

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ТРЕХМЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ*

А. М. Гришин, А. С. Якимов

Томский государственный университет, Россия

e-mail: rector@tsu.ru

The finite-difference schemes for a three-dimensional partial differential equation of the first order have been obtained. This schemes based on the iteration-interpolational method and Lax-Wendroff approach are absolutely stable in the ordinary sense and characterized by dissipative properties. The algorithm of the method is presented and the convergence is demonstrated by test examples for some partial differential equations.

Известно [1, 2], что явления диссипации, подобные вязкости и теплопроводности, оказывают на скачок (разрыв решения) сглаживающее влияние. Разностные схемы, использующие искусственную вязкость [3, 4], успешно применяются при газодинамических расчетах. Их недостатком является “размазывание” разрывов и “подгонка” скачков.

Разностные схемы, предложенные Лаксом — Вендроффом [5, 6] для решения газодинамических задач, также обладали диссипативными свойствами. Однако аппроксимационная вязкость в разностных схемах появлялась не искусственно, а из условия повышения аппроксимации некоторой исходной разностной схемы. Этот принцип гибридизации двух линейных разностных схем [5, 6] в итоге приводил к затуханию высокочастотных компонент решения в процессе вычислений. В отечественной [1] и зарубежной [4] литературе есть сведения, что для успешного решения этого класса задач перспективны разностные схемы с более высоким порядком (выше второго) аппроксимации по пространству.

Вопрос о свойствах многоточечных аналогов производных повышенного порядка аппроксимации изучался, в частности, в теоретических работах [7, 8]. В [7] исследованы неявные схемы максимального порядка точности для гиперболических систем. В статье [8] рассмотрены разностные задачи четвертого порядка точности на пятиточечном шаблоне для уравнений Пуассона и Гельмгольца. В работе [9] для многомерных уравнений с первыми и вторыми производными получены неявные высокоточные схемы и приводятся некоторые результаты расчета течения вязкой несжимаемой жидкости.

В дальнейшем в статье [10] на основе второго приближения к искомому решению итерационно-интерполяционного метода (ИИМ) [11], поочередного интегрирования по пространственным переменным и подхода Лакса — Вендроффа [2] для трехмерного уравнения

*Работа выполнена в рамках Федеральной целевой программы: Государственная поддержка интеграции высшего образования и фундаментальной науки на 1997 – 2000 г., программы “Университеты России”, а также при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты №98–01–03005, 99–01–00363.

© А. М. Гришин, А. С. Якимов, 2000.

неразрывности получены явно- неявные условно устойчивые разностные схемы, обладающие диссипативными свойствами и внутри области определения погрешностью аппроксимации в обычном смысле — $O(\tau^2 + \sum_{m=1}^3 h_m^4)$. При решении трехмерных уравнений математической физики для экономии времени расчета необходимо, чтобы разностная схема была абсолютно устойчивой по начальным данным.

Цель данной работы показать, что последнему требованию отвечают разностные схемы, полученные на основе алгоритма ИИМ [11, 12], в котором неявно присутствует подход Дугласа — Рэкфорда (схема стабилизирующей поправки [13]).

1. Постановка задачи и выбор метода решения

Рассмотрим уравнение в частных производных из [1]

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial(Uu)}{\partial x_1} + \frac{\partial(Uv)}{\partial x_2} + \frac{\partial(Uw)}{\partial x_3} = 0, \quad U \geq 0 \quad (1.1)$$

с начальным условием

$$U|_{t=0} = p(x). \quad (1.2)$$

Пусть для определенности величины $u(t, x)$, $v(t, x)$, $w(t, x)$ положительны и заранее известны при $0 \leq t \leq t_k$. Тогда граничные условия в общем случае задаются в виде [1]

$$U|_{x_1=0} = P_1(t, x_2, x_3), \quad U|_{x_2=0} = P_2(t, x_1, x_3), \quad U|_{x_3=0} = P_3(t, x_1, x_2). \quad (1.3)$$

Выпишем разностную схему ИИМ внутри параллелепипеда $Q : x = (x_1, x_2, x_3)$, ($0 < x_m < d_m$, $m = 1, 2, 3$) при $0 < t \leq t_k$.

