Вычислительные технологии **Том 5, № 5, 2000**

СХЕМА ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА АППРОКСИМАЦИИ НА НЕРАВНОМЕРНОЙ СЕТКЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ—СТОКСА

В. И. Паасонен
Институт вычислительных технологий СО РАН
Новосибирск, Россия
e-mail: paas@net.ict.nsc.ru

A system of Navier-Stokes equations with respect to variable stream function and velocity vortex is considered. The aim of this work is to construct a compact scheme which is defined on a pattern with the dimensions 3×3 on a rectangular non-uniform grid. A third-order approximation scheme has been constructed. In the particular case of a uniform grid this scheme has the fourth order of approximation. The stability of the linearized scheme has been investigated and stability criterion has been obtained.

Важным требованием к методам численного моделирования течений вязкой несжимаемой жидкости является корректное воспроизведение профиля решения в зоне больших градиентов, в частности, в пограничном слое. Традиционным способом, позволяющим это сделать, является использование неравномерной сетки, сгущающейся по мере приближения к твердым границам. Такой подход позволяет выровнять локальные погрешности аппроксимации разностных схем в сеточной области и таким образом повысить точность расчета в целом. Однако на практике шаг сетки в области больших градиентов не может быть сделан таким малым, как этого требуют соображения точности аппроксимации, так как существуют иные требования к величине пространственного шага, которые вступают в противоречие с требованием точности. Например, решения, близкие к разрывным, требуют близкого к нулю пространственного шага, практически неосуществимого из-за погрешностей округления и по соображениям устойчивости метода.

Поэтому при использовании неравномерных сеток применяются специальные приемы, позволяющие препятствовать чрезмерному измельчению пространственного шага, даже когда принцип равномерного распределения погрешности требует этого. В результате осознанного отказа от необходимой детальности сетки локальная погрешность аппроксимации в области искусственно завышенного шага опять-таки может оказаться значительной.

С другой стороны, при использовании схем повышенной точности, в том числе компактных схем, обычно наблюдается улучшение результатов расчетов (см., например, [1, 3–5]), даже при крутых профилях решения. Однако на равномерных сетках в области больших градиентов и для схем повышенного порядка аппроксимации также возможны значительные локальные погрешности [**?**, **?**].

Поэтому представляет интерес объединение этих двух средств повышения точности расчетов путем разработки компактных схем на неравномерных сетках. Настоящая работа посвящена построению компактной схемы третьего порядка аппроксимации на неравномерной прямоугольной сетке для $\psi - \omega$-системы уравнений Навье—Стокса и анализу ее устойчивости на основе требования неотрицательности коэффициентов схемы, обеспечивающего выполнение принципа максимума.

1. Постановка задачи

Пусть в односвязной области декартовых координат x, y течение вязкой несжимаемой жидкости подчиняется системе уравнений Навье—Стокса. Вводя функцию тока ψ и вихрь скорости ω, связанные с компонентами вектора скорости u, v равенствами

$$u = \psi_y, \quad v = -\psi_x, \quad \omega = u_y - v_x,$$

известным путем исключают давление и приходят к $\psi - \omega$ — системе

$$\omega_t + (\psi_y \omega)_x - (\psi_x \omega)_y = \mu(\omega_{xx} + \omega_{yy}) + F,$$

$$\psi_{xx} + \psi_{yy} = \omega. \tag{1.1}$$

Цель работы состоит в построении для системы (1.1) разностной схемы третьего порядка аппроксимации[1] на девятиточечном шаблоне 3×3 неравномерной прямоугольной сетки.

Пусть z — одна из независимых переменных x или y. Зафиксируем точку неравномерной сетки по переменной z и обозначим через h_+ и h_- шаги сетки справа и слева от этой точки, а через Δ_+ и Δ_- — разделенные разности “вперед” и “назад” первого порядка. Введем также обозначения для разности, суммы и произведения соседних шагов h_+ и h_-:

$$d = h_+ - h_-, \quad s = h_+ + h_-, \quad p = h_+ h_-. \tag{1.2}$$

Тогда для разностных аппроксимаций

$$\Delta = \frac{h_- \Delta_+ + h_+ \Delta_-}{s}, \quad \Lambda = \frac{\Delta_+ - \Delta_-}{s/2} \tag{1.3}$$

операторов одно- и двукратного дифференцирования по z справедливы разложения

$$\Delta w = w' + \frac{p}{6} w''' + O(h^3),$$

$$\Lambda w = w'' + \frac{d}{3} w''' + b w'''' + O(h^3), \quad b = \frac{d^2 + p}{12}, \tag{1.4}$$

где h — максимальный шаг.

