Вычислительные технологии **Том 2, № 1, 1997**

ГАРАНТИРОВАННЫЕ ОЦЕНКИ ТОЧНОСТИ ВЫЧИСЛЕНИЙ В ЗАДАЧАХ УПРАВЛЕНИЯ И ОЦЕНИВАНИЯ*

Е. К. Костоусова
Институт математики и механики УрО РАН
Екатеринбург, Россия

А. Б. Куржанский
Московский государственный университет, Россия

Для нахождения трубок траекторий в задачах управления и оценивания развивается подход, при котором точные решения представляются в виде пересечения эллипсоидов или параллелепипедов. Конечное число таких оценок может быть найдено путем параллельных вычислений.

Решение многих задач теории управления в условиях неопределенности и конфликта в гарантированной постановке основывается на исследовании трубок траекторий динамических систем [5, 11]. Существует несколько подходов к разработке численных методов их аппроксимации. Ряд методов основывается на аппроксимации множеств многогранниками с большим числом вершин и граней, что может потребовать огромного объема вычислений. Поэтому развиваются также методы построения внешних и внутренних оценок с помощью областей некоторой фиксированной формы, например эллипсоидов [6, 11, 13]. Сюда же относится и основанный на идеях интервальных вычислений [1, 2] метод покоординатного оценивания [3]. Однако такие оценки могут оказаться слишком грубыми.

В настоящей работе развивается подход [11], состоящий в аппроксимации искомой трубки целым семейством внешних (внутренних) трубок, образованных эллипсоидами либо параллелепипедами. Семейства вводятся таким образом, чтобы, с одной стороны, обеспечить в пределе точную аппроксимацию (через пересечение или объединение), а с другой стороны — чтобы каждая конкретная трубка находилась с помощью эволюционных уравнений независимо от остальных (что открывает возможности для параллельных вычислений). В работе такие семейства строятся для областей достижимости, информационных множеств, трубок выживающих траекторий линейных динамических систем.

---

*Исследования выполнены при финансовой поддержке РФФИ, гранты 94-01-00803, 96-01-00050.

1. Полиэдральные оценки областей достижимости линейных многошаговых систем

Обсудим возможности аппроксимации трубок траекторий при помощи параллелепипедов. Сделаем это на примере задачи нахождения множеств достижимости линейных многошаговых систем

$$x[j] = A[j]\,x[j-1] + w[j], \quad j{=}1, \ldots, N. \tag{1.1}$$

Здесь $A[j]$ — известные неособые $n \times n$-матрицы; начальное состояние $x[0] \in \mathbb{R}^n$ ($\mathbb{R}^n$ — n-мерное евклидово пространство) и входные воздействия $w[j] \in \mathbb{R}^n$ стеснены ограничениями

$$x[0] \in \mathcal{X}_0, \quad w[j] \in \mathcal{W}[j], \quad j{=}1, \ldots, N, \tag{1.2}$$

где $\mathcal{X}_0$, $\mathcal{W}[j]$ — заданные выпуклые компакты в $\mathbb{R}^n$. Эти соотношения могут быть дополнены фазовыми ограничениями

$$x[j] \in \mathcal{Y}[j], \quad j = 1, \ldots, N, \tag{1.3}$$

которые могут порождаться уравнением измерений с неизвестной, но ограниченной помехой [5]

$$y[j] = G[j]\,x[j] + \eta[j], \quad \eta[j] \in \Theta[j] \in \operatorname{conv}\mathbb{R}^m, \quad j = 1, \ldots, N.$$

Областью достижимости $\mathcal{X}[k]$ системы (1.1), (1.2) ((1.1)–(1.3)) называется множество всех тех точек $x{\in}\mathbb{R}^n$, в которые эту систему можно перевести из $\mathcal{X}_0$ за k шагов (не нарушая (1.3)). Далее будем предполагать, что ограничения имеют вид параллелепипедов

$$\mathcal{X}_0 = \mathcal{P}(r[0], R[0], \rho[0]), \quad \mathcal{W}[j] = \mathcal{P}(r[j], R[j], \rho[j]), \quad \mathcal{Y}[j] = \mathcal{P}(q[j], Q[j], \kappa[j]). \tag{1.4}$$

Параллелепипедом $\mathcal{P}(p, P, \pi)$ в $\mathbb{R}^n$ мы называем множество

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}(p, P, \pi) = \{x : x = p + \mathrm{sum}_{i=1}^{n} p^i \pi_i \xi_i,\ |\xi_i| \le 1,\ i = 1, \ldots, n\},$$

где $p \in \mathbb{R}^n$, $P = \{p^i\}$ — неособая матрица со столбцами p^i единичной длины (множество таких матриц обозначим $M_*^{n\times n}$), $\pi \in \mathbb{R}^n$, $\pi_i \ge 0$. Можно сказать, что p задает центр параллелепипеда, p^i — “направления”, а π_i — величины его “полуосей".

