Вычислительные технологии **Том 6, № 6, 2001**

О НОВОМ МЕТОДЕ ПРИБЛИЖЕННЫХ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ В ПРОИЗВОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ

Ш. С. Смагулов, М. О. Отелбаев
Казахский государственный национальный университет им. аль-Фараби, Алматы
e-mail: `abdramanova@yahoo.com, ak_asel@yahoo.com`

The new method of approximate solutions of nonlinear boundary value problems of elliptic type in complicated domains is suggested. The variational principle is formulated, where the minimum of functional gives the approximate solution of original problem. The algorithm for determination of functional minimum is developed. The convergence theorem for solutions of the suggested algorithm is proved.

Введение

Одной из проблем вычислительной математики является создание эффективного вычислительного алгоритма краевой задачи математической физики в произвольной области с криволинейными границами. В настоящее время существует несколько методов решения краевых задач в сложных областях:

а) метод конечных элементов;
б) метод граничных интегральных уравнений;
в) метод криволинейных сеток;
г) метод фиктивных областей.

Каждый из перечисленных методов имеет свои преимущества и недостатки. Настоящая работа посвящена дальнейшему изучению метода фиктивных областей. По существу, в ней предлагается новый подход в применении этого метода для решения задач математической физики в нерегулярных областях. Метод фиктивных областей в его традиционной постановке [1 – 6] прост в использовании и легко реализуется на ЭВМ. Но признанным его недостатком является потеря точности из-за плохой обусловленности системы разностных уравнений. Плохая обусловленность разностного оператора возникает из-за присутствия во вспомогательных уравнениях малого параметра. В настоящей работе предлагается принципиально новый подход для численного решения нелинейных уравнений математической физики в областях сложной геометрии. Отличительной особенностью и преимуществом нового метода является отсутствие во вспомогательной задаче малого параметра, который влияет на численную реализацию уравнений.

Так же, как и при традиционном методе фиктивных областей, исходная нерегулярная область погружается в новую, удобную для численной реализации. В этой новой области исходная задача заменяется на некоторую вариационную задачу с ограниченным оператором. Доказывается, что минимум вариационной задачи является решением исходной задачи. Заметим, что классический вариант численного решения задач математической физики методом конечных разностей связан с неограниченным оператором. Настоящая работа является продолжением работы [7].

1. Вариационный принцип для численного решения задачи (1.2)

Для простоты будем предполагать область $\Omega \in R^2$, через $\partial\Omega$ обозначим ее границу. Предположим, что $\partial\Omega$ задается уравнением $\partial\Omega = \{x,\ F(x) = 0\}$, где $F(x)$ — достаточно гладкая функция, определенная в R^2, и такая, что

$$F(x) > 0 \ \text{ в } \ \Omega,$$

$$F(x) < 0 \ \text{ вне } \ \Omega,$$
$$|\mathrm{grad} F(x)| \neq 0 \ \text{ в } \ \text{окрестности } \ \partial\Omega. \tag{1.1}$$

В области Ω рассмотрим задачу

$$-\Delta u + u + u^3 = f(x), \quad u\big|_{\partial\Omega} = 0, \tag{1.2}$$

где $f(x)$ — также достаточно гладкая на Ω функция, которая может быть продолжена и за пределы области с сохранением гладкости.

Приведем хорошо известные результаты о задаче (1.2) [6] при выполнении вышеприведенных ограничений. Для определенности будем считать, что $F(x) \in C^{k+2}(\Omega)$, $f(x) \in W_2^k(\Omega)$, где $k \geq 0$ — целое, $W_2^k(\Omega)$ — класс функций Соболева. Из теории вложений хорошо известно, что если $F(x) \in C^{k+2}(R^2)$, то любая функция $u(x) \in W_2^{k+2}(\Omega)$ может быть продолжена из Ω на R^2 так, чтобы

$$u(x) \in W_2^{k+2}(R^2) \ \text{ и } \ ||u||_{W_2^{k+2}(R^2)} \leq C||u||_{W_2^{k+2}(\Omega)}, \quad k = -2, -1, 0, 1, \ldots \ \text{ и } \ f(x) \in W_2^k(\Omega).$$

Тогда существует решение задачи (1.2), и для него имеется оценка

$$||u||_{W_2^{k+2}(\Omega)} \leq C||f||_{W_2^k(\Omega)}.$$

Здесь для исходной функции и ее продолжения использованы одинаковые обозначения. Далее мы излагаем новый метод приближенного решения краевой задачи (1.2) в области сложной геометрии. Все выкладки преследуют цель максимально упростить изложение, чтобы идея нового метода стала доступна. Для этого, например, мы избегаем использования пространств Соболева с дробными показателями, которые, безусловно, появляются в точных теоремах о следах в теории вложений. Читатель, желающий уточнить наши результаты, сможет это сделать, использовав точные теоремы вложения, точные теоремы о следах и продолжениях, а также точные оценки решения краевых задач эллиптического типа. Однако это не даст существенного приемущества для численного решения задачи.

Метод 1. В квадрате $Q = (a, b) \times (a, b)$, строго содержащем область Ω, рассмотрим задачу

$$-\Delta v + v + v^3 = f_1(x), \tag{1.3}$$

$$v\big|_{x_1=a} = v\big|_{x_1=b}, \quad v\big|_{x_2=a} = v\big|_{x_2=b},$$
$$\frac{\partial v}{\partial x_1}\Big|_{x_1=a} = \frac{\partial v}{\partial x_1}\Big|_{x_1=b}, \quad \frac{\partial v}{\partial x_2}\Big|_{x_2=a} = \frac{\partial v}{\partial x_2}\Big|_{x_2=b}, \tag{1.4}$$

где $f_1(x)$ — некоторое продолжение $f(x)$.

