t} + a_{11} W \frac{\partial T}{\partial x} + (a_{12} + a_{13} T) \frac{\partial W}{\partial x} = a_{14} L W^2 + a_{15} L^2, \quad (4)$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} + a_{21} \frac{\partial T}{\partial x} + a_{22} T \frac{\partial T}{\partial x} + a_{23} W \frac{\partial W}{\partial x} = a_{24} L W + a_{25} L^{3/2} \frac{W}{|W|}, \quad (5)$$

$$\frac{\partial L}{\partial t} + a_{31} \frac{\partial W L}{\partial x} = a_{32} |W| L^{3/2} + a_{33} L^2, \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{V_{no}}{c_2} \left( 1 - \frac{\sigma_o}{\sigma_T} \frac{\partial \rho_n}{\partial T} \left( \frac{\rho + \rho_n}{\rho_n \rho_s} \right) \right), & a_{12} &= 1, & a_{13} &= \frac{V_{no}}{c_2} \left( 1 - \frac{\sigma_o \sigma_{TT}}{\sigma_T^2} \right), \\ a_{14} &= \frac{c_{20} \alpha_1 L_o \rho^2}{V_{no} \sigma_T \rho \rho_s^2}, & a_{15} &= \frac{c_{20} \varepsilon_\beta \beta L_o^2}{V_{no} \sigma_o T_o \rho}, & a_{21} &= 1, & a_{22} &= \frac{V_{no}}{c_{20}}, \\ a_{23} &= \frac{V_{no}}{c_{20}} \left( 3 - \frac{\sigma_o}{\sigma_T \rho_n} \frac{\partial \rho_n}{\partial T} \right), & a_{24} &= -\frac{\rho \alpha_1 L_o}{\rho_n \rho_s}, & a_{25} &= -\frac{\varepsilon_\beta \beta \alpha L_o^{3/2}}{\rho_n V_{no}}, \\ a_{31} &= -\frac{\rho_n V_{no}}{\rho_s c_{20}}, & a_{32} &= \alpha V_{no} L_o^{1/2} \rho / \rho_s, & a_{33} &= -\beta L_o. \end{aligned}$$

Для реализации численного метода распада разрыва необходимо перейти от функций с непрерывными аргументами к дискретным наборам чисел, их заменяющих. Для этого разобьем ось  $x$  на ряд отрезков (рис. 2) при помощи точек  $x_j$  ( $x_j$  — узлы разностной сетки). Шаг  $h = x_j - x_{j-1}$  возьмем постоянным. В начальный момент времени ( $t = 0$ ) внутри каждого участка от  $x_{j-1}$  до  $x_j$  величины  $T$ ,  $W$ ,  $L$  — постоянны. Обозначим их значения как  $T_{j-1/2}$ ,  $W_{j-1/2}$ ,  $L_{j-1/2}$  соответственно. Для нахождения характеристик в точках  $x_j$ , а также римановых инвариантов, которые постоянны вдоль этих характеристик, необходимо эту систему уравнений линеаризовать и привести к каноническому виду, а затем обычным путем найти характеристики этой системы:

$$x - \lambda_1 t = 0, \quad x - \lambda_2 t = 0, \quad x - \lambda_3 t = 0,$$

где  $\lambda_{1,2} = (a_{23} + a_{11})W/2 \pm [(a_{23} + a_{11})^2 W^2 / 4 - a_{11} a_{23} W^2 + (a_{12} a_{13} T) (a_{21} + a_{22} T)]^{1/2}$ , а  $\lambda_3 = a_{32} W$ .

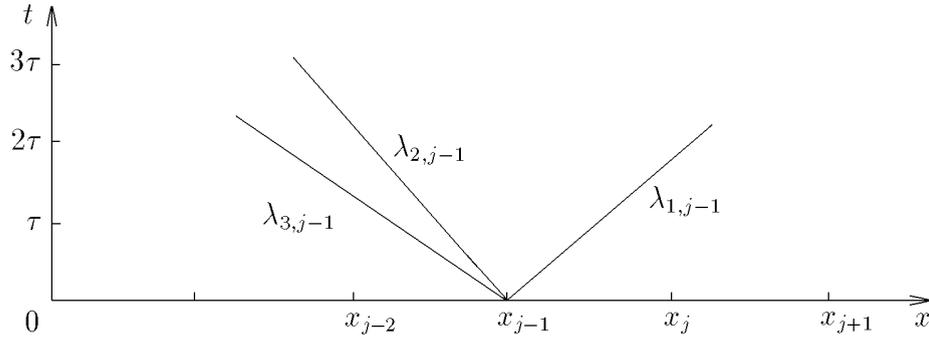


Рис. 2. Схема для численных расчетов.