Кроме того, ниже для выражения $(g w_z)_z$ нам понадобится разностная аппроксимация

$$\Lambda^g w(z) = \frac{2}{s} \left(\frac{g(z + h_+) + g(z)}{2} \Delta_+ - \frac{g(z) + g(z - h_-)}{2} \Delta_- \right) w(z), \tag{1.5}$$

[1] Здесь рассматривается только дивергентная форма уравнения для вихря. Для недивергентной формы построение компактной схемы на неравномерной сетке проводится аналогично.

для которой справедливо разложение

$$\Lambda^g w(z) = (gw')' + \frac{d}{6}(2gw''' + 3g'w'' + 3g''w') + O(h^2), \tag{1.6}$$

а также для выражения $(g_z w_z)_z$ — аппроксимация вида

$$\Gamma^{g_z} w(z) = \frac{2}{s}\Big(\Delta_+ g\ \Delta_+ - \Delta_- g\ \Delta_-\Big) w(z). \tag{1.7}$$

Определенные выше одномерные операторы, а также параметры $h_\pm$, d, s, p, b связаны с конкретной переменной, поэтому в дальнейшем условимся снабжать их нижним индексом x или y, характеризующим координатное направление. При этом в приведенных выше формулах дифференцирование будем считать частным, а также будем подразумевать зависимость функций от обеих пространственных переменных.

2. Аппроксимация уравнения Пуассона

Очевидно, что простейшая схема для второго уравнения системы (1.1)

$$(\Lambda_x + \Lambda_y)\psi = \omega$$

имеет на неравномерной сетке всего лишь первый порядок аппроксимации. Следуя принципу построения компактных схем [?, ?], усовершенствуем ее, применив к слагаемым схемы одномерные осредняющие операторы S_x, S_y по ортогональным направлениям:

$$(S_y \Lambda_x + S_x \Lambda_y)\psi = S\omega, \tag{2.1}$$

$$S \approx S_x S_y, \quad S_z = E + \frac{d_z}{3}\Delta_z + b_z \Lambda_z, \quad b_z = \frac{d_z^2 + p_z}{12}, \quad z = x, y.$$

Здесь и в дальнейшем E означает тождественный оператор, а знак “$\approx$” означает равенство с точностью до членов $O(h^3)$. В качестве оператора S осреднения правой части можно взять произведение $S_x S_y$ или, например, выражение

$$S = E + \frac{d_x}{3}\Delta_x + \frac{d_y}{3}\Delta_y + b_x \Lambda_x + \frac{d_x d_y}{9}\Delta_x \Delta_y + b_y \Lambda_y.$$

Аппроксимация уравнения Пуассона схемой (2.1) с третьим порядком следует из равенств

$$\Lambda_x \approx S_x \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad \Lambda_y \approx S_y \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad S_y \Lambda_x + S_x \Lambda_y \approx S\ \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right),$$

справедливых ввиду специального выбора коэффициентов осредняющих операторов и в силу разложения (1.4). Нетрудно заметить, что при равномерной сетке все члены разложения нечетного порядка обращаются в нуль, и (2.1) превращается в классическую схему Микеладзе [?] четвертого порядка точности.