Для построения разностного аналога уравнения (1.1) введем сетку с координатами узлов $x_{1,i} = ih_1$ ($i = 0, 1, 2, \dots, N$), $x_{2,j} = jh_2$ ($j = 0, 1, 2, \dots, M$), $x_{3,k} = kh_3$ ($k = 0, 1, 2, \dots, L$), $t_n = n\tau$ ($n = 0, 1, 2, \dots, \theta$) и обозначим $T = Uu$, $R = Uv$, $S = Uw$.

Воспользуемся операторами из статьи [10] при $h_m = \text{const}$, $m = 1, 2, 3$

$$A_1 U = \frac{U_{i-1,j,k} + 4U_{i,j,k} + U_{i+1,j,k}}{6}, \quad \Delta_1 T = \frac{T_{i-1,j,k} - T_{i+1,j,k}}{2h_1},$$

$$i = 1, \dots, N - 1, \quad j = 1, \dots, M - 1, \quad k = 1, \dots, L - 1. \quad (1.4)$$

Операторы $A_2 U$, $A_3 U$, $\Delta_2 R$, $\Delta_3 S$ по другим координатным осям Ox_2 , Ox_3 получают циклической заменой индексов. В результате разностные схемы для уравнения (1.1) согласно [12] имеют вид (точка “сверху” приписывается производной по времени)

$$A_1 \dot{U} = \Delta_1 T^{n+1/3} + \Delta_2 R^n + \Delta_3 S^n,$$

$$A_2 \dot{U} = \Delta_1 T^{n+1/3} + \Delta_2 R^{n+2/3} + \Delta_3 S^n,$$

$$A_3 \dot{U} = \Delta_1 T^{n+1/3} + \Delta_2 R^{n+2/3} + \Delta_3 S^{n+1},$$

$$i = 1, \dots, N - 1, \quad j = 1, \dots, M - 1, \quad k = 1, \dots, L - 1. \quad (1.5)$$

2. Метод построения разностной схемы на основе подхода Лакса — Вендроффа

Подход Лакса — Вендроффа [2, 5, 6], как было отмечено в [2], обобщается на многомерный случай. Он может иногда применяться и при наличии скачков (ударных волн), если не требуется очень тонкое пространственное разбиение. Тогда, вводя обозначения $F_1 = Uu$, $F_2 = Uv$, $F_3 = Uw$, для уравнения (1.1) имеем

$$\frac{U^{n+1} - U^n}{\tau} = - \sum_{m=1}^3 \frac{\partial F_m(U)}{\partial x_m} + 0.5\tau \sum_{m=1}^3 \frac{\partial \left[\frac{D_m \partial F_m}{\partial x_m} + D_m \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_i} + \frac{\partial F_j}{\partial x_j} \right) \right]}{\partial x_m}, \quad (2.1)$$

где $i, j = 1, 2, 3$, $m \neq i \neq j$, т. е. при $m = 1$: $i = 2$, $j = 3$, при $m = 2$: $i = 1$, $j = 3$, и при $m = 3$: $i = 1$, $j = 2$,

$$D_m = \frac{\partial F_m}{\partial U}. \quad (2.2)$$

Чтобы воспользоваться формулами высокого порядка точности по пространству, сумму правой части уравнения (2.1) необходимо записать в развернутом виде относительно производных от функции D_m и F_m , $m = 1, 2, 3$. В результате в (2.1) дополнительно будет 18 слагаемых. Используя (2.2), получим, например, по направлению координаты OX_1 ($D_1 = u$, $D_2 = v$, $D_3 = w$):