На границе между каждыми двумя соседними ячейками происходит распад разрыва [7]. Во всех узлах сетки возникают волны, распространяющиеся вправо и влево с соответствующими скоростями (см. рис. 2). В частности, вдоль характеристики  $dx/dt = \lambda_{1,j-1}$  переносится инвариант

$$\begin{aligned} A1_{j-1/2} &= (a_{21} + a_{22}T_{j-1/2})T_{j-1/2} - (a_{11}W_{j-1/2} - \lambda_{1,j-1})W_{j-1/2} = \\ &= (a_{21} + a_{22}T_{j-1/2})T_j - (a_{11}W_{j-1/2} - \lambda_{1,j-1})W_j, \end{aligned}$$

вдоль  $dx/dt = \lambda_{2,j}$  —

$$\begin{aligned} A2_{j+1/2} &= (a_{21} + a_{22}T_{j+1/2})T_{j+1/2} - (a_{11}W_{j+1/2} - \lambda_{2,j})W_{j+1/2} = \\ &= (a_{21} + a_{22}T_{j+1/2})T_j - (a_{11}W_{j+1/2} - \lambda_{2,j})W_j, \end{aligned}$$

вдоль  $dx/dt = \lambda_{3,j}$  —

$$\begin{aligned} A3_{j+1/2} &= a_{31}L_{j+1/2} - \frac{(a_{11}W_{j+1/2} - \lambda_{3,j})a_{31}L_{j+1/2}}{a_{21} + a_{22}T_{j+1/2}}W_{j+1/2} = \\ &= a_{31}L_j - \frac{(a_{11}W_{j+1/2} - \lambda_{3,j})a_{31}L_{j+1/2}}{a_{21} + a_{22}T_{j+1/2}}W_j, \end{aligned}$$

где  $W_j$ ,  $T_j$ ,  $L_j$  — искомые величины на границе ячейки сетки в точке  $x_j$ . После соответствующих выкладок находим

$$W_j = \frac{A1_{j-1/2}(a_{22}T_{j+1/2} + a_{21}) - A2_{j+1/2}(a_{22}T_{j-1/2} + a_{21})}{(-a_{11}W_{j-1/2} + \lambda_{1,j-1})(a_{22}T_{j+1/2} + a_{21}) + (a_{11}W_{j+1/2} - \lambda_{2,j})(a_{22}T_{j-1/2} + a_{21})},$$

$$T_j = (A2_{j+1/2} + (a_{11}W_{j+1/2} - \lambda_{2,j})W_j)/(a_{22}T_{j+1/2} + a_{21}),$$

$$L_j = (A3_{j+1/2} - a_{31}L_{j+1/2}T_j - Z_1W_j)/Z_2,$$

где  $Z_1 = -a_{31}L_{j+1/2}(a_{11}W_{j+1/2} - \lambda_{3,j})(a_{21} + a_{22}T_{j+1/2})$ ,  $Z_2 = -a_{31}T_{j+1/2} - a_{12} - (a_{23}W_{j+1/2} - \lambda_{3,j})(a_{11}W_{j+1/2} - \lambda_{3,j})/(a_{21} + a_{22}T_{j+1/2})$ . Аналогично находятся значения  $W_{j-1}$ ,  $L_{j-1}$ ,  $T_{j-1}$ ,  $W_{j+1}$ ,  $L_{j+1}$ ,  $T_{j+1}$  и т. д.