Установим знаки коэффициентов схемы (2.1). Для этого сначала запишем операторы S_z и Λ_z в индексах. Первый из них

$$S_z w_i = a_z^- w_{i-1} + a_z^0 w_i + a_z^+ w_{i+1}$$

имеет коэффициенты

$$a_z^{\pm} = \frac{1}{6s_z h_{\pm z}}(d_z^2 + p_z \pm 2d_z h_{\mp z}), \quad a_z^0 = \frac{5}{6} + \frac{d_z^2}{6p_z}. \tag{2.2}$$

Коэффициенты второго оператора

$$\lambda_z^{\pm} = \frac{2}{s_z h_{\pm z}}, \quad \lambda_z^0 = -\frac{2}{p_z}. \tag{2.3}$$

Очевидно, что коэффициенты оператора $S_y\Lambda_x + S_x\Lambda_y$ определяются через коэффициенты (2.2) – (2.3). Их выражения удобно представить, в соответствии с размером шаблона, в виде матрицы размерности 3×3 (ось x направлена вправо, а ось y — вверх):

$$\begin{array}{ccc} a_y^+\lambda_x^- + a_x^-\lambda_y^+ & a_y^+\lambda_x^0 + a_x^0\lambda_y^+ & a_y^+\lambda_x^+ + a_x^+\lambda_y^+ \\ a_y^0\lambda_x^- + a_x^-\lambda_y^0 & a_y^0\lambda_x^0 + a_x^0\lambda_y^0 & a_y^0\lambda_x^+ + a_x^+\lambda_y^0 \\ a_y^-\lambda_x^- + a_x^-\lambda_y^- & a_y^-\lambda_x^0 + a_x^0\lambda_y^- & a_y^-\lambda_x^+ + a_x^+\lambda_y^- \end{array}. \tag{2.4}$$

Так как коэффициенты λ_z^0 отрицательны, а a_z^0 — положительны, то центральный элемент матрицы (2.4) отрицателен. Сумма всех элементов матрицы равна нулю. Следовательно, если потребовать неотрицательность всех остальных элементов (2.4), то для схемы (2.1) будет справедлив принцип максимума [?].

Угловые элементы матрицы (2.4) в силу (1.2) и (2.2) – (2.3) с точностью до различных положительных множителей[2] приводятся к виду

$$p_x + p_y + \sigma_x d_x s_x + \sigma_y d_y s_y,$$

где параметры σ_x и σ_y принимают значения ± 1. При этом четыре различные сочетания знаков соответствуют разным углам шаблона. Следовательно, неотрицательность угловых элементов матрицы (2.4) эквивалентна неравенству

$$|h_{+x}^2 - h_{-x}^2| + |h_{+y}^2 - h_{-y}^2| \le h_{+x}h_{-x} + h_{+y}h_{-y}. \tag{2.5}$$

Заметим, что даже замена (2.5) более грубым условием

$$|h_{+z}^2 - h_{-z}^2| \le h_{+z}h_{-z}, \quad z = x, y \tag{2.6}$$

дает вполне приемлемое ограничение на коэффициент изменения шага $q_z = h_{-z}/h_{+z}$. При этом имеет место следующее ограничение на коэффициент q_z:

$$0.62 \approx \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \le q_z \le \frac{\sqrt{5} + 1}{2} \approx 1.62.$$

Отметим также типичный частный случай, когда сетка равномерна по одной из переменных. Тогда одно из слагаемых в левой части (2.5) обращается в нуль, и для пары соседних шагов по другому направлению условие (2.5) превращается в еще более мягкое ограничение по сравнению с неравенством (2.6).

[2]Интерес представляют только знаки элементов матрицы (2.4).

Оставшиеся (не угловые) элементы матрицы (2.4), аналогично с точностью до различных положительных множителей, приводятся к одному из выражений

$$s_x^2 + p_x \pm d_y s_y - p_y, \quad s_y^2 + p_y \pm d_x s_x - p_x.$$

Требование их неотрицательности в силу (1.2) эквивалентно симметричной системе неравенств

$$\begin{aligned} h_{+x}h_{-x} + |h_{+x}^2 - h_{-x}^2| &\le h_{+y}^2 + h_{-y}^2 + 3h_{+y}h_{-y}, \\ h_{+y}h_{-y} + |h_{+y}^2 - h_{-y}^2| &\le h_{+x}^2 + h_{-x}^2 + 3h_{+x}h_{-x}, \end{aligned} \tag{2.7}$$

которая означает недопустимость резкого различия между средними местными шагами по различным переменным. В предельном случае равномерной сетки по обоим направлениям условия (2.7) совпадают с известным ограничением для схемы Микеладзе

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \le \frac{h_x}{h_y} \le \sqrt{5}.$$

Таким образом, условия устойчивости схемы (2.1) для уравнения Пуассона, рассматриваемого отдельно, а не в составе системы (1.1), задаются неравенствами (2.5), (2.7). Первое из них регулирует отношение соседних шагов сетки по каждой переменной, а второе ограничивает степень отклонения сетки от квадратной.