Цель состоит не только в том, чтобы найти какие-либо внешние $\mathcal{P}^+[\cdot]$ и внутренние $\mathcal{P}^-[\cdot]$ параллелепипедо-значные аппроксимации для $\mathcal{X}[\cdot]$

$$\mathcal{P}^-[k] \subseteq \mathcal{X}[k] \subseteq \mathcal{P}^+[k], \quad \mathcal{P}^\pm[k] = \mathcal{P}(p^\pm[k], P^\pm[k], \pi^\pm[k]), \tag{1.5}$$

удовлетворяющие обобщенному полугрупповому свойству, но, более того, ввести некоторые семейства таких трубок, которые обеспечивают точные представления:

$$\mathcal{X}[N] = \bigcap \mathcal{P}^+[N], \quad \mathcal{X}[N] = \bigcup \mathcal{P}^-[N]. \tag{1.6}$$

Начнем с областей достижимости для системы (1.1), (1.2), (1.4), считая для простоты обозначений, что внутренность $\mathcal{X}[N]$ непуста (общий случай описан в [4]). При наших предположениях $\mathcal{X}[N]$ есть сумма $N{+}1$ параллелепипеда. Можно заметить, что если множество $\mathcal{Q} = \sum_{k=1}^{m} \mathcal{P}^{(k)}$, $\mathcal{P}^{(k)} = \mathcal{P}(p^{(k)}, P^{(k)}, \pi^{(k)})$, есть сумма m параллелепипедов, то параллелепипед

$$\boldsymbol{P}_V(\mathcal{Q}) = \mathcal{P}(p^{\mathrm{sum}}, V, \nu(V)) \tag{1.7}$$

с центром $p^{\rm sum} = \sum_{k=1}^{m} p^{(k)}$, произвольной матрицей $V \in M_*^{n\times n}$ и величинами "полуосей" $\nu_i(V) = \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|(V^{-1}P^{(k)})_i^j|\pi_j^{(k)}$, $i = 1, \ldots, n$, будет внешним для $\mathcal{Q}$: $\mathcal{Q} \subseteq \boldsymbol{P}_V(\mathcal{Q})$, и, более того, $\mathcal{Q}$ совпадает с пересечением $\boldsymbol{P}_V(\mathcal{Q})$, взятым по некоторым конечным множествам матриц $\mathcal{V}^\gamma$ [4]: $\mathcal{Q} = \bigcap\limits_{V\in\mathcal{V}^\gamma} \boldsymbol{P}_V(\mathcal{Q})$, $\gamma = 1, 2, 3$.

Вычисляя $\boldsymbol{P}_V(\mathcal{Q})$ для $\mathcal{Q} = \mathcal{X}[N]$ с различными V, мы получаем аппроксимации для $\mathcal{X}[N]$, которые обеспечивают точное представление $\mathcal{X}[N]$ (через пересечение) и допускают распараллеливание вычислений. Но это "статические" аппроксимации, которые не обладают полугрупповым свойством, присущим областям достижимости. Далее мы строим $\mathcal{P}^+[k]$, удовлетворяющие (1.5), (1.6) и, кроме того, некоторым эволюционным уравнениям, которые включают вычисление внешних оценок (1.7) для суммы двух параллелепипедов на каждом шаге. Пересечения в (1.6) берутся по начальным матрицам ориентации $P^+[0]$ из конечных множеств Π_N^γ. Множества Π_N^γ могут быть построены с использованием некоторой системы Z_N векторов z^μ; последние вычисляются по тем колонкам матриц параллелепипедов $\mathcal{X}_0$, $\mathcal{W}[k]$, которым соответствуют ненулевые величины "полуосей" (подробности см. в [4]).