Обозначим

$$-\Delta v + v = S, \quad v = \int\limits_Q G(x,y)S(y)dy. \tag{1.5}$$

Тогда для S получим уравнение

$$S + \left[\int\limits_Q G(x,y)S(y)dy\right]^3 - f_1(x) = 0. \tag{1.6}$$

Здесь $G(x,y)$ — функция Грина для оператора $-\Delta + E$ на Q с периодически краевыми условиями. $G(x,y)$ выписывается явно в виде ряда

$$G(x,y) = C(a,b) \sum_{m_1,m_2=-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{i<m,x-y>2\pi/(b-a)})}{|m_1|^2 + |m_2|^2 + ((b-a)/2\pi)^2}.$$

Здесь $C(a,b)$ — постоянное число.

Теперь, учитывая выполнение равенства (1.5), напишем интегральное тождество

$$\int\limits_Q \Theta(F(x)) \left[S(x) + \left(\int\limits_Q G(x,y)S(y)dy\right)^3 - f_1(x)\right]^2 dx = 0, \tag{1.7}$$

где $\Theta(F(x))$ — функция, равная 1 при $F(x) > 0$ (т. е. при $x \in \Omega$) и нулю при $F(x) < 0$ (т. е. при $x \notin \Omega$).

Кроме (1.6) должно выполняться условие

$$v(x)\big|_{x\in\partial\Omega} = \int\limits_Q G(x,y)S(y)dy\big|_{\partial\Omega} = 0.$$

Это условие эквивалентно (почти всюду) условию

$$\int\limits_{\partial\Omega} R(x) \left[\int\limits_Q G(x,y)S(y)dy\right]^2 dl_x = 0, \tag{1.7$'$}$$

где $R(x)$ — любая непрерывная строго положительная функция; dl_x — элемент поверхности $\partial\Omega$. Перепишем правую часть последнего равенства

$$\int\limits_{\partial\Omega} R(x) \left(\int\limits_Q G(x,y)S(y)dy \cdot \int\limits_Q G(x,\xi)S(\xi)d\xi\right) dl_x =$$

$$= \int\limits_Q \int\limits_Q S(y)S(\xi) \left[\int\limits_{\partial\Omega} R(x)G(x,y)G(x,\xi)dl_x\right] dyd\xi = \int\limits_Q \int\limits_Q R_\Omega(y,\xi)S(y)S(\xi)dyd\xi = 0, \tag{1.8}$$

где

$$R_{\Omega}(y,\xi)=\int\limits_{\partial\Omega}R(\xi)G(x,y)G(x,\xi)dl_x.$$

По определению ядро $R_{\Omega}(y,\xi)$ задает неотрицательный оператор. Поэтому (1.7) и (1.7′) можно записать в виде одного равенства

$$J(S)=\int\limits_{Q}\Theta(F(x))\left(S(x)+\left(\int\limits_{Q}G(x,y)S(y)dy\right)^3-f_1(x)\right)^2dx+\iint\limits_{Q\,Q}R_{\Omega}(y,\xi)S(y)S(\xi)dy=0. \quad (1.9)$$

В (1.9) оба слагаемых неотрицательны. Поэтому, если $J(S)=0$, то из (1.5), (1.9) получаем, что $v(x)$ в Ω есть решение уравнения

$$-\Delta v+v+v^3=f(x)$$

и обращается в нуль на $\partial\Omega$. Следовательно, $v(x)$ является решением задачи (1.2) в области Ω. Обратно, если $v(x)$ — решение задачи (1.2), то приведенные построения показывают, что функция $S(x)$, определенная равенством (1.5), обращает функционал $J(S)$ в нуль. Из этих заключений вытекает, что задача (1.2) эквивалентна задаче на минимум функционала $J(S)$. Найдя S, реализующий минимум $J(S)$, по формуле (1.5) найдем решение задачи (1.2). Таким образом, мы задачу (1.2) свели к вариационной задаче отыскания равного нулю минимума неотрицательного функционала $J(S)$. При этом мы пользуемся только ограниченными интегральными операторами и ограниченными функционалами.

Обобщение метода 1. Пусть $\phi_1(x),\phi_2(x),...$ — произвольная ортонормированная система собственных функций оператора $-\Delta+E$, которым соответствуют действительные собственные числа $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n,...$ Обозначим через $G(x,y)$ ядро

$$G(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^{-1}\phi_n(x)\phi_n(y),$$

положив

$$-\Delta v+v=S,\quad v(x)=\int\limits_{Q}G(x,y)S(y)dy=GS.$$

Точно так же, как это мы делали в п. 1, получим вариационную задачу для функционала

$$J(S)=\int\limits_{Q}\Theta(F(x))\left(S+(GS)^3+f\right)^2dx+\int\limits_{Q}\int\limits_{Q}S(y)S(x)\int\limits_{\partial\Omega}R(\xi)G(\xi,x)G(\xi,y)dl_xdydx.$$

При численном решении уравнения (1.9) ядра могут оказаться не самыми удобными, хотя имеют явный вид. Ниже будут рассмотрены некоторые ядра, которые можно использовать в уравнении (1.9).

Определение. *Будем говорить, что ядро $K(x,y)$, $(x,y)\in Q$, принадлежит классу $K_{\varepsilon}^{l,m}(Q)$, если оно l раз непрерывно дифференцуемо по всем переменным, и любую функцию $u(x)$ из $W_2^l(Q)$ можно приблизить функцией вида*

$$g(x)=KS(x)=\int\limits_{Q}K(x,y)S(y)dy,\quad S(x)\in L_2(Q),$$

так чтобы

$$||D^k u - D^k g||_{L_2(Q)} \leq C\varepsilon, \quad |k| \leq m, \quad m \leq l,$$

где $C(\cdot)$ *зависит только от нормы* $u(x)$ *в пространстве* $W_2^l(Q)$; $D^k = \dfrac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2}}$ *— оператор дифференцирования* $(k_1 + k_2 = k)$; ε *— малое положительное число.*

Приближенное решение задачи (1.2) ищем в виде

$$u(x) = KS(x) = \int\limits_Q K(x,y)S(y)dy, \tag{1.10}$$

где ядро $K(x,y)$ из класса $K_\varepsilon^{(2,2)}$.