Эта структура решения будет сохраняться до тех пор, пока волны, вышедшие из соседних узлов, не встретятся друг с другом. Для нахождения значений  $W$ ,  $L$ ,  $T$  на слое  $\tau$  обозначим их соответственно  $W^{j-1/2}$ ,  $L^{j-1/2}$ ,  $T^{j-1/2}$ , проинтегрируем уравнения по прямоугольной ячейке сетки, ограниченной прямыми  $x = x_{j-1}$ ,  $x = x_j$ ,  $t = 0$ ,  $t = \tau$ , исходя из

того, что функции  $T$ ,  $W$ ,  $L$  в интервале от  $x_{j-1}$  до  $x_j$  принимают постоянные значения  $T_{j-1/2}$ ,  $W_{j-1/2}$ ,  $L_{j-1/2}$ , на левой и правой сторонах ячейки — соответственно  $T_{j-1}$ ,  $W_{j-1}$ ,  $L_{j-1}$  и  $T_j$ ,  $W_j$ ,  $L_j$ . Получаем

$$\begin{aligned} T^{j-1/2} &= T_{j-1/2} + B1_{j-1/2}\tau/h + F1_{j-1/2}\tau, \\ W^{j-1/2} &= W_{j-1/2} + B2_{j-1/2}\tau/h + F2_{j-1/2}\tau, \\ L^{j-1/2} &= L_{j-1/2} + B3_{j-1/2}\tau/h + F3_{j-1/2}\tau, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} B1_{j-1/2} &= (a_{11} - a_{13})W_{j-1/2}(T_{j-1} - T_j) + a_{12}(W_{j-1} - W_j) + a_{13}(T_{j-1}W_{j-1} - W_jT_j); \\ B2_{j-1/2} &= (a_{21}(T_{j-1} - T_j) + a_{22}(T_{j-1} + T_j)(T_{j-1} - T_j)/2 + a_{23}(W_{j-1} + W_j)(W_{j-1} - W_j)/2); \\ B3_{j-1/2} &= a_{31}(W_{j-1}L_{j-1} - W_jL_j); \\ F1_{j-1/2} &= a_{14}L_{j-1/2}W_{j-1/2}^2 + a_{15}L_{j-1/2}^2; \\ F2_{j-1/2} &= a_{24}L_{j-1/2}W_{j-1/2} + a_{25}(L_{j-1/2})^{3/2}W_{j-1/2}/|W_{j-1/2}|; \\ F3_{j-1/2} &= a_{32}(L_{j-1/2})^{3/2}|W_{j-1/2}| + a_{33}(L_{j-1/2})^2. \end{aligned}$$

Далее, опираясь на полученные результаты как на исходные, можно продвинуться еще раз на  $\tau$ , получив решение на момент  $t = 2\tau$ , и т. д. Вышеописанный алгоритм реализован в виде программы для расчетов на компьютере.

## 2. Результаты численного эксперимента

Во всех упомянутых выше экспериментальных работах с одного из концов длинного канала, заполненного невозмущенным гелием, подавался тепловой импульс (см. рис. 1), динамика которого и исследовалась. Согласно опытам [8–12] в качестве начальных условий для системы уравнений (4)–(6) полагаем  $T(x) = 0$ ,  $W(x) = 0$ ,  $L(x) = 0$  при  $t = 0$ . Граничное условие на одной из боковых границ будет соответствовать форме подаваемого импульса, в то время как на другом участке границы все величины остаются невозмущенными. Напомним, что динамика второго звука исследуется по мере его распространения внутри канала.

Для проведения тестовых расчетов предположим, что в объеме жидкости отсутствует квантовая турбулентность. Тогда уравнения (1)–(3) при принятых начальных и граничных условиях имеют аналитическое решение. Так из условия совместности этих уравнений находится скорость  $c_2$ , с которой распространяется возмущение:

$$c_2 = (\rho_s\sigma_o^2/(\rho_n\sigma_T))^{1/2} + [3\rho_s/\rho - 3\sigma(\partial\rho_n/\partial T)/(2\rho_n\sigma_T) - \sigma_o\sigma_{TT}\rho_s/(2\sigma_T^2\rho)]W' = c_{20} + \alpha_2W',$$

где  $c_{20}^2 = \rho_s\sigma_o^2/(\rho_n\sigma_T)$  — скорость линейного второго звука, а коэффициент при  $W$   $\alpha_2 = 3\rho_s/\rho - 3\sigma(\partial\rho_n/\partial T)/(2\rho_n\sigma_T) - \sigma_o\sigma_{TT}\rho_s/(2\sigma_T^2\rho)$  — это так называемый коэффициент нелинейности второго звука [2]. Зависимость этого коэффициента от температуры приведена на рис. 3. Как можно видеть, при температурах выше 1.884 К и в интервале 0.4 – 0.9 К коэффициент  $\alpha_2 < 0$ , в остальной области  $\alpha_2 > 0$ . В температурных областях, где  $\alpha_2 < 0$ , поверхности разрыва должны образовываться на переднем фронте волны, в области температур, где  $\alpha_2 > 0$ , — на заднем фронте волны, а при температурах, в которых  $\alpha_2$  принимает нулевое значение, форма импульса не будет изменяться. Заметим, что подобное