Теорема 1.1. *При любых матрицах $P^+[k] \in M_*^{n\times n}$, k=0, …, N, верны включения (1.5), если*

$$\mathcal{P}^+[k] = \boldsymbol{P}_{P^+[k]}(A[k]\,\mathcal{P}^+[k-1] + \mathcal{W}[k]), \quad k = 1, \ldots, N; \quad \mathcal{P}^+[0] = \boldsymbol{P}_{P^+[0]}(\mathcal{X}_0). \tag{1.8}$$

Пусть дополнительно $P^+[k] = \{p^{+,i}[k]\}$ определяются с использованием матриц $H[k] = \{h^i[k]\}$:

$$h^i[k] = \mathrm{Nrv}\,(A[k]h^i[k-1]), \quad (\textit{где } \mathrm{Nrv}\,(a) = \|a\|^{-1}\cdot a), \quad i = 1, \ldots, n, \quad k = 1, \ldots, N, \tag{1.9}$$

$$H[0] = P^+[0],$$

в соответствии с одним из следующих трех правил:

1) *$p^{+,i}[k]$=$h^i[k]$ для i=1, …, n−1, $p^{+,n}[k]$=$\mathrm{Nrv}\,(A^\top[k]^{-1}p^{+,n}[k-1])$, k=1, …, N; $P^+[0] \in \Pi_N^1$;*

2) *$P^+[k] = \mathrm{Ort}\,(H[k])$ (где $\mathrm{Ort}\,(H[k])$ обозначает процедуру ортогонализации Грамма–Шмидта для векторов $h^1[k], \ldots, h^n[k]$); $P^+[0] \in \Pi_N^2$;*

3) *$p^{+,i}[k] = h^i[k]$ для всех $i = 1, \ldots, n$, $k = 1, \ldots, N$; $P^+[0] \in \Pi_N^3$.*

Тогда справедливы представления (1.6), где пересечения берутся по $P^+[0] \in \Pi_N^\gamma$, $\gamma = 1, 2, 3$ соответственно. Во всех случаях по крайней мере по две $(n-1)$-мерные грани $\mathcal{P}^+[k]$ касаются $\mathcal{X}[k]$. В третьем случае $\mathcal{P}^+[k]$ являются минимальными по включению [11] параллелепипедо-значными оценками для $\mathcal{X}[k]$.

Очевидно, во втором случае параллелепипеды $\mathcal{P}^+[k]$ ортогональны. Заметим также, что если матрицы $P^+[k]$ брать на каждом шаге единичными, то трубка $\mathcal{P}^+[\cdot]$ будет образована параллелепипедами с гранями, параллельными координатным плоскостям, как бывает при классических интервальных вычислениях. Но численное моделирование показывает, что такая трубка может быть слишком грубой оценкой для $\mathcal{X}[\cdot]$ (в силу известного в интервальном анализе "эффекта упаковывания" (wrapping effect)). Как следует из приведенной теоремы, этот эффект не наблюдается при построении $\mathcal{P}^+[k]$ по формулам правила 3, несмотря на их рекуррентный характер. Это достигается за счет отказа от постоянства матриц ориентации и их ортогональности. Первые два правила позволяют избежать "эффекта упаковывания" в двух (противоположных) направлениях.

Внутренние аппроксимации могут быть построены на основе следующего утверждения.

Теорема 1.2. *Пусть* $H[0] \in M_*^{n\times n}$ *— матрица со столбцами* $h^i[0] \in Z_N$, *матрицы* $H[k] = \{h^i[k]\}$, $B[k] = \{b^i[k]\}$, $U[k] = \{u^i[k]\}$ *удовлетворяют соотношениям (1.9),* $B[k] = \mathrm{Ort}\,(H[k])$,

$$u^i[k] = A[k]u^i[k-1] + \sum_{j\in J_i[k]} r^j[k]\rho_j[k]\,\mathrm{sign}\,(r^j[k], b^i[k]); \quad u^i[-1] = 0 \in \mathbb{R}^n;$$
$$J_i[k] = \{j \in \{1, \ldots, n\} : (r^j[k], b^\alpha[k]) = 0,\ \alpha = i+1, \ldots, n\},$$