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \left[\frac{D_1 \partial F_1}{\partial x_1} + D_1 \left(\frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \frac{\partial F_3}{\partial x_3} \right) \right]}{\partial x_1} = \\ & = \frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{u \partial^2 F_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \frac{u \partial^2 F_2}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial F_3}{\partial x_3} + \frac{u \partial^2 F_3}{\partial x_1 \partial x_3}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Расписав аналогично (2.3) производные по осям OX_2 , OX_3 , имеем для уравнения (2.1)

$$\begin{aligned} \frac{U^{n+1} - U^n}{\tau} = & - \frac{\partial T}{\partial x_1} - \frac{\partial R}{\partial x_2} - \frac{\partial S}{\partial x_3} + 0.5\tau \left[\sum_{m=1}^3 \frac{\partial F_m}{\partial x_m} \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial v}{\partial x_2} + \frac{\partial w}{\partial x_3} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{u \partial \left(\sum_{m=1}^3 \frac{\partial F_m}{\partial x_m} \right)}{\partial x_1} + \frac{v \partial \left(\sum_{m=1}^3 \frac{\partial F_m}{\partial x_m} \right)}{\partial x_2} + \frac{w \partial \left(\sum_{m=1}^3 \frac{\partial F_m}{\partial x_m} \right)}{\partial x_3} \right]. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Разностные операторы для первых, вторых и смешанных производных в квадратной скобке правой части уравнения (2.4) внутри области определения Q записываются на четырех-, пяти- и восьмиточечном шаблоне соответственно. В плоскостях, отстоящих на шаг по пространству (h_m , $m = 1, 2, 3$) от граничных плоскостей $x_m = 0$, $x_m = d_m$, $m = 1, 2, 3$, смешанные производные записываются на десятиточечном шаблоне. Для разрешения пятиточечной скалярной прогонки на граничных плоскостях $x_m = d_m$, $m = 1, 2, 3$ записываются дополнительные разностные соотношения, которые представляют собой аппроксимацию исходного уравнения (1.1) [14].

Формулы высокого порядка аппроксимации по пространству для первых, вторых и смешанных производных можно легко получить методом неопределенных коэффициентов на четырех-, пяти- и т. д. точечном шаблоне, записывая эти производные через ряд Тэйлора.

У искомых или заданных функций u, v, w , не входящих под знак частных производных, в разностях отсутствуют операторные значки $\Delta_m, \Lambda_m, \dots$ и поэтому они аппроксимируются внутри области определения независимым образом, например, в центре любого (четырёх-, пяти-, и т. д.) шаблона как $u_{i,j,k}, v_{i,j,k}, \dots$. При написании операторов смешанных производных предполагалось, что $\frac{\partial^2}{\partial x_m \partial x_p} = \frac{\partial^2}{\partial x_p \partial x_m}$ ($\Lambda_{m,p} = \Lambda_{p,m}$), $m \neq p$, $m, p = 1, 2, 3$.

Разностные операторы внутри области определения для первых производных на четырехточечном шаблоне записываются внутри параллелепипеда Q следующим образом:

$$\nabla_1 T = \frac{T_{i-2,j,k} - 8T_{i-1,j,k} + 8T_{i+1,j,k} - T_{i+2,j,k}}{12h_1},$$

$$i = 2, \dots, N-2, \quad j = 2, \dots, M-2, \quad k = 2, \dots, L-2. \quad (2.5)$$

Операторы $\nabla_2 R, \nabla_3 S$ в (2.5); $v\Lambda_2 R, w\Lambda_3 S$ и ниже в (2.7); $v\Lambda_2 R_{i,1,k}, w\Lambda_3 S_{i,j,1}$ в (2.8); $w\Lambda_{1,3} T, w\Lambda_{2,3} R$ в (2.9); $w\Lambda_{1,3} T_{1,j,k}$ в (2.10); $\nabla_3 S_{N,j,k}$ в (2.12) получаются один из другого круговой заменой индексов.