поведение волн наблюдалось в средах с аномальными термодинамическими свойствами: веществе, параметры которого находятся вблизи критической точки жидкость — пар [14, 15], и твердых телах, испытывающих полиморфные превращения [16]. Авторы этих работ расчеты проводили также по методике, изложенной в [7]. В данных работах при распадах разрывов также получены различные комбинации ударных и центрированных волн сжатия и разрежения.

На рис. 4 и 5 приведены результаты численного счета вышеописанных модельных задач: распространение тепловых импульсов в длинном канале, заполненном невозмущенным сверхтекучим гелием, в разных температурных областях ( $\alpha_2 > 0$ ,  $\alpha_2 = 0$  и  $\alpha_2 < 0$ ). На рис. 4 показано распределение температуры вдоль канала при разных временах:  $T_o = 1.41$  К,  $t_1 = 1.010$  мс,  $t_2 = 3.256$  мс,  $t_3 = 5.512$  мс,  $t_4 = 7.768$  мс,  $t_5 = 1.002$  мс (а),  $T_o = 1.884$  К,  $t_1 = 0.101$  мс,  $t_2 = 0.301$  мс,  $t_3 = 0.501$  мс,  $t_4 = 0.701$  мс,  $t_5 = 0.901$  мс (б).

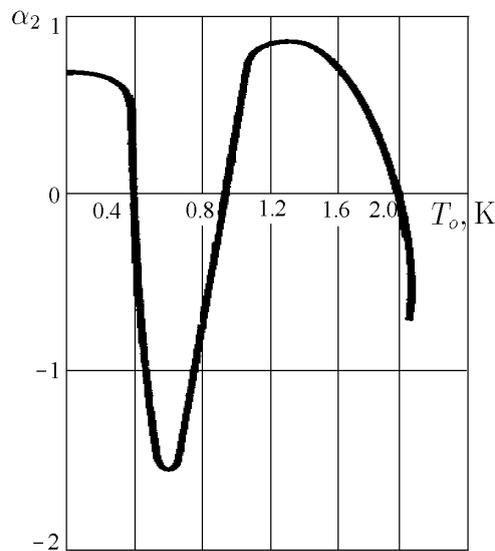


Рис. 3. Зависимость коэффициента  $\alpha_2$  от температуры [1].

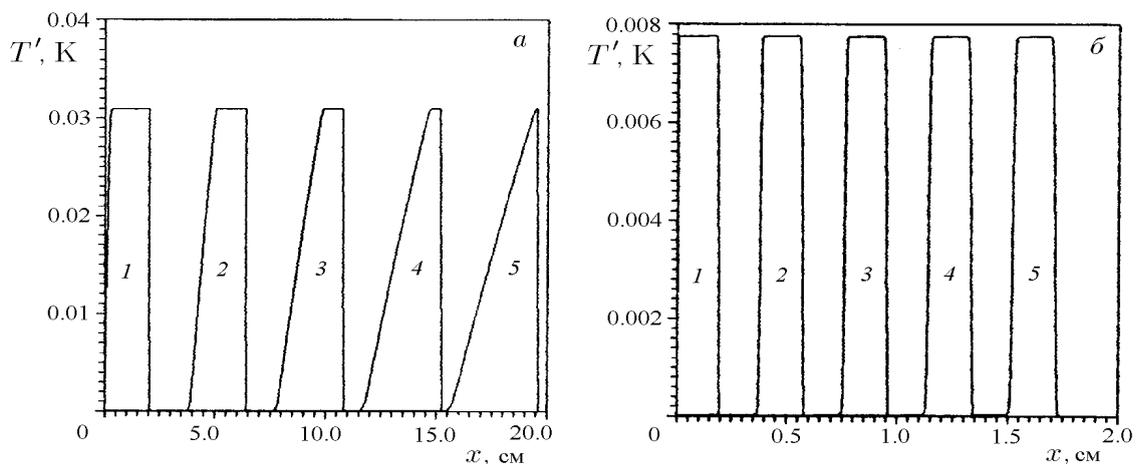


Рис. 4. Распространение теплового импульса: а —  $T_o = 1.41$  К, б —  $T_o = 1.884$  К.