Подставив (1.10) в уравнение (1.2), получаем

$$\int\limits_Q \left(-\Delta_x K(x,y) + K(x,y)\right) S(y)dy + \left(\int\limits_Q K(x,y)S(y)dy\right)^3 - f(x) = O(\varepsilon). \tag{1.11}$$

Вместо условий $u|_{\partial\Omega} = 0$ имеем

$$\int\limits_Q K(x,y)S(y)dy\Big|_{\partial\Omega} = O(\varepsilon). \tag{1.12}$$

При выписывании (1.12) мы воспользовались тем, что след функций из $W_2^2(\Omega)$ принадлежит классу непрерывных функций. Введем функционал

$$J(S) = \int\limits_Q \Theta(F(x)) \left[\int\limits_Q \left(-\Delta_x K(x,y) + K(x,y)\right) S(y)dy + \left(\int\limits_Q K(x,y)S(y)dy\right)^3 - f(x)\right]^2 dx +$$

$$+ \int\limits_Q \int\limits_Q S(y)S(\xi) \int\limits_{\partial\Omega} K(x,y)K(x,\xi)dl_x dy d\xi. \tag{1.13}$$

Здесь $\Theta(F(x))$ — функция, которая участвует в формуле (1.9).

Теперь легко видеть, что проблема приближенного решения задачи (1.2) свелась к задаче минимизации функционала (1.13), минимум которого имеет порядок $O(\varepsilon)$. Задачей приближенной численной минимизации функционалов мы займемся в другом месте. Ниже покажем, что ядер из класса $K_\varepsilon^{l,m}$ достаточно много. Для простоты будем считать, что l и m равны нулю.

Лемма 1. *Пусть* $K(x,y) = K(y,x)$ *и* $K(x,y)$ *— действительная непрерывная в* $Q \times Q$ *функция. Тогда оператор*

$$KS = \int\limits_Q K(x,y)S(y)dy$$

— самосопряженный и вполне непрерывный в $L_2(Q)$. *Предположим, что система собственных функций оператора* K, *соответствующих ненулевым собственным значениям, полна. Тогда при любом* $\varepsilon > 0$ *ядро* $K(x,y)$ *принадлежит классу* $K_\varepsilon^{(0,0)}$.

Доказательство. Пусть ψ_1, ψ_2, ..., ψ_n, ... — нормированные собственные функции оператора K. Из условий леммы следует, что эта система есть полная ортонормированная система. Поэтому для любой функции из $L_2(Q)$ справедливо равенство

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \psi_n$$

— разложение в ряд Фурье. Пусть ε — произвольное положительное число. Обозначим

$$u_N(x) = \sum_{n=1}^{N} {}_n\psi_n$$

и выберем N таким большим, чтобы выполнялось неравенство

$$\|u(x) - u_N(x)\|_{L_2(Q)} < \varepsilon.$$

Положим

$$S(x) = \sum_{n=1}^{N} C_n \lambda_n^{-1} \psi_n.$$

Тогда

$$KS(x) = \int_Q \sum_{n=1}^{N} C_n \lambda_n^{-1} \psi_n K(x,y) dy = u_N(x).$$

Отсюда следует

$$\|u(x) - KS(x)\|_{L_2(Q)} < \varepsilon.$$

Итак, лемма 1 доказана.

Из леммы 1 вытекает, что симметричных ядер из класса $K_\varepsilon^{(0,0)}$ достаточно много. Примером такого ядра может служить ядро

$$K(x,y) = \sum_{\substack{m_1,m_2=-\infty \\ m=(m_1,m_2)}}^{m_1,m_2=\infty} \mu_m \mathrm{e}^{i<x-y,m>\frac{2\pi}{b-a}}. \tag{1.14}$$

Здесь $\mu_m = \mu_{m_1,m_2}$ — любая последовательность чисел, стремящихся к нулю при $|m| \to \infty$ и

$$\mu_m = \overline{\mu}_{-m} \quad |\mu_m| \neq 0.$$

Очевидно, μ_m можно взять таким, чтобы легко просуммировать (1.14) и выписать аналитический вид $K(x,y)$. Если взять μ_m убывающим достаточно быстро, но $|\mu_m| \neq 0$ при всех $m = (m_1, m_2)$, то нетрудно убедиться, что $K(x,y)$ будет принадлежать $K_\varepsilon^{(l,l)}$ при любом l, если

$$0 < |\mu_m| \leq C \left(\frac{1}{m_1^2 + m_2^2} \right)^{-2l}.$$

В (1.11) ядро $K(x,y)$, как мы убедились, можно взять достаточно простым. Приведем еще пример ядра. При $|\xi|, |\eta| < 1$ положим

$$K(x,y) = \phi(x_1 - y_1, x_2 - y_2),$$

где

$$\phi(x_1,x_2) = \sum_{n_1,n_2=-\infty}^{\infty} \xi^{|n_1|} \eta^{|n_2|} \mathrm{e}^{in_1x_1 + in_2x_2} = \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \xi^{|n_1|x_1} \mathrm{e}^{in_1x_1} \left(\sum_{n_2=-\infty}^{\infty} \eta^{|n_2|} \mathrm{e}^{in_2x_2} \right) =$$

$$= \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \xi^{|n_1|} \mathrm{e}^{in_1x_1} \left(\sum_{n_2=0}^{\infty} \eta^{n_2} \mathrm{e}^{in_2x_2} + \sum_{n_2=1}^{\infty} \eta^{n_2} \mathrm{e}^{-in_2x_2} \right) =$$