Разностные операторы для первых производных в приграничных плоскостях $x_m = h_m, x_m = d_m - h_m, m = 1, 2, 3$ на четырехточечном шаблоне (рис. 1) имеют вид

$$\nabla_1 T_1 = \frac{-2T_{0,j,k} - 3T_{1,j,k} + 6T_{2,j,k} - T_{3,j,k}}{6h_1},$$

$$\nabla_1 T_{N-1} = \frac{2T_{N,j,k} + 3T_{N-1,j,k} - 6T_{N-2,j,k} + T_{N-3,j,k}}{6h_1},$$

$$j = 2, \dots, M-2, \quad k = 2, \dots, L-2. \quad (2.6)$$

Разностный оператор для вторых производных внутри параллелепипеда Q записывается на пятиточечном шаблоне

$$u\Lambda_1 T = \frac{u_{i,j,k}(-T_{i-2,j,k} + 16T_{i-1,j,k} - 30T_{i,j,k} + 16T_{i+1,j,k} - T_{i+2,j,k})}{12h_1^2},$$

$$i = 2, \dots, N-2, \quad j = 2, \dots, M-2, \quad k = 2, \dots, L-2. \quad (2.7)$$

Разностный оператор в приграничной плоскости $x_1 = h_1$ имеет вид

$$u\Lambda_1 T_1 = \frac{u_{1,j,k}(11T_{0,j,k} - 20T_{1,j,k} + 6T_{2,j,k} + 4T_{3,j,k} - T_{4,j,k})}{12h_1^2},$$

$$i = 2, \dots, N-2, \quad j = 2, \dots, M-2, \quad k = 2, \dots, L-2. \quad (2.8)$$

Разностный оператор для смешанной производной на восьмиточечном шаблоне внутри области определения Q записывается

$$v\Lambda_{1,2} T = v_{i,j,k}[(T_{i+1,j+1,k} - T_{i-1,j+1,k} - T_{i+1,j-1,k} + T_{i-1,j-1,k})/3 -$$

$$-(T_{i+2,j+2,k} - T_{i-2,j+2,k} - T_{i+2,j-2,k} + T_{i-2,j-2,k})/48]/(h_1 h_2),$$

$$i = 2, \dots, N-2, \quad j = 2, \dots, M-2, \quad k = 2, \dots, L-2. \quad (2.9)$$

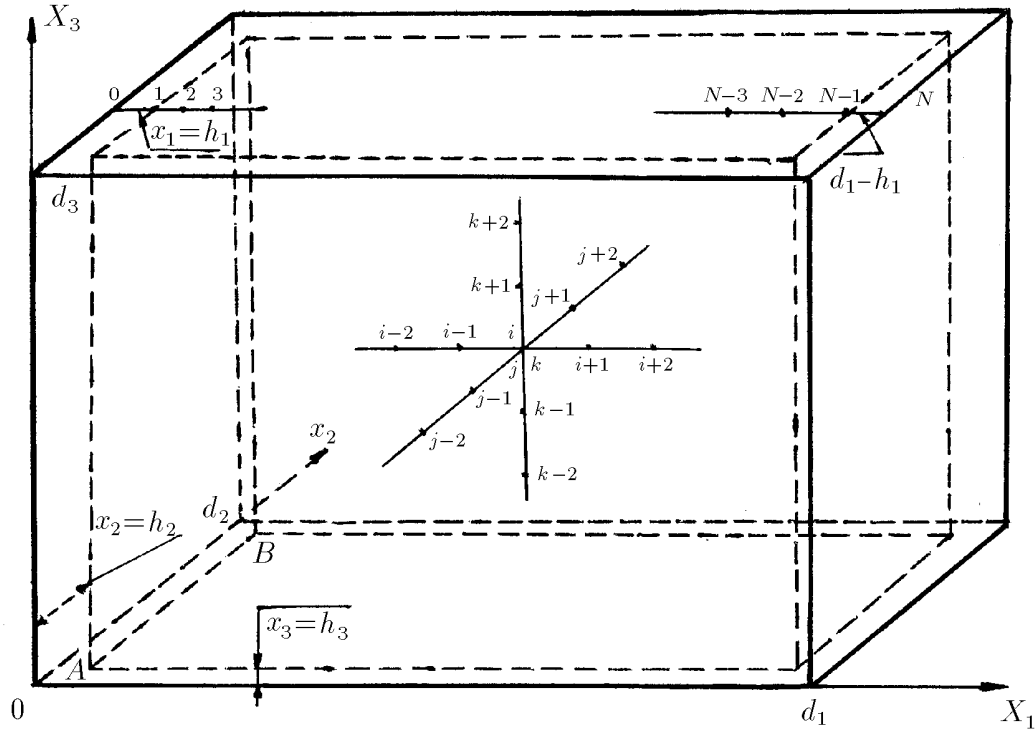


Рис. 1. Система координат и обозначения.