На рис. 5 показана динамика теплового импульса при температуре невозмущенного гелия  $T_o = 2.05$  К в различные моменты времени:  $t_1 = 0.306$  мс,  $t_2 = 5.124$  мс,  $t_3 = 9.941$  мс,

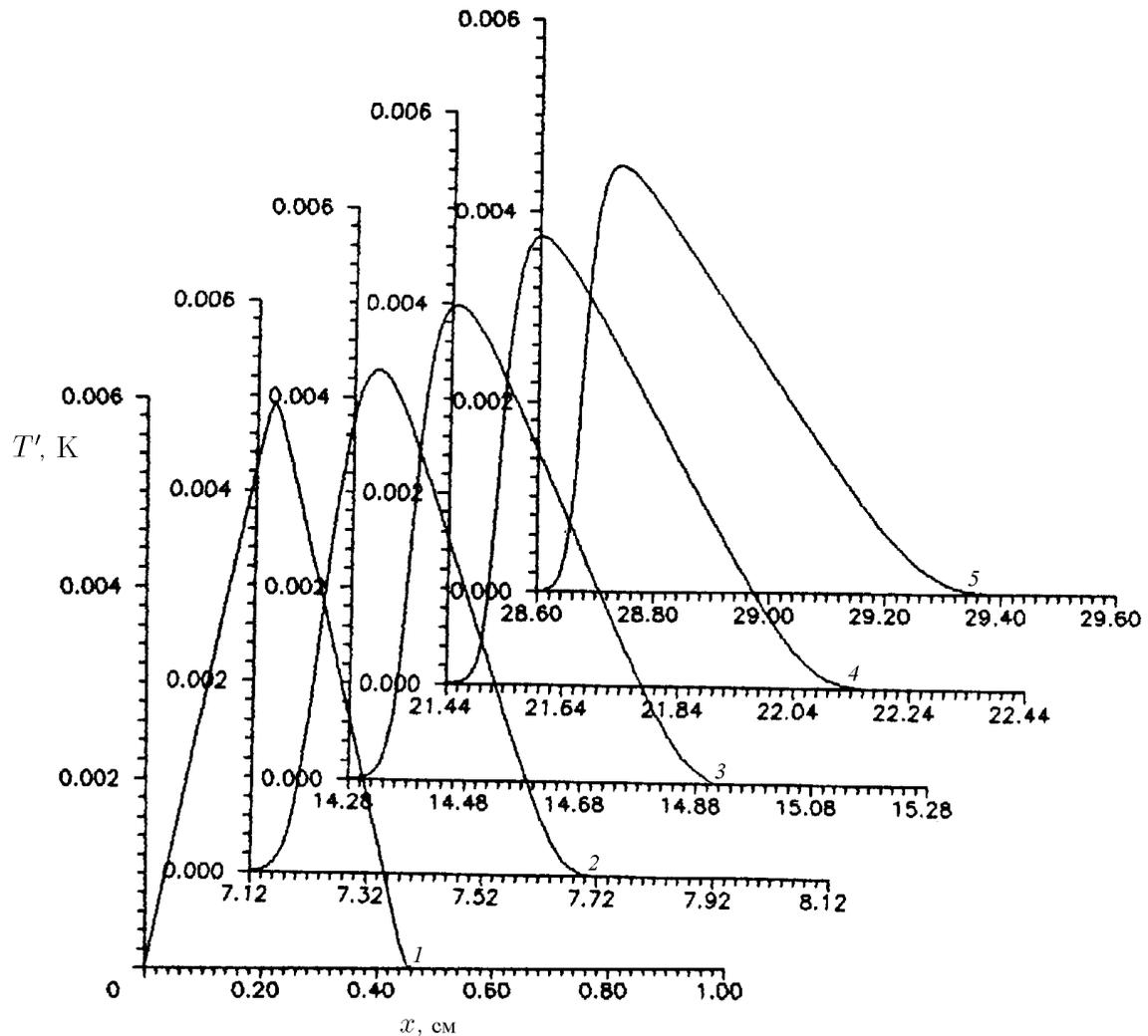


Рис. 5. Динамика уединенной волны второго звука при температуре невозмущенного гелия  $T_0 = 2.05$  К.