и параметры $\mathcal{P}^-[k]$ *вычисляются по формулам*

$$\begin{array}{llll} p^-[k] = A[k]p^-[k-1] + r[k], & k = 0, \ldots, N; & p^-[-1] = 0 \in \mathbb{R}^n; & \\ \textit{если } u^i[k] = 0, & \textit{то } p^{-,i}[k] = b^i[k], & \pi_i^-[k] = 0, & (i = 1, \ldots, n,\ k = 0, \ldots, N). \\ \textit{иначе} & p^{-,i}[k] = \mathrm{Nrv}\,(u^i[k]), & \pi_i^-[k] = \|u^i[k]\| & \end{array}$$

Тогда справедливы включения (1.5), причем $\rho(\pm b^n[k]|\mathcal{P}^+[k]) = \rho(\pm b^n[k]|\mathcal{X}[k])$, $k = 0, \ldots, N$ $(\rho(l|\mathcal{X})$ *— опорная функция* $\mathcal{X})$, *и имеют место представления (1.6), где объединение берется по всем различным (с точностью до перестановки столбцов)* $B[0]$, *построенным указанным способом.*

Приведенные теоремы служат основой для параллельных алгоритмов аппроксимации областей достижимости [4]. В работах [4, 9] даны оценки эффективности алгоритмов.

Один из способов построения внешних оценок множеств $\mathcal{X}[k]$ при наличии фазовых ограничений основывается на замене исходной системы (1.1)–(1.4) совокупностью систем без фазовых ограничений, но с матричными параметрами, и использовании для них теоремы 1.1 [9].

Опишем другой способ, при котором аппроксимации строятся путем отыскания на каждом шаге k внешних оценок (1.7) и с использованием того факта, что пересечение параллелепипедов с одинаковыми матрицами ориентации также является параллелепипедом. А именно, пусть $\mathcal{P}^{(k)} = \mathcal{P}(p^{(k)}, P, \pi^{(k)})$, $k = 1, 2$. Если $\pi_i^{In} \geq 0$, $i = 1, \ldots, n$, то пересечение $\mathcal{R} = \mathcal{P}^{(1)} \bigcap \mathcal{P}^{(2)}$ есть параллелепипед: $\mathcal{R} = \mathcal{P}(p^{In}, P, \pi^{In})$, иначе оно пусто. Здесь $p^{In} = P\,\bar{p}$; $\bar{p}_i = (\gamma_i + \delta_i)/2$, $\pi_i^{In} = (\gamma_i - \delta_i)/2$, $\gamma_i = \min\limits_{k\in\{1,2\}} \{\bar{p}_i^{(k)} + \pi_i^{(k)}\}$, $\delta_i = \max\limits_{k\in\{1,2\}} \{\bar{p}_i^{(k)} - \pi_i^{(k)}\}$, $i = 1, \ldots, n$, $\bar{p}^{(k)} = P^{-1}\,p^{(k)}$.

Очевидно, что если параллелепипеды $\mathcal{P}^+[k]$ определяются из соотношений

$$\mathcal{P}^+[k] = \boldsymbol{P}_{P^{2+}[k]}(\boldsymbol{P}_{P^{1+}[k]}(A[k]\,\mathcal{P}^+[k-1] + \mathcal{W}[k])) \bigcap \boldsymbol{P}_{P^{2+}[k]}(\mathcal{Y}[k]), \quad k = 1, \ldots, N,$$
$$\mathcal{P}^+[0] = \boldsymbol{P}_{P^{1+}[0]}(\mathcal{X}_0), \tag{1.10}$$

то включения (1.5) справедливы при любых матрицах ориентации $P^{1+}[k] \in M_*^{n\times n}$, $k = 0, \ldots, N$, $P^{2+}[k] \in M_*^{n\times n}$, $k = 1, \ldots, N$. Оказывается, что справедливо представление (1.6), где пересечение берется по некоторому конечному множеству последовательностей $P^{1+}[\cdot]$, $P^{2+}[\cdot]$.

Результаты численного моделирования приведены в [10].

2. Эллипсоидальные оценки трубок выживающих траекторий

Рассмотрим теперь построение внешних эллипсоидальных оценок для трубок выживающих траекторий [7] и далее в следующем разделе, — для информационных областей в задаче гарантированного оценивания [5]. Сделаем это для систем с непрерывным временем.