$$= \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \xi^{|n_1|} e^{in_1x_1} \left(\frac{1}{1-e^{ix_2}\eta} + \frac{e^{-ix_2}\eta}{1-e^{-ix_2}\eta} \right) =$$

$$= \left(\frac{1}{1-e^{ix_2}\eta} + \frac{e^{-ix_2}\eta}{1-e^{-ix_2}\eta} \right) \left(\frac{1}{1-e^{ix_1}\xi} + \frac{e^{-ix_1}\xi}{1-e^{-ix_1}\xi} \right) =$$

$$= \left(-1 + \frac{1}{1+e^{ix_2}\eta} + \frac{1}{1-e^{-ix_2}\eta} \right) \left(-1 + \frac{1}{1-e^{ix_1}\xi} + \frac{1}{1-e^{-ix_1}\xi} \right) =$$

$$= \left(\frac{2(1-\eta\cos x_2)}{(1-\eta\cos x_2)^2 + \eta^2\sin^2 x_2} - 1 \right) \left(\frac{2(1-\xi\cos x_1)}{(1-\xi\cos x_1)^2 + \xi^2\sin^2 x_1} - 1 \right).$$

Удачный выбор $K(x,y)$, очевидно, зависит от искусства пользователя. Но в (1.13) присутствует поверхностный интеграл по $\partial\Omega$, вычисление которого, если граница $\partial\Omega$ сложно устроена, может вызвать некоторые затруднения. Поэтому ниже мы предлагаем прием, использование которого приводит к отсутствию поверхностного интеграла в вариационном принципе.

2. Другой вариационный принцип для численного решения задачи (1.2)

Пусть $\Omega, F(x)$ — те же, что и в п. 1, $f(x) \in W_2^k(\Omega)$. Решение задачи (1.2) принадлежит классу $W_2^{k+2}(\Omega)$ и может быть продолжено на все R^2 так, чтобы [6]

$$\|u(x)\|_{W_2^{k+2}(R^2)} \le C\|f\|_{W_2^k(\Omega)}.$$

Так как $u|_{\partial\Omega} = 0$, то решение задачи (1.2) может быть представлено в виде

$$\psi(x)u(x) = F(x)v(x), \tag{2.1}$$

где $\psi(x) \in C_0^\infty(Q)$, $\psi(x) = 1$ на Ω, а $v(x) \in W_2^{k+1}(Q)$. Для получения такого представления положим

$$\tilde{v}(x) = \frac{\psi(x)u(x)}{F(x)}.$$

Эта функция имеет особенности в точках $\partial\Omega$.

Разложив $u(x)$ в ряд Тейлора в окрестности точек $\partial\Omega$ и пользуясь тем, что $u(x) \in W_2^{k+2}(Q)$ и $u|_{\partial\Omega} = 0$, легко получаем $\tilde{v}(x) \in W_2^{k+1}(Q)$. Теперь в качестве $v(x)$ в (2.1) берем $\tilde{v}(x)$. Пусть $\varepsilon > 0$, ядро $K(x,y)$ из класса $K_\varepsilon^{(k+1,k+1)}$ и $k \ge 1$. Положим

$$v_\varepsilon(x) = KS = \int\limits_Q K(x,y)S(y)dy, \tag{2.2}$$

где $S(\cdot) \in W_2^{k+1}(Q)$ и выполняется условие

$$\|v(x) - v_\varepsilon(x)\|_{W_2^{k+1}} \le C(\|v\|_{W_2^{k+1}})\varepsilon. \tag{2.3}$$

Отсюда вытекает, что функция

$$u_\varepsilon(x) = F(x)v_\varepsilon(x) = F(x)KS = F(x)\int\limits_Q K(x,y)S(y)dy \tag{2.4}$$

является приближенным решением задачи (1.2). Построим функционал

$$J(S) = \int\limits_Q (-\Delta[F(x)KS(x)] + F(x)KS(x)+$$

$$+ \left(F(x)KS(x))^3 - f(x)\right)^2 \Theta(F(x))dx + \tilde{\delta} \int\limits_Q |KS(x)|^2 dx, \qquad (2.5)$$

где $\tilde{\delta}$ — малая положительная постоянная. Из (2.3), (2.4) вытекает, что, минимизируя (2.5), получаем приближенное решение задачи (1.2). Если $\tilde{\delta} = 0$, то наличие множителя $F(x)$ при $KS(x)$ может привести к неправильному результату (ибо будет иметь место "вырождение") и к тому, что минимизирующая последовательность функционала (2.5), последовательность $KS_m(x)$, стремится по норме к бесконечности. Добавление слагаемого "регуляризует" процесс минимизации. Таким образом, мы свели проблему приближенного решения задачи (1.2) к проблеме минимизации функционала (2.5).

3. Проблема выбора ядра

Пусть $\psi(t)$ — r раз ($r \geq 0$ — целое число) непрерывно дифференцируемая функция $\psi(t) \not\equiv 0$ на отрезке $[-1, 1]$. Предположим, что

$$\psi^l(t)|_{t=\pm 1} = 0, \quad l = 0, 1, ..., r. \qquad (3.1)$$

Пусть $0 < \delta < \pi$. Положим $\psi_\delta(t) = \psi\left(\frac{t}{\delta}\right)$ при $|t| \leq \delta$ и $\psi_\delta(t) = 0$ при $\delta < t \leq \pi$ и $-\pi < t < -\delta$. Функцию $\psi_\delta(t)$, заданную на отрезке $[-\pi, \pi]$, продолжим периодической. В результате получим периодическую функцию из $C^l[-\pi, \pi]$. Коэффициенты Фурье для этой функции по системе $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{ikt}\right\}$ определяются так:

$$C_k(\delta) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{ikt} \psi\left(\frac{t}{\delta}\right) dt = \int\limits_{-\delta}^{\delta} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{ikt} \psi\left(\frac{t}{\delta}\right) dt = \delta \int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{ikt\delta} \psi(t) dt. \qquad (3.2)$$