3. Аппроксимация уравнения для вихря

Для построения схемы, аппроксимирующей с третьим порядком уравнение для вихря системы (1.1), воспользуемся обычным приемом исчерпывания погрешности. Уравнение формально представим в виде

$$\mu(\omega_{xx} + \omega_{yy}) = f, \quad f = (\psi_y \omega)_x - (\psi_x \omega)_y + \omega_t - F. \tag{3.1}$$

Тогда схема третьего порядка аппроксимации для него с точностью до множителя μ совпадает с (2.1). Запишем ее в виде

$$\mu(S_y \Lambda_x + S_x \Lambda_y)\omega = Lf, \tag{3.2}$$

причем оператор $L \approx S$ возьмем на этот раз в дифференциальной форме

$$L = E + \frac{d_x}{3}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{d_y}{3}\frac{\partial}{\partial y} + b_x \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{d_x d_y}{9}\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + b_y \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Покажем, что правую часть (3.2) можно аппроксимировать с погрешностью $O(h^3)$ разностными выражениями на нашем компактном шаблоне. Имеем

$$Lf \approx S(\omega_t - F) + Q^0 + Q^1 + Q^2, \tag{3.3}$$

где Q^i — суммы членов $O(h^i)$:

$$Q^0 = (\omega\psi_y)_x - (\omega\psi_x)_y, \quad Q^1 = \frac{d_x}{3}Q_x^0 + \frac{d_y}{3}Q_y^0,$$

$$Q^2 = b_x Q^0_{xx} + \frac{d_x d_y}{9} Q^0_{xy} + b_y Q^0_{yy}.$$

Представим члены нулевого порядка в виде суммы $Q^0 \approx R_0 + Q^2_0$ главной части в разностной форме и погрешности второго порядка:

$$R_0 = \Delta_x(\omega \Delta_y \psi) - \Delta_y(\omega \Delta_x \psi),$$

$$Q^2_0 = \frac{p_y}{6}\Big((\omega\psi_x)_{yyy} - (\omega\psi_{yyy})_x\Big) - \frac{p_x}{6}\Big((\omega\psi_y)_{xxx} - (\omega\psi_{xxx})_y\Big). \tag{3.4}$$

Затем выполним аналогичное разложение $Q^1 \approx R_1 + Q^2_1$ в отношении слагаемых первого порядка

$$R_1 = \frac{d_x}{3}\Big(\Lambda_x(\omega\Delta_y\psi) - \Delta_y \Lambda^\omega_x \psi\Big) - \frac{d_y}{3}\Big(\Lambda_y(\omega\Delta_x\psi) - \Delta_x \Lambda^\omega_y \psi\Big),$$

$$Q^2_1 = \frac{d^2_y}{9}\Big((\omega\psi_x)_{yyy} - (\omega\psi_{yyy})_x - \frac{3}{2}(\omega_y\psi_y)_{xy}\Big) -$$

$$-\frac{d^2_x}{9}\Big((\omega\psi_y)_{xxx} - (\omega\psi_{xxx})_y - \frac{3}{2}(\omega_x\psi_x)_{xy}\Big). \tag{3.5}$$

Из равенств (3.4)–(3.5) следует, что Q^0, Q^1 можно заменить разностными выражениями R_0, R_1, включив в остаточный член Q^2 дополнительные члены погрешности Q^2_0, Q^2_1. Тогда равенство (3.3) преобразуется к виду

$$Lf \approx S(\omega_t - F) + R_0 + R_1 + R_2, \tag{3.6}$$

где $R_2 = Q^2 + Q^2_0 + Q^2_1$ — сумма всех членов второго порядка малости.