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = A(t)x + u(t), \tag{2.1}$$

где управление $u(t)$ при почти всех $t \in [t_0, t_1]$ стеснено геометрическими ограничениями

$$u(t) \in \mathcal{E}(p(t), P(t)). \tag{2.2}$$

Символом $\mathcal{E}(a, Q)$ обозначен *эллипсоид* с положительно-определенной матрицей $Q > 0$:

$$\mathcal{E}(a, Q) = \{x : (x - a, Q^{-1}(x - a)) \leq 1\}.$$

Пусть на фазовые состояния наложены дополнительные ограничения

$$x(t) \in \mathcal{E}(q(t), Q(t)), \quad t_0 \leq t \leq t_1. \tag{2.3}$$

Ограничения такого типа могут естественным образом порождаться *“уравнением измерений”*

$$y(t) = G(t)x + v(t), \quad v(t) \in \mathcal{E}(q(t), Q(t)), \tag{2.4}$$

где $y(t)$ — наблюдаемый выходной сигнал, а $v(t)$ — неопределенная, но ограниченная помеха.

Пусть множество $W[\tau]$ в данный момент времени τ есть множество всех тех точек $x = x(\tau)$, для каждой из которых существует управление $u = u(t)$, которое обеспечивает условие выживаемости: $x[t] = x(t, \tau, x|u(\cdot)) \in \mathcal{E}(q(t), Q(t))$, $\tau \leq t \leq t_1$. Здесь через $x[t] = x(t, \tau, x|u(\cdot))$ обозначена траектория системы (2.1), которая начинается в позиции $\{\tau, x\}$ и порождается управлением $u(t)$. Многозначная функция $W[t]$, $\tau \leq t \leq t_1$ известна как *трубка выживающих траекторий* (фактически, $W[t]$ — это множества достижимости системы (2.1)–(2.3) “в обратном времени").

Обсудим технику динамического программирования для нахождения $W[\cdot]$. Будем искать $W[\tau]$ в виде множества уровня

$$W[\tau] = \{x : V_v(\tau, x) \leq 1\}$$

для *информационного состояния* $V_v(\tau, x)$, определяемого как решение следующей задачи:

$$V_v(\tau, x) = \min_{u(\cdot)} \{\Phi(\tau, u(\cdot)) | x[t] = x(t, \tau, x|u(\cdot)),\ t \in [\tau, t_1]\}, \tag{2.5}$$

где

$$\Phi(\tau, u(\cdot)) = \max\{J_0, J_1, J_2\},$$
$$J_0(x[t_1]) = (x[t_1] - q(t_1), Q^{-1}(t_1)(x[t_1] - q(t_1))),$$
$$J_1(\tau, u(\cdot)) = \text{ess sup}(u(t) - p(t), P^{-1}(t)(u(t) - p(t))),$$
$$J_2(\tau, x[t]) = \max(x[t] - q(t), Q^{-1}(t)(x[t] - q(t))).$$

Решение этой задачи может быть описано как решение определенного уравнения динамического программирования (Гамильтона — Якоби — Беллмана) [8]. Чтобы избежать обобщенных решений этого уравнения, введем, следуя схеме упомянутой работы, линейно-квадратичные экстремальные задачи, которые состоят в минимизации функционала

$$\Lambda(\tau, x, u(\cdot), \omega(\cdot)) = \alpha(x[t_1] - q(t_1), Q^{-1}(t_1)(x[t_1] - q(t_1)))+$$

$$+\int_{\tau}^{t_1}\big(\beta(t)\big(u(t)-p(t),P^{-1}(t)(u(t)-p(t))\big)+\gamma(t)\big(x[t]-q(t),Q^{-1}(t)(x[t]-q(t))\big)\big)dt$$

по $u(\cdot)$, при $x[t]=x(t,\tau,x|u(\cdot))$. Здесь $\omega(\cdot)=\{\alpha,\,\beta(\cdot),\,\gamma(\cdot)\}$ и

$$\alpha>0,\quad \beta(t)>0,\quad \gamma>0,\qquad \alpha+\int_{\tau}^{t_1}(\beta(t)+\gamma(t))dt=1.$$

Обозначим множество таких элементов $\omega(\cdot)$ через Ω. Имеем

$$V_v(\tau,x)=\min_{u(\cdot)}\{\Phi(\tau,u(\cdot))|x[t]=x(t,\tau,x|u(\cdot))\}=\min_{u(\cdot)}\sup_{\omega(\cdot)}\Lambda(\tau,x,u(\cdot),\omega(\cdot)).$$