Лемма 2. *Пусть T есть множество тех δ из $(0, \pi)$, для которых существует такое k, что $C_k(\delta) = 0$. Тогда множество таких $\delta \in (0, \pi)$, что $C_k(\delta) \neq 0$ при всех $k = 0, \pm 1, ...$ имеет меру Лебега π (т. е. полную меру).*

Доказательство. Из (3.2) вытекает, что при каждом фиксированном k множество $\delta \in (0, \pi)$, для которых $C_k(\delta) = 0$, конечно. Действительно, из (3.2) следует, что $C_k(\delta)$ — аналитическая функция от δ в любой конечной области, а аналитическая функция в любой строго внутренней к области аналитичности подобласти имеет конечное число корней.

Так как множество целых чисел счетно, а объединение счетного множества счетных множеств тоже счетно, то мера множества T равна нулю. Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Пусть $\psi_\delta(t)$ — функция из леммы 2. Положим $\varphi_\delta(x) = \psi_\delta(x_1)\psi_\delta(x_2)$, $x = (x_1, x_2)$. Коэффициенты Фурье функции $\psi_\delta(x)$ в пространстве $L_2(Q)$ по системе*

$$\left\{\frac{1}{2\pi} \mathrm{e}^{ikx}\right\}_{k_1,k_2=-\infty}^{k_1,k_2=+\infty}, \quad k = (k_1, k_2)$$

обозначим через $C_{k_1k_2}(\delta)$. *Тогда множество тех* $\delta \in (0,\pi)$, *для которых найдутся* k_1 *и* k_2 *такие, что* $C_{k_1k_2}(\delta) = 0$, *не более чем счетно.*

Следствие. *Множество тех* $\delta \in (0,\pi)$, *для которых* $C_{k_1k_2}(\delta) \neq 0$, *для любых целых* k_1 *и* k_2 *имеет меру, равную* π *(т. е. полную меру Лебега).*

Доказательство леммы следует из равенства

$$C_{k_1k_2} = C_{k_1}C_{k_2},$$

если учесть, что объединение счетного множества счетно.

Теорема 1. *Пусть* $\varphi_\delta(x) = \varphi_\delta(x_1,x_2)$ *— функция из леммы 3. Тогда для почти любого* $\delta \in (0,\pi)$ *ядро* $K_\delta(x,y) = \varphi_\delta(x-y)$ *есть ядро из класса* $K_\varepsilon^{(l,l)}(Q)$. $Q = (-\pi,\pi)\times(-\pi,\pi)$ *при любом* $\varepsilon > 0$.

Доказательство. Возьмем $\delta \in (0,\pi)$ таким, что для всех пар (k_1,k_2)

$$C_{k_1k_2}(\delta) \neq 0. \tag{3.3}$$

Согласно лемме 3, множество δ из $(0,\pi)$, для которых справедливо (3.3), имеет полную меру.

Теперь покажем, что при выполнении условия (3.3) любую функцию $u(x)$ из класса $W^l_{2\pi}(Q)$ — периодических функций Соболева — можно приблизить с точностью $\varepsilon > 0$ функцией вида

$$u_\varepsilon(x) = K_\delta S(x) = \int\limits_Q K_\delta(x,y)S(y)dy = \int\limits_Q \varphi_\delta(x-y)S(y)dy. \tag{3.4}$$

Пусть $u \in W^l_{2\pi}(Q)$. Тогда

$$u(x_1,x_2) = \sum_{k_1,k_2=-\infty}^{\infty} u_{k_1k_2}\mathrm{e}^{ik_1x_1+ix_2k_2},$$

$$\|u\|^2_{W^l_{2\pi}(Q)} = C\sum_{k_1,k_2=-\infty}^{\infty}\left(k_1^2+k_2^2+1\right)^{-l}|u_{k_1k_2}|^2.$$

Пусть $\varepsilon > 0$ — заданное малое число. Возьмем $N > 0$ настолько большим, что

$$\|u-u_N\|^2_{W^l_{2\pi}(Q)} = C\sum_{k_1^2+k_2^2>N^2}\left(k_1^2+k_2^2+1\right)^{-l}|u_{k_1k_2}|^2 \le \varepsilon^2, \tag{3.5}$$

где

$$u_N = \sum_{k_1^2+k_2^2\le N^2} u_{k_1k_2}\mathrm{e}^{ik_1x_1+ik_2x_2}.$$

Найдем в (3.4) $S(x) = S(x_1,x_2)$ в виде

$$S(x) = \sum_{k_1^2+k_2^2\le N^2} u_{k_1k_2}S_{k_1k_2}\mathrm{e}^{ik_1x_1+ik_2x_2},$$

тогда имеем

$$(K_\delta S)(x) = \int\limits_Q \varphi_\delta(x_1-y_1,x_2-y_2)S(y_1,y_2)dy_1dy_2 = \sum_{k_1^2+k_2^2\le N^2} S_{k_1k_2}u_{k_1k_2}C_{k_1k_2}\mathrm{e}^{ik_1x_1+ik_2x_2}.$$

Возьмем

$$S_{k_1k_2} = 0 \quad \text{при} \quad k_1^2 + k_2^2 > N^2 \quad \text{и} \quad S_{k_1k_2} = C_{k_1k_2}^{-1} \quad \text{при} \quad k_1^2 + k_2^2 \leq N^2.$$

Тогда получаем $(K_\delta S)(x) = u_N(x)$. Отсюда из (3.5) вытекает утверждение теоремы 1. ■