Заметим, что если пренебречь слагаемым R_2 и подставить затем (3.6) в качестве правой части в (3.2), то уже получается схема второго порядка аппроксимации. Однако, как будет показано ниже, порядок можно повысить еще на единицу. Препятствием к этому служит наличие в выражении R_2 третьих производных по одноименным переменным от искомых функций, для непосредственной аппроксимации которых необходимо минимум четыре точки по одной координате. Для его преодоления необходимо представить R_2 в иной форме.

Для этого сначала, дифференцируя произведения, выделим из R_2 слагаемые с производными от функции ψ порядков $3+1$ и $1+3$ (т. е. третьего по одной переменной и первого по другой). Можно показать, что их сумма оказывается равной нулю, так как сумма коэффициентов

$$a_z = \frac{p_z}{12} + \frac{d^2_z}{36}, \quad b_z = \frac{p_z + d^2_z}{12}, \quad -c_z = -\left(\frac{p_z}{6} + \frac{d^2_z}{9}\right)$$

при подобных членах равна нулю.

Затем все слагаемые разобьем на три группы $R^2_2 = P_1 + P_2 + P_3$. К первой и второй отнесем слагаемые с третьими производными (порядков $3+0$ и $0+3$) от функций ω и ψ соответственно

$$P_1 = a_y\psi_x\omega_{yyy} - a_x\psi_y\omega_{xxx}, \quad P_2 = a_x\psi_{xxx}\omega_y - a_y\psi_{yyy}\omega_x, \tag{3.7}$$

а к третьей — все остальные слагаемые

$$P_3 = 3a_y(\psi_{xy}\omega_y)_y - 3a_x(\psi_{xy}\omega_x)_x +$$

$$+b_y(2\psi_{yy}\omega_y + \psi_y\omega_{yy})_x - b_x(2\psi_{xx}\omega_x + \psi_x\omega_{xx})_y +$$
$$+\frac{d_x^2}{6}(\psi_x\omega_x)_{xy} - \frac{d_y^2}{6}(\psi_y\omega_y)_{xy} + \frac{d_x d_y}{9}\Big((\psi_y\omega)_{xxy} - (\psi_x\omega)_{xyy}\Big). \tag{3.8}$$

Слагаемые (3.8) не содержат тройного дифференцирования по одноименной переменной и могут быть непосредственно аппроксимированы на компактном шаблоне. В первых двух группах (3.7) третьи производные выражаются через производные низшего порядка по каждой переменной из однократно продифференцированных уравнений системы (1.1). При этом P_1 удобно представить в виде суммы $P_1 = P_1^0 + P_1^1$, выделив члены, содержащие $(\omega_t - F)$. В результате получим

$$P_1^0 = \frac{a_y\psi_x}{\mu}(\omega_t - F)_y - \frac{a_x\psi_y}{\mu}(\omega_t - F)_x,$$
$$P_1^1 = \frac{a_y\psi_x}{\mu}(Q^0 - \mu\omega_{xx})_y - \frac{a_x\psi_y}{\mu}(Q^0 - \mu\omega_{yy})_x,$$
$$P_2 = (a_x - a_y)\omega_x\omega_y + a_y\psi_{xxy}\omega_x - a_x\psi_{xyy}\omega_y. \tag{3.9}$$

Аппроксимируя после этих преобразований выражения (3.8)–(3.9) с использованием разностных операторов (1.3), (1.5), (1.7), получим с погрешностью третьего порядка