Функционал Λ таков, что операции min и sup можно переставить. Проделав это, обозначим

$$V_v(\tau,x)=\sup_{\omega(\cdot)}V(\tau,x,\omega),\quad \text{где}\quad V(\tau,x,\omega(\cdot))=\min_{u(\cdot)}\Lambda(\tau,x,u(\cdot),\omega(\cdot)).$$

Мы находим эту функцию в виде квадратичной формы

$$V(\tau,x,\omega)=(x-z(\tau,\gamma(\cdot)),\mathcal{P}(\tau,\omega(\cdot))(x-z(\tau,\gamma(\cdot)))+k^2(t,\gamma(\cdot)),\tag{2.6}$$

где $\mathcal{P}[t]=\mathcal{P}(t,\omega(\cdot))$, $z[t]=z(t,\gamma(\cdot))$, $k[t]=k(t,\gamma(\cdot))$ удовлетворяют уравнениям

$$\dot{\mathcal{P}}=-\mathcal{P}A(t)-A'(t)\mathcal{P}+\beta^{-1}(t)\mathcal{P}P(t)\mathcal{P}-\gamma(t)Q^{-1}(t),\tag{2.7}$$

$$\dot z=A(t)z-\gamma(t)\mathcal{P}^{-1}Q^{-1}(t)(q(t)-z)+p(t),\tag{2.8}$$

$$\dot{k^2}=-\gamma(t)(q(t)-z,Q^{-1}(t)(q(t)-z)),\tag{2.9}$$

$$\mathcal{P}(t_1)=\alpha Q^{-1}(t_1),\quad z(t_1)=q(t_1),\quad k(t_1)=0.\tag{2.10}$$

Иногда бывает удобнее работать с матрицей $X_v(t)=\mathcal{P}^{-1}[t]$, удовлетворяющей уравнению

$$\dot X_v=A(t)X_v+X_vA'(t)+\gamma(t)X_vQ^{-1}(t)X_v-\beta^{-1}(t)P(t),\tag{2.11}$$

$$X_v(t_1)=\alpha^{-1}Q(t_1).\tag{2.12}$$

Подводя итог, сформулируем следующее утверждение.

Лемма 2.1. *Информационное состояние $V_v(\tau,x)$ есть верхняя огибающая*

$$V_v(\tau,x)=\sup\{V(\tau,x,\omega(\cdot))|\omega(\cdot)\in\Omega\}$$

параметризованного семейства квадратичных форм $V(\tau,x,\omega(\cdot))$ вида (2.6) по функциональным параметрам $\omega(\cdot)=\{\alpha,\beta(\cdot),\gamma(\cdot)\}$, где $\omega(\cdot)\in\Omega$.

Поскольку множества уровня для $V(\tau,x,\omega(\cdot))$ являются эллипсоидами

$$W[\tau,\omega(\cdot)]=\mathcal{E}(z[\tau],(1-k^2[\tau])X_v[\tau])$$

и $W[\tau]$ есть множество уровня для $V_v(\tau,x)$, благодаря лемме получаем, что справедлива

Теорема 2.1. *Множество $W[\tau]$ есть пересечение эллипсоидов, а именно:*

$$W[\tau]=\{\cap\mathcal{E}(z[\tau],(1-k^2[\tau])X_v[\tau])|\omega(\cdot)\in\Omega\},$$

где z,k,X_v определяются уравнениями (2.8)–(2.12).

Таким образом, трубка выживающих траекторий может быть аппроксимирована семейством эллипсоидальных трубок.

3. Эллипсоидальные оценки для задачи гарантированного оценивания состояния

Рассмотрим задачу гарантированного оценивания состояния $x(t)$ в системе (2.1), (2.2), (2.4) с

$$x(t_0) \in \mathcal{E}(x^0, X^0). \tag{3.1}$$

Информационные области $\mathcal{X}(\tau)$, дающие решение этой задачи, представляют собой не что иное, как *области достижимости при фазовых ограничениях*, когда последние порождаются соотношениями типа (2.4). Подобно вышеизложенному, множества $\mathcal{X}(\tau)$ могут быть описаны с помощью динамического программирования.

Остановимся на эллипсоидальных оценках другого типа, получаемых для $\mathcal{X}(\tau)$ через уравнение интегральной воронки и некоторые “элементарные"формулы, описанные в [11].