Разностный оператор для смешанной производной $\frac{\partial^2 T}{\partial x_1 \partial x_2}$ в приграничной плоскости $x_1 = h_1$ на двенадцатиточечном шаблоне по направлению оси координат OX_1 имеет вид

$$\begin{aligned} v\Lambda_{1,2}T_1 = v_{1,j,k} [& 5(T_{2,j+1,k} - T_{0,j+1,k} - T_{2,j-1,k} + T_{0,j-1,k})/24 - (T_{2,j+2,k} - \\ & - T_{0,j+2,k} - T_{2,j-2,k} + T_{0,j-2,k})/24 + (T_{3,j+1,k} - T_{0,j+1,k} - T_{3,j-1,k} + T_{0,j-1,k})/6 \\ & - (T_{4,j+1,k} - T_{0,j+1,k} - T_{4,j-1,k} + T_{0,j-1,k})/16] / (h_1 h_2), \\ & j = 2, \dots, M-2, \quad k = 2, \dots, L-2. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Вблизи угла $x_m = 0$, $m = 1, 2, 3$ в узле пересечения плоскостей $x_m = h_m$, $m = 1, 2, 3$ (на рис. 1 узел A) разностные операторы для $\frac{\partial^2 R_{1,1,1}}{\partial x_2 \partial x_3}$, $\frac{\partial^2 T_{N-1,1,1}}{\partial x_1 \partial x_2}$ записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} \Lambda_{2,3}R_{1,1,1} = w_{1,1,1} [& (R_{1,2,2} - R_{1,2,0} - R_{1,0,2} + R_{1,0,0})/8 + \\ & + (R_{1,3,2} - R_{1,3,0} - R_{1,0,2} + R_{1,0,0})/6 - (R_{1,4,2} - R_{1,4,0} - R_{1,0,2} + R_{1,0,0})/8 + \\ & + (R_{1,4,3} - R_{1,4,0} - R_{1,0,3} + R_{1,0,0})/12 - (R_{1,4,4} - R_{1,4,0} - R_{1,0,4} + R_{1,0,0})/32] / (h_2 h_3), \\ \Lambda_{1,2}T_{N-1,1,1} = w_{N-1,1,1} [& (T_{N,2,1} - T_{N-2,2,1} - T_{N,0,1} + T_{N-2,0,1})/8 + \\ & + (T_{N,2,1} - T_{N-3,2,1} - T_{N,0,1} + T_{N-3,0,1})/6 - (T_{N,2,1} - T_{N-4,2,1} - T_{N,0,1} + T_{N-4,0,1})/8 + \\ & + (T_{N,3,1} - T_{N-4,3,1} - T_{N,0,1} + T_{N-4,0,1})/12 - (T_{N,4,1} - T_{N-4,4,1} - T_{N,0,1} + \\ & + T_{N-4,0,1})/32] / (h_1 h_2). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Аналогично выписываются разностные операторы для смешанных производных в остальных приграничных плоскостях $x_2 = h_2$, $x_3 = h_3$, $x_m = d_m - h_m$, $m = 1, 2, 3$, линиях и узлах вблизи вершин параллелепипеда Q .

Предполагается, что на поверхностях, ограничивающих область $Q : x_m = d_m$, $m = 1, 2, 3$, справедливо исходное уравнение (1.1). Аппроксимируем это уравнение независимым образом.