$$P_1^0 = \frac{a_y\Delta_x\psi}{\mu}\Delta_y(\omega_t - F) - \frac{a_x\Delta_y\psi}{\mu}\Delta_x(\omega_t - F),$$
$$P_1^1 = \frac{a_y\Delta_x\psi}{\mu}\Big(\Lambda_y^{\Delta_x\omega}\psi - \Lambda_y^{\Delta_x\psi}\omega - \mu\Lambda_x\Delta_y\omega\Big) - \frac{a_x\Delta_y\psi}{\mu}\Big(\Lambda_x^{\Delta_y\psi}\omega - \Lambda_x^{\Delta_y\omega}\psi - \mu\Lambda_y\Delta_x\omega\Big),$$
$$P_2 = (a_x - a_y)\Delta_x\omega\Delta_y\omega + a_y\Delta_x\omega\Lambda_x\Delta_y\psi - a_x\Delta_y\omega\Lambda_y\Delta_x\psi,$$
$$P_3 = 3a_y\Gamma_y^{\omega_y}\Delta_x\psi - 3a_x\Gamma_x^{\omega_x}\Delta_y\psi +$$
$$+b_y\Delta_x(2\Lambda_y\psi\Delta_y\omega + \Delta_y\psi\Lambda_y\omega) - b_x\Delta_y(2\Lambda_x\psi\Delta_x\omega + \Delta_x\psi\Lambda_x\omega) +$$
$$+\frac{d_x^2}{6}\Delta_y(\Gamma_x^{\omega_x}\psi) - \frac{d_y^2}{6}\Delta_x(\Gamma_y^{\omega_y}\psi) + \frac{d_x d_y}{9}(\Lambda_x\Lambda_y^{\omega}\psi - \Lambda_y\Lambda_x^{\omega}\psi).$$

Теперь осталось заменить в (3.6) слагаемое R_2 суммой полученных выражений, а затем подставить результат в правую часть схемы (3.2). Объединяя при этом члены, содержащие $(\omega_t - F)$, получим схему третьего порядка аппроксимации без дискретизации по времени:

$$B(\omega_t - F) = \mu(S_y\Lambda_x + S_x\Lambda_y)\omega - (R_0 + R_1 + P_1^2 + P_2 + P_3), \tag{3.10}$$

на компактном шаблоне, где оператор

$$B = S - \frac{a_x\Delta_y\psi}{\mu}\Delta_x + \frac{a_y\Delta_x\psi}{\mu}\Delta_y$$

с эквивалентной погрешностью может быть заменен факторизованным:

$$B = B_xB_y = (E + q_x\Delta_x + b_x\Lambda_x)(E + q_y\Delta_y + b_y\Lambda_y),$$

$$q_x = \frac{d_x}{3} - \frac{a_x\Delta_y\psi}{\mu}, \quad q_y = \frac{d_y}{3} + \frac{a_y\Delta_x\psi}{\mu},$$

обеспечивая расщепление разностной задачи на одномерные. Выбор конкретного способа дискретизации (3.10) по времени дает определенный вариант компактной схемы, не обязательно двухслойной. На равномерной сетке погрешность схемы составляет величину $O(h^4)$. Очевидно, (3.10) включает в себя также и стационарный случай.

Заметим, что коэффициенты схемы при диссипативных членах имеют порядок $O(h^{-2})$, а при конвективных — $O(h^{-1})$. Поэтому в стационарном случае в предположении постоянства коэффициентов и при малых шагах сетки знаки коэффициентов схемы (3.10) определяются знаками коэффициентов схемы (2.1) для уравнения Пуассона. Следовательно, критерии устойчивости схемы (3.10) при достаточно малых h близки к ограничениям (2.5), (2.7). Однако при конечных шагах или при коэффициенте вязкости μ, сравнимом с h, это утверждение становится неверным, т. е. принцип максимума нарушается, если в дополнение к чисто сеточным условиям (2.5), (2.7) не ограничить сверху также и разностное число Рейнольдса.

Список литературы

[1] Валиуллин А.Н. *Схемы повышенной точности для задач математической физики.* Изд. НГУ, Новосибирск, 1973.

[2] Калиткин Н.Н. *Численные методы.* Наука, М., 1978.

[3] Микеладзе Ш.Е. О численном интегрировании уравнений эллиптического и параболического типов. *Известия АН СССР. Сер. матем.*, **5**, №1, 1941, 57–74.

[4] Паасонен В.И. Об одном методе построения высокоточных разностных схем и их применении в механике жидкости. *Численные методы механики сплошной среды*, **7**, №6, 1976, 111–126.

[5] Толстых А.И. *Компактные разностные схемы и их применение в задачах аэрогидродинамики.* Наука, М., 1990.

Поступила в редакцию 21 февраля 2000 г.