$t_4 = 14.758$  мс,  $t_5 = 19.575$  мс. Как можно видеть, изменения формы импульсов совпадают с теоретически предсказанными. Скорость распространения волн с точностью менее одного процента согласуется с полученной аналитически. Законы сохранения выполняются также с точностью менее одного процента.

## Заключение

Основываясь на полученных численных результатах, можно утверждать, что применение метода распада разрыва для решения системы уравнений ГСТ позволяет исследовать и описывать ряд термогидродинамических процессов. Сравнение же численных результатов с экспериментальными данными позволит прояснить многие вопросы, касающиеся взаимного влияния динамики вихревого клубка и теплофизических характеристик жидкости.

## Список литературы

- [1] ХАЛАТНИКОВ И. М. Теория сверхтекучести. М.: Наука, 1971.
- [2] ПАТТЕРМАН С. Гидродинамика сверхтекучей жидкости. М.: Мир, 1978.
- [3] FEYNMAN R. P. Application of quantum mechanics to liquid helium // Progress in Low Temperature Phys. 1955. Vol. 1. P. 17–53.
- [4] НЕМИРОВСКИЙ С. К., ЛЕБЕДЕВ В. В. Гидродинамика сверхтекучей турбулентности // Журн. эксп. и теор. физики. 1983. Т. 84. С. 1729–1742.
- [5] GUERST J. A. Hydrodynamics of quantum turbulence in He II: Vinen's equation derived from energy and impulse of vortex tangle // Physica B. 1989. Vol. 154. P. 327–343.
- [6] YAMADA K., KASHIWAMURA S., MIYAKE K. Stochastic theory of vortex tangle in superfluid turbulence // Ibid. P. 318–326.
- [7] Численное решение многомерных задач газовой динамики / Под ред. С. К. Годунова. М.: Наука, 1976.
- [8] FISZDON W. F., VON SCHWERDTNER M. Influence of quantum turbulence on the evolution of moderate plane second-sound heat pulses in helium II // J. Low Temp. Phys. 1989. Vol. 75. P. 253–267.
- [9] FISZDON W. F., VON SCHWERDTNER M., STAMM G., POPPER W. Temperature overshoot due to quantum turbulence during the evolution of moderate heat pulses in He II // J. Fluid Mech. 1990. Vol. 212. P. 663–684.
- [10] ЛУЦЕТ М. О., ЦОЙ А. Н. Экспериментальное исследование распространения тепловых импульсов в сверхтекучем гелии // Кипение и конденсация (Гидродинамика и теплообмен) / Под ред. И. И. Гогонина, И. Г. Маленкова: Сб. науч. тр. АН СССР. Сиб. отд-ние. Институт теплофизики. 1986. С. 91–101.
- [11] GOLDNER LORI S., MULDER S., AHLERS G. Second sound very near  $T_\lambda$  // J. of Low Temp. Phys. 1993. Vol. 93. P. 131–182.
- [12] SHIMAZAKI T., MURAKAMI M., IIDA T. Second sound wave heat transfer, thermal boundary layer formation and boiling: highly transient heat transport phenomena in He-II // Cryogenics. 1995. Vol. 35, No. 10. P. 645–651.
- [13] КОНДАУРОВА Л. П., НЕМИРОВСКИЙ С. К., НЕДОБОЙКО М. В. Взаимное влияние квантованных вихрей и тепловых импульсов в сверхтекучем гелии // Физика низких температур. 1999. Т. 25, № 7. С. 639–649.
- [14] ХАБАХПАШЕВ Г. А. Распространение возмущений разрежения в окрестности термодинамической критической точки газа Ван-дер-Ваальса // Гидродинамика и теплообмен в конденсированных средах: Сб. науч. тр. АН СССР. Сиб. отд-ние. 1981. С. 14–18.
- [15] БОРИСОВ А. А., ХАБАХПАШЕВ Г. А. Структура волн сжатия и разрежения в газе Ван-дер-Ваальса с постоянной теплоемкостью // ПМТФ. 1982. № 1. С. 123–128.
- [16] KRISPIN J., COLLINS J. P., GLAZ H. M. High-order Godunov type solutions for materials having a nonconvex equation of state // Proc. AIAA 10<sup>th</sup> Comp. Fluid Dyn. Conf., Washington, USA, June 24–26, 1991. P. 556–572.

*Поступила в редакцию 21 мая 2001 г.,  
в переработанном виде — 13 августа 2001 г.*