На плоскости $x_1 = d_1$ ($0 < x_m < d_m$, $m = 2, 3$) разностные операторы записываются для первых производных в виде

$$\begin{aligned}\nabla_1 T_N &= \frac{11T_{N,j,k} - 18T_{N-1,j,k} + 9T_{N-2,j,k} - 2T_{N-3,j,k}}{6h_1}, \\ \nabla_2 R_N &= \frac{R_{N,j-2,k} - 8R_{N,j-1,k} + 8R_{N,j+1,k} - R_{N,j+2,k}}{12h_2}, \\ j &= 2, \dots, M-2, \quad k = 2, \dots, L-2.\end{aligned}\tag{2.12}$$

Так как в логической схеме ИИМ [12] для решения трехмерного уравнения (1.1) неявно присутствует подход Дугласа Рэкфорда [13], то, используя обозначения (1.4), (2.5), (2.7), (2.9), для уравнений Лакса – Вендроффа (2.4) можно выписать разностные соотношения, аналогичные (1.5). В целях краткости дальнейших выкладок введем обозначения

$$\begin{aligned}f &= 0.5\tau[u(\Lambda_{1,2}R + \Lambda_{1,3}S) + v(\Lambda_{1,2}T + \Lambda_{2,3}S) + w(\Lambda_{1,3}T + \Lambda_{2,3}R)], \\ G &= \nabla_1 u + \nabla_2 v + \nabla_3 w,\end{aligned}$$

тогда получим разностные схемы внутри области определения Q

$$\begin{aligned}A_1(U^{n+1/3} - U^n)/\tau &= (\Delta_1 + 0.5\tau u\Lambda_1)T^{n+1/3} + (\Delta_2 + 0.5\tau v\Lambda_2)R^n + \\ &+ (\Delta_3 + 0.5\tau w\Lambda_3)S^n + 0.5\tau(\nabla_1 T^{n+1/3} + \nabla_2 R^n + \nabla_3 S^n)G^n + f^n,\end{aligned}\tag{2.13}$$

$$\begin{aligned}A_2(U^{n+2/3} - U^n)/\tau &= (\Delta_1 + 0.5\tau u\Lambda_1)T^{n+1/3} + (\Delta_2 + 0.5\tau v\Lambda_2)R^{n+2/3} + \\ &+ (\Delta_3 + 0.5\tau w\Lambda_3)S^n + 0.5\tau(\nabla_1 T^{n+1/3} + \nabla_2 R^{n+2/3} + \nabla_3 S^n)G^n + f^n,\end{aligned}\tag{2.14}$$

$$\begin{aligned}A_3(U^{n+1} - U^n)/\tau &= (\Delta_1 + 0.5\tau u\Lambda_1)T^{n+1/3} + (\Delta_2 + 0.5\tau v\Lambda_2)R^{n+2/3} + \\ &+ (\Delta_3 + 0.5\tau w\Lambda_3)S^{n+1} + 0.5\tau(\nabla_1 T^{n+1/3} + \nabla_2 R^{n+2/3} + \nabla_3 S^{n+1})G^n + f^n, \\ i &= 2, \dots, N-2, \quad j = 2, \dots, M-2, \quad k = 2, \dots, L-2.\end{aligned}\tag{2.15}$$

Практически при исследовании устойчивости разностных схем (2.13)–(2.15) и для написания программы расчета удобно пользоваться вместо двух последних уравнений (2.14), (2.15) более простыми разностными уравнениями [2]. Вычтем из второго уравнения первое, а из третьего второе, тогда вместо двух последних уравнений системы (2.13)–(2.15) получим

$$\begin{aligned}(A_2 U^{n+2/3} - A_1 U^{n+1/3})/\tau &= (\Delta_2 + 0.5\tau v\Lambda_2)(R^{n+2/3} - R^n) + \\ &+ 0.5\tau \nabla_2 (R^{n+2/3} - R^n)G^n + (A_2 U^n - A_1 U^n)/\tau,\end{aligned}\tag{2.16}$$

$$\begin{aligned}(A_3 U^{n+1} - A_2 U^{n+2/3})/\tau &= (\Delta_3 + 0.5\tau w\Lambda_3)(S^{n+1} - S^n) + \\ &+ 0.5\tau \nabla_3 (S^{n+1} - S^n)G^n + (A_3 U^n - A_2 U^n)/\tau, \\ i &= 2, \dots, N-2, \quad j = 2, \dots, M-2, \quad k = 2, \dots, L-2.\end{aligned}\tag{2.17}$$