Рассмотрим сначала области достижимости $\mathcal{X}[\tau]$ для системы

$$\dot{x} = u(t) \tag{3.2}$$

при условиях (2.2), (3.1) на $u(t)$, $x(t_0)$ и фазовых ограничениях

$$x(t) \in \mathcal{E}(y(t), K(t)), \tag{3.3}$$

где матрично-значная функция $K(t) > 0, K(t) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ и функция $y(t) \in \mathbb{R}^n$ (наблюдаемый выход в задаче оценивания состояния) предполагаются непрерывными. Заметим, что в системе (2.1) всегда, не нарушая общности, можно положить $A(t) \equiv 0$, при условии, что $p(t), P(t)$ зависят от времени.

Из уравнений интегральной воронки для областей достижимости $\mathcal{X}(t)$ при фазовых ограничениях (3.3) следует ([11]), что

$$\mathcal{X}(t+\sigma) = \big(\mathcal{X}(t) + \sigma\mathcal{E}(p(t), P(t))\big) \cap \mathcal{E}\big(y(t+\sigma), K(t+\sigma)\big) + o(\sigma), \quad \sigma > 0.$$

Аппроксимируя область достижимости в момент t эллипсоидом $\mathcal{X}(t) = \mathcal{E}(x(t), X(t))$, будем искать внешнюю эллипсоидальную оценку $\mathcal{E}(x(t+\sigma), X(t+\sigma))$ для $\mathcal{X}(t+\sigma)$. Сначала построим оценку

$$\mathcal{E}(x(t), X(t)) + \sigma\mathcal{E}(p(t), P(t)) \;\subseteq\; \mathcal{E}(\tilde{x}(t), \tilde{X}(t)),$$

где

$$\tilde{x}(t) = x(t) + \sigma p(t) \quad \text{и} \quad \tilde{X}(t) = (1+q)X(t) + (1+q^{-1})\sigma^2 P(t), \quad q > 0. \tag{3.4}$$

Далее, имеем

$$\mathcal{E}(\tilde{x}, \tilde{X}) \cap \mathcal{E}(y, K) \;\subseteq\; \mathcal{E}(x(t+\sigma), X(t+\sigma)),$$

где

$$x(t+\sigma) = (I - M)(x(t) + \sigma p(t)) + My(t+\sigma), \tag{3.5}$$

$$X(t+\sigma) = (1+\pi)(I-M)\tilde{X}(t)(I-M)' + (1+\pi^{-1})MK(t+\sigma)M', \quad \pi > 0. \tag{3.6}$$

Здесь $\pi > 0$, $q > 0$, M — скалярные и матричный параметры. Вводя новые параметры $q = \sigma\bar{q}$, $\pi = \sigma\bar{\pi}$, $M = \sigma\bar{M}$, собирая вместе (3.4)–(3.6) и оставляя члены не выше первого порядка по σ, получаем

$$x(t+\sigma) - x(t) = \sigma p + \sigma\bar{M}(y(t+\sigma) - x(t)),$$

$$X(t+\sigma) - X(t) = \sigma((\bar{\pi} + \bar{q})X(t) - \bar{M}X - X\bar{M}' + \bar{q}^{-1}P + \bar{\pi}^{-1}\bar{M}K(t+\sigma)\bar{M}').$$

Деля обе части этих уравнений на $\sigma > 0$ и переходя к пределу при $\sigma \to +0$, мы получаем, ввиду непрерывности $y(t), K(t)$, дифференциальные уравнения (опустим черточки в обозначениях)

$$\dot{x} = p(t) + M(t)(y(t) - x(t)), \tag{3.7}$$

$$\dot{X} = (\pi(t) + q(t))X + q(t)^{-1}P - M(t)X - XM'(t) + \pi^{-1}M(t)K(t)M'(t), \tag{3.8}$$

$$x(t_0) = x^0, \ \ X(t_0) = X^0, \tag{3.9}$$

где $\pi(t) > 0$, $q(t) > 0$, $M(t)$ — непрерывные функции. Справедлива

Теорема 3.1. *Область достижимости $\mathcal{X}(\tau)$ для системы (3.2) при ограничениях (2.2), (3.1) и (3.3) (с непрерывными $y(t), K(t)$) удовлетворяет включению $\mathcal{X}(\tau) \in \mathcal{E}(x(\tau), X(\tau))$, где $x(t), X(t)$ удовлетворяют на интервале $t_0 \le t \le \tau$ дифференциальным уравнениям (3.7)–(3.8). Более того, справедливо соотношение*

$$X(\tau) = \cap\{\mathcal{E}(x(\tau), X(\tau)) | \pi(\cdot), q(\cdot), M(\cdot)\}, \tag{3.10}$$

где $\pi(t) > 0$, $q(t) > 0$, $M(t)$ — непрерывные функции.