Из этой теоремы следует, что при сведении задачи (1.2) к вариационной задаче можно пользоваться ядром вида $\varphi_\delta(x-y)$ и это должно привести к успеху почти при всех $\delta \in (0,\pi)$. Поэтому проблема выбора ядра не является слишком затруднительной. Кроме того, по ходу счета можно варьировать также δ. Отметим, что если ядро из класса $K_\varepsilon^{(l,m)}$, то $K(x,y) \in K_\varepsilon^{(l_1,m_1)}$ при $l_1 \geq l,\ m \geq m_1$, т. е.

$$K_\varepsilon^{(l_1,m_1)} \subset K_\varepsilon^{(l,m)}. \tag{3.6}$$

4. Минимизация функционала

Далее будем заниматься минимизацией функционала (2.5), введенного в п. 2, который для удобства перепишем при $\delta = 0$:

$$J(S) = \int\limits_Q \left[(-\Delta+1)F(x)(KS)(x) + (F(x)(KS)(x))^3 - f(x)\right]^2 \Theta(F(x))dx =$$

$$= \|(MFKS + (FKS)^3 - f)\Theta(F)\|^2_{L_2(Q)} = J_0(S),$$
$$M = -\Delta + E. \tag{4.1}$$

Будем искать S в виде $S = S(\xi,x) = S(\xi)$ как функцию от параметра $\xi \geq 0$. Пусть при $\xi = 0$ функция S равна начальному приближению

$$S(\xi)|_{\xi=0} = S_0.$$

Продифференцируем (4.1) по ξ:

$$\frac{d}{d\xi}J = 2\big\langle \Theta(F)(MFKS + (FKS)^3 - f), \big(MF(x)KS_\xi + 3(F(x)KS)^2FKS_\xi\big)\big\rangle =$$

$$= 2\langle (MF(x)K)^* + 3(FK)^* \cdot (FKS)^2, (\Theta(F)(MFKS + (FKS)^2) - f),\ S_\xi\rangle. \tag{4.2}$$

Выберем S из уравнения

$$S_\xi = -2((MFK)^* + 3(FK)^*(FKS)^2)(\Theta(F)(MFKS + (FKS)^3 - f)), \tag{4.3}$$

$$S|_{\xi=0} = S_0. \tag{4.4}$$

Для S получаем задачу Коши (4.3), (4.4). Из (4.2) – (4.4) вытекает

$$\frac{d}{d\xi}J = -||S_\xi||^2_{L_2(Q)}, \quad J|_{\xi=0} = J(S_0).$$

Интегрируя это равенство, получим

$$J(S(\xi)) = J(S_0) - \int\limits_0^\xi ||S_\xi||^2_{L_2(Q)}d\xi < J(S_0). \tag{4.5}$$

Отсюда из определения $J(S)$ и (4.5) вытекает

$$-\Delta\tilde{g} + \tilde{g} + \tilde{g}^3 = \tilde{f}; \quad ||\tilde{f}||_{L_2(Q)} \leq \sqrt{J(S_0)} + ||f||_{L_2(Q)},$$
$$\tilde{g}\big|_{\partial\Omega} = 0,$$

где $\tilde{g} = FKS$.

Умножая это уравнение скалярно на $\tilde{g}$, интегрируя по области Ω и применяя неравенство Коши и Юнга, имеем

$$\int\limits_{\Omega} \left(|\nabla\tilde{g}|^2 + |\tilde{g}|^4\right) dx \leq C\left(\sqrt{J(S_0)} + ||f||_{L_2(Q)}\right)^2.$$

Это неравенство и теорема вложения $\overset{0}{W}{}^1_2(\Omega) \in L_q(\Omega)$ дают

$$||FKS||_{L_q(\Omega)} + ||\nabla FKS||_{\overset{0}{W}{}^1_2(\Omega)} \leq C\left(\sqrt{J(S_0)} + ||f||_{L_2(Q)}\right),$$

где q любое число из $(1,\infty)$. С помощью уравнения для $\tilde{g} = FKS$ и последнего неравенства, привлекая обычную технику "сглаживания решения" [6], получим

$$FKS \in W_2^2(\Omega) \cap \overset{0}{W}{}^1_2(\Omega), \quad ||FKS||_{W_2^2(\Omega)} \leq C\left(\sqrt{J(S_0)} + ||f||_{L_2(Q)}\right). \tag{4.6}$$

Возьмем в качестве ядра интегрального оператора функцию $K(x-y)$, где $K(\cdot)$ — периодическая на Q, трижды непрерывно дифференцируемая так, что все коэффициенты Фурье отличны от нуля.

$$Ku = K * u = \int\limits_Q K(x-y)u(y)dy, \tag{4.7}$$

$$K(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi_k e^{i<k,x>}, \quad \varphi_k = \varphi_{k_1k_2} \neq 0 \quad \text{для всех} \quad k = (k_1, k_2).$$

Умножим уравнение (4.3) скалярно на некоторую периодическую функцию $u(x)$ и проинтегрируем

$$< S_\xi, u >= -2 < \Theta(F)g, (M + 3(FKS)^2)FKu >, \tag{4.8}$$

где $g = MFKS + (FKS)^3 - f$.