Разностные схемы в приграничной плоскости $x_1 = h_1$, при использовании операторов из (1.4), (2.6), (2.8), (2.10), переписываются

$$\begin{aligned}
X_1 &= \nabla_1 u_1 + \nabla_2 v_1 + \nabla_3 w_1, \\
f_1 &= u(\Lambda_{1,2}R_1 + \Lambda_{1,3}S_1) + v(\Lambda_{1,2}T_1 + \Lambda_{2,3}S_1) + w(\Lambda_{1,3}T_1 + \Lambda_{2,3}R_1), \\
0 &< x_m < d_m, \quad m = 2, 3, \\
A_1(U_1^{n+1/3} - U_1^n)/\tau &= (\Delta_1 + 0.5\tau u\Lambda_1)T_1^{n+1/3} + (\Delta_2 + 0.5\tau v\Lambda_2)R_1^n + \\
&+ (\Delta_3 + 0.5\tau w\Lambda_3)S_1^n + 0.5\tau(\nabla_1 T_1^{n+1/3} + \nabla_2 R_1^n + \nabla_3 S_1^n)X_1^n + 0.5\tau f_1^n, \\
(A_2 U_1^{n+2/3} - A_1 U_1^{n+1/3})/\tau &= (\Delta_2 + 0.5\tau v\Lambda_2)(R_1^{n+2/3} - R_1^n) + \\
&+ 0.5\tau \nabla_2 (R_1^{n+2/3} - R_1^n)X_1^n + (A_2 U_1^n - A_1 U_1^n)/\tau, \\
(A_3 U_1^{n+1} - A_2 U_1^{n+2/3})/\tau &= (\Delta_3 + 0.5\tau w\Lambda_3)(S_1^{n+1} - S_1^n) + \\
&+ 0.5\tau \nabla_3 (S_1^{n+1} - S_1^n)X_1^n + (A_3 U_1^n - A_2 U_1^n)/\tau, \\
j &= 2, \dots, M-2, \quad k = 2, \dots, L-2.
\end{aligned} \tag{2.18}$$

Аналогично выписываются разностные схемы для приграничных плоскостей $x_m = h_m$, $m = 2, 3$ и $x_m = d_m - h_m$, $m = 1, 2, 3$. Разностные уравнения на линии пересечения плоскостей $x_1 = h_1$, $x_3 = h_3$, при использовании операторов (1.4), (2.5)–(2.8), (2.10), имеют вид

$$\begin{aligned}
X_{1,j,1} &= \nabla_1 u_{1,j,1} + \nabla_2 v_{1,j,1} + \nabla_3 w_{1,j,1}, \\
f_{1,j,1} &= u(\Lambda_{1,2}R_{1,j,1} + \Lambda_{1,3}S_{1,j,1}) + v(\Lambda_{1,2}T_{1,j,1} + \Lambda_{2,3}S_{1,j,1}) + w(\Lambda_{1,3}T_{1,j,1} + \Lambda_{2,3}R_{1,j,1}), \\
A_1(U_{1,j,1}^{n+1/3} - U_{1,j,1}^n)/\tau &= (\Delta_1 + 0.5\tau u\Lambda_1)T_{1,j,1}^{n+1/3} + (\Delta_2 + 0.5\tau v\Lambda_2)R_{1,j,1}^n + \\
&+ (\Delta_3 + 0.5\tau w\Lambda_3)S_{1,j,1}^n + 0.5\tau(\nabla_1 T_{1,j,1}^{n+1/3} + \nabla_2 R_{1,j,1}^n + \nabla_3 S_{1,j,1}^n)X_{1,j,1}^n + 0.5\tau f_{1,j,1}^n, \\
(A_2 U_{1,j,1}^{n+2/3} - A_1 U_{1,j,1}^{n+1/3})/\tau &= (\Delta_2 + 0.5\tau v\Lambda_2)(R_{1,j,1}^{n+2/3} - R_{1,j,1}^n) + \\
&+ 0.5\tau \nabla_2 (R_{1,j,1}^{n+2/3} - R_{1,j,1}^n)X_{1,j,1}^n + (A_2 U_{1,j,1}^n - A_1 U_{1,j,1}^n)/\tau, \\
(A_3 U_{1,j,1}^{n+1} - A_2 U_{1,j,1}^{n+2/3})/\tau &= (\Delta_3 + 0.5\tau w\Lambda_3)(S_{1,j,1}^{n+1} - S_{1,j,1}^n) + \\
&+ 0.5\tau \nabla_3 (S_{1,j,1}^{n+1} - S_{1,j,1}^n)X_{1,j,1}^n + (A_3 U_{1,j,1}^n - A_2 U_{1,j,1}^n)/\tau, \\
j &= 2, \dots, M-2.
\end{aligned} \tag{2.19}$$