Пусть теперь $A(t) \not\equiv 0$ и фазовые ограничения (3.3) заменены соотношениями

$$G(t)x(t) \in \mathcal{E}(y(t), K(t)), \tag{3.11}$$

где $y(t) \in \mathbb{R}^m$, $K(t) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$, $G(t) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ и $G(t)$ непрерывна. Тогда предыдущие соотношения вместе с теоремой 3.1 остаются верными, если (3.7), (3.8) заменить на

$$\dot{x} = A(t)x + p(t) + M(t)(y(t) - G(t)x),$$

$$\dot{X} = (A(t) - M(t)G(t))X + X(A'(t) - G'(t)M'(t)) +$$
$$+ (\pi(t) + q(t))X + q(t)^{-1}P(t) + \pi^{-1}M(t)K(t)M'(t),$$

с теми же граничными условиями (3.9).

Нетрудно заметить, что множество эллипсоидов, определяемое (3.10), зависит от большего числа параметров, чем множество оценок, получаемое при технике динамического программирования, и является, следовательно, “более богатым". Поэтому естественно ожидать, что при выборе оптимального эллипсоида (по отношению к какому-либо заданному критерию) оно даст “меньший"эллипсоид, чем может получиться при динамическом программировании.

Можно также допустить в качестве $y(t)$ функции, кусочно-непрерывные справа. Тогда соответствующее значение $y(t)$ должно браться как $y(t) = y(t+0)$.

Список литературы

[1] Алефельд Г., Херцбергер Ю. *Введение в интервальные вычисления.* Мир, М., 1987.

[2] Калмыков С. А., Шокин Ю. И., Юлдашев З. Х. *Методы интервального анализа.* Наука, Новосибирск, 1986.

[3] Корноушенко Е. К. Интервальные покоординатные оценки для множеств достижимых состояний линейной стационарной системы. *Автоматика и телемеханика* №5, 1980, 12–22; №12, 1980, 10–17.

[4] Костоусова Е. К. О полиэдральном оценивании областей достижимости линейных многошаговых систем. *Автоматика и телемеханика* в печати.

[5] Куржанский А. Б. *Управление и наблюдение в условиях неопределенности.* Наука, М., 1977.

[6] Черноусько Ф. Л. *Оценивание фазового состояния динамических систем. Метод эллипсоидов.* Наука, М., 1988.

[7] Aubin J.-P. *Viability Theory.* Birkhäuser, Boston, 1991.

[8] Baras J. S., Kurzhanski A. B. Nonlinear Filtering: the Set-Membership (Bounding) and the H_∞ Approaches. *Proc. of the IFAC NOLCOS Conference, Tahoe, CA, USA.* Plenum Press, 1995.

[9] Kostousova E. K., Kurzhanski A. B. Theoretical Framework and Approximation Techniques for Parallel Computation in Set-Membership State Estimation. *CESA'96 IMACS Multiconf.* Proc. of Symposium on Modelling, Analysis and Simulation Lille, France, 1996, **2**, 849–854.

[10] Kostousova E. K. On Polyhedral Approximations of Trajectory Tubes. *Proc. of Third Int. Workshop 'Beam Dynamics & Optimization'.* St.-Petersburg, Russia, 1996.

[11] Kurzhanski A. B., Vályi I. *Ellipsoidal Calculus for Estimation and Control.* Birkhäuser, Boston, 1996.

[12] Kurzhanski A. B., Sugimoto K., Valyi I. Guaranteed State Estimation for Dynamic Systems: Ellipsoidal Techniques. *Int. J. of Adaptive Contr. and Sign. Processing* **8**, 1994, 85–101.

[13] Milanese M., Vicino F. Optimal Estimation for Dynamic Systems with Set-Membership Uncertainty: an Overview. *Automatica* **27**, 1991, 997–1009.