Рассмотрим задачу

$$Mv + 3(FKS)^2v = -\Delta v + v + 3(FKS)^2v = A(\Theta(F)g), \tag{4.9}$$
$$v|_{\partial\Omega} = 0,$$

где g взято из (4.8), а A есть оператор, обратный оператору

$$Lu = -\Delta u + u, \quad u|_{\partial\Omega} = 0.$$

Из $J(S) \leq J(S_0)$ вытекает, что $||g||_{L_2(\Omega)}$ ограничен. Поэтому

$$||Ag||_{W_2^2(\Omega)} \leq C_1 < \infty.$$

Но тогда из (4.6), (4.9) получаем, что

$$v \in W_2^4(\Omega) \cap \overset{0}{W_2^1}(\Omega)$$

и

$$||v||_{W_2^4(\Omega)} \le C_2\left(\sqrt{J(S_0)}, ||f||_{L_2(\Omega)}\right). \tag{4.10}$$

Это возможно в силу ограничений, наложенных на $\partial\Omega$, и на основании теории о продолжении функции из классов Соболева. Отсюда вытекает, что функцию v можно представить в виде

$$v = F(x)\tilde{u}, \;\; \tilde{u} \in W_2^3(Q),$$

$$||\tilde{u}||_{W_2^3(Q)} \le C_4\left(\sqrt{J(S_0)}, ||f||_{L_2(\Omega)}\right). \tag{4.11}$$

Обозначим через $\tilde{u}_k$ коэффициенты Фурье функций $\tilde{u}$ и положим

$$u_k = \begin{cases} \varphi_k^{-1}\tilde{u}_k \quad \text{при} \quad |k|^2 \le N^2, \\ 0 \quad \text{при} \quad |k|^2 > N^2, \end{cases} \tag{4.12}$$

где φ_k — коэффициенты Фурье $K(x)$. Обозначим

$$u = \sum_{|k|^2 \le N^2} u_k \mathrm{e}^{i<k,x>}. \tag{4.13}$$

Тогда, учитывая (4.12), имеем

$$\tilde{u} - Ku = \tilde{u} - K * u = \sum_{|k|^2 > N^2} \mathrm{e}^{i<k,x>}\tilde{u}_k = \psi_N(x). \tag{4.14}$$

Для ψ_N в силу (4.11) справедлива оценка

$$||\psi_N||_{W_2^2(Q)} \le \frac{1}{\sqrt{N}} C_4\left(\sqrt{J(S_0)}, ||f||_{L_2(\Omega)}\right). \tag{4.15}$$

Преобразуя (4.8) с использованием (4.10), (4.13), (4.14), получим

$$< S_t, u >= -2 < \Theta(F)g, (M + 3(FKS)^2 F(\tilde{u} - \psi_N) >=$$

$$= -2 < \Theta(F)g, (M + 3(FKS)^2 v - (M + 3(FKS)^2)\psi_N > .$$

Теперь, учитывая уравнение (4.9) и неравенство (4.15), запишем

$$\frac{1}{2}||S_\xi||_{L_2(Q)}||u||_{L_2(Q)} \ge < \Theta(F)g, A\Theta(F)g > -$$

$$-C||\Theta(F)g||\frac{1}{\sqrt{N}} = ||\sqrt{A}\Theta(F)g||^2 - ||\Theta(F)g||\frac{1}{\sqrt{N}}.$$

Оценим $||u||_{L_2(Q)}$, учитывая (4.12) и (4.11):

$$||u||^2_{L_2(Q)} = \sum_{|k|^2 \le N^2} |\tilde{u}_k|^2 |\varphi_k|^{-2} \le ||\tilde{u}||^2_{L_2(Q)} R_N^2 \le C R_N^2,$$

где C не зависит от N и u, а $R_N = \sup\limits_{|k|^2 \le N^2} |\varphi_k|^{-2}$. Это и предыдущее неравенство дают

$$||S_\xi||_{L_2(Q)} \geq \frac{1}{C_1 R_N} \left[||\sqrt{A}\Theta(F)g||^2_{L_2(\Omega)} - \frac{||\Theta(F)g||_{L_2(\Omega)}}{\sqrt{N}} \right], \tag{4.16}$$

где постоянная C_1 не зависит от S, N и g из (4.8). Покажем, что при $\xi \to \infty$ имеет место

$$||\sqrt{A}\Theta(F)g||_{L_2(\Omega)} \to 0. \tag{4.17}$$

Допустим, что (4.17) не выполнено. Тогда существуют числа $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_m, ... \to \infty$ такие, что

$$||\Theta(F)g||_{L_2(\Omega)} \geq C^{-1}||\sqrt{A}\Theta(F)g||_{L_2(\Omega)} \geq \delta_0 > 0 \tag{4.18}$$

при $\xi = \xi_1, \xi_2, ..., \xi_m, ...$

В (4.16) возьмем N достаточно большим и так, чтобы

$$\frac{||\Theta(F)g||_{L_2(\Omega)}}{\sqrt{N}} \leq \frac{1}{4}\delta_0$$

для всех $\xi \geq 0$. Это возможно в силу определения $J(s)$ и неравенства (4.5). Следовательно, из (4.16) и (4.18) получаем

$$||S_\xi||_{L_2(Q)} \geq \frac{\delta_0}{C_2 R_N} \tag{4.19}$$

при $\xi = \xi_1, \xi_2, ..., \xi_m, ...$

Из оценок (4.6) для FKS вытекает, что правая часть уравнения (4.3) в норме по ξ равномерно ограничена, но тогда ограничена равномерно по $\xi \in (0, \infty)$ и сама S_ξ. Отсюда и следует что, S — равностепенно непрерывна по норме. Поэтому равностепенно непрерывна и правая часть (4.3). Но тогда в силу (4.3) равностепенно непрерывна и равномерно ограничена по норме S_ξ. Из сказанного следует что, у каждой точки ξ_m из (4.19) существуют окрестности (отрезки) U_m постоянной, не зависящей от m длины, на которых при $\xi \in U_m$, $m = 1, 2, ...$

$$\|S_\xi\|^2_{L_2(Q)} \geq \frac{1}{2}\left(\frac{\delta_0}{C_2 R_N}\right)^2. \tag{4.20}$$