Аналогично можно записать разностные схемы для остальных одиннадцати линий пересечения плоскостей ($x_1 = h_1$, $x_2 = h_2$), ($x_3 = h_3$, $x_2 = h_2$) и ($x_m = d_m - h_m$, $x_p = d_p - h_p$), $m, p = 1, 2, 3$, $m \neq p$. Разностные уравнения вблизи начала координат: в узле пересечения плоскостей $x_m = h_m$, $m = 1, 2, 3$, при использовании операторов (1.4), (2.6), (2.8), (2.10), (2.11), записываются

$$\begin{aligned}
X_{1,1,1} &= \nabla_1 u_{1,1,1} + \nabla_2 v_{1,1,1} + \nabla_3 w_{1,1,1}, \quad f_{1,1,1} = u(\Lambda_{1,2}R_{1,1,1} + \Lambda_{1,3}S_{1,1,1}) + \\
&+ v(\Lambda_{1,2}T_{1,1,1} + \Lambda_{2,3}S_{1,1,1}) + w(\Lambda_{1,3}T_{1,1,1} + \Lambda_{2,3}R_{1,1,1}), \\
A_1(U_{1,1,1}^{n+1/3} - U_{1,1,1}^n)/\tau &= (\Delta_1 + 0.5\tau u\Lambda_1)T_{1,1,1}^{n+1/3} + (\Delta_2 + 0.5\tau v\Lambda_2)R_{1,1,1}^n + \\
&+ (\Delta_3 + 0.5\tau w\Lambda_3)S_{1,1,1}^n + 0.5\tau(\nabla_1 T_{1,1,1}^{n+1/3} + \nabla_2 R_{1,1,1}^n + \nabla_3 S_{1,1,1}^n)X_{1,1,1}^n + 0.5\tau f_{1,1,1}^n,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (A_2 U_{1,1,1}^{n+2/3} - A_1 U_{1,1,1}^{n+1/3})/\tau &= (\Delta_2 + 0.5\tau v \Lambda_2)(R_{1,1,1}^{n+2/3} - R_{1,1,1}^n) + \\
 &+ 0.5\tau \nabla_2 (R_{1,1,1}^{n+2/3} - R_{1,1,1}^n) X_{1,1,1}^n + (A_2 U_{1,1,1}^n - A_1 U_{1,1,1}^n)/\tau, \\
 (A_3 U_{1,1,1}^{n+1} - A_2 U_{1,1,1}^{n+2/3})/\tau &= (\Delta_3 + 0.5\tau w \Lambda_3)(S_{1,1,1}^{n+1} - S_{1,1,1}^n) + \\
 &+ 0.5\tau \nabla_3 (S_{1,1,1}^{n+1} - S_{1,1,1}^n) X_{1,1,1}^n + (A_3 U_{1,1,1}^n - A_2 U_{1,1,1}^n)/\tau.
 \end{aligned} \tag{2.20}$$

Аналогично разностным уравнениям (2.20) можно записать разностные схемы для остальных семи узлов пересечения плоскостей $x_m = h_m$, $x_m = d_m - h_m$, $m = 1, 2, 3$.

Разностные уравнения на ребре ($0 < x_1 < d_1$) пересечения граничных плоскостей $x_2 = d_2$, $x_3 = d_3$, а также на линиях пересечения плоскости $x_1 = d_1$, плоскостей $x_m = h_m$, $x_m = d_m - h_m$, $m = 2, 3$ и в вершине $x_m = d_m$, $m = 1, 