Очевидно, что в (4.20) отрезки U_m можно считать попарно не пересекающимися. Так как общая длина этих отрезков равна $+\infty$, то из (4.20) следует

$$\int\limits_0^\infty \|S_\xi\|^2_{L_2(Q)} d\xi = \infty.$$

Это равенство противоречит (4.5), поэтому (4.17) доказано. Имеет место следующая

Теорема 2. *Пусть при $\xi > 0$ функция $S(\xi) = S(\xi, x)$ определяется из задачи Коши (4.3), (4.4). Тогда для $FKS(\xi)$ при $\xi \to \infty$ имеет место*

$$-\Delta FKS + FKS + (FKS)^3 - f \to 0 \ \textit{слабо в} \ L_2(\Omega).$$

Доказательство. Из определения $J(S)$ и равенства (4.5) вытекает, что

$$\| - \Delta FKS + FKS + (FKS)^3 - f\|_{L_2(\Omega)} \leq C < \infty.$$

Из (4.17) и определения оператора A получаем

$$FKS + A(FKS)^3 - Af \to 0.$$

■

При $\xi \to \infty$ функция $KS(\xi) = FKS(\xi, x)$ стремится к решению задачи (1.2). При численной минимизации функционала (4.1) решение задачи Коши (4.3), (4.4) сводится к итерационному процессу

$$S_{n+1} = S_n - 2\tau_n\{((MFK)^* + 3(FK)^*(FKS_n)^2)\Theta(F)[MFKS_n + (FKS_n)^3 - f(x)]\}.$$

Шаг τ_n можно выбрать постоянным (и малым), но проще выбрать переменным, подвергая оптимизации.

Замечание 4.1. В функционале (2.5) присутствует слагаемое $\delta \int\limits_{\Omega} |KS|^2 dx$ (можно вместо него добавить $\delta \int\limits_{\Omega} |S|^2 dx$), где $\delta > 0$ — малое число. Такое слагаемое следует добавлять для регуляризации задачи на минимум. Вводить такие слагаемые необходимо, если исходная задача имеет слабое решение, которое не является гладким. В нашей задаче такой необходимости не было, поэтому мы убрали эти слагаемые. Такая возможность есть следствие необходимости “сглаживать” решение исходной задачи.

Замечание 4.2. Для задачи (1.2) в пп. 1 и 2 выводимы и другие функционалы (в которых отсутствует член, содержащий δ). Для них доказательства, аналогичные теореме 2, проводятся проще. Предложенные методы вычисления устойчивы и просто реализуются.

Замечание 4.3. В предлагаемых нами методах ядро $K(x, y)$, как мы видим, можно выбрать из очень широкого класса функций (не ограничиваясь функциями Грина тех же задач для главной части оператора). Это весьма важно. Можно при фиксированном $\varepsilon > 0$ ядро из класса $K_\varepsilon^{(l,m)}$ взять конечномерным и прийти к различным вариантам метода Галеркина. Выбирая ядро в виде конечной суммы δ-образных функций, можно получить легко реализуемые разностные схемы.

Замечание 4.4. Приближенное решение задачи (1.2) мы представили как

$$u = F(x)v(x) = F(x)KS(x),$$

где K — интегральный оператор. Для того чтобы избежать опасности неограниченного роста в ходе итераций $KS(x)$ к бесконечности, приближенное решение можно искать в виде

$$u = F(x)\phi_N(KS),$$

где $\phi_N(\cdot)$ — гладкая срезающая функция, которая удовлетворяет условию

$$\phi_N(t) = \begin{cases} t \quad \text{при} \quad |t| < N, \\ 2N \quad \text{при} \quad |t| \le 2N. \end{cases}$$

Замечание 4.5. Рассмотрим неоднородную задачу Дирихле

$$-\Delta u + u + u^3 = f, \tag{4.21}$$

$$u\big|_{\partial\Omega} = \phi, \ \partial\Omega = \{x, \ F(x) = 0\}.$$

В этом случае функцию u представляем в виде

$$u = F(x)v + \phi.$$

Здесь ϕ — любое продолжение $\phi(x)$ из $\partial\Omega$ на Q.

Замечание 4.6. Теперь рассмотрим для уравнения (4.21) задачу Неймана

$$\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega} = 0 \tag{4.22}$$

(n — внешняя нормаль к границе $\partial\Omega$). В этом случае функцию u представляем в виде

$$u = v - \frac{(\nabla F, \nabla v)}{|\nabla F|^2} F.$$

Заметим, что

$$\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega} = 0.$$

Далее для приближенного решения задач (4.21), (4.22) можно применить методику данной работы. Но этому посвящается специальная работа.

Список литературы

[1] Вабищевич П. Н. Методы фиктивных областей в краевых задачах математической физики. М.: МГУ, 1991.

[2] Смагулов Ш. С. Метод фиктивных областей для уравнений Навье—Стокса // Новосибирск, 1979. (Препр. АН СССР. Сиб. отд-ние. ВЦ).

[3] Смагулов Ш. С., Темирбеков Н. М., Камаубаев К. Моделирование методом фиктивных областей граничного условия для давления в задачах течения вязкой жидкости // Сиб. журн. вычисл. мат. 2000. Т. 3, №1.

[4] Коробицина Ж. А. Метод фиктивных областей для задач фильтрации двухфазной несжимаемой жидкости // Численные методы механики сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. ВЦ; ИТПМ. 1976. Т. 7, №3. С. 103–111.

[5] Коновалов А.Н. Задачи фильтрации многофазной несжимаемой жидкости. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1988. 166 с.

[6] Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973. 576 с.

[7] Мухаметжанов А. Т., Отельбаев М. О., Смагулов Ш. С. Об одном методе фиктивных областей для нелинейных краевых задач // Вычисл. технологии. 1998. Т. 3, №4. С. 41–64.

Поступила в редакцию 22 февраля 2001 г.,
в переработанном виде — 27 июня 2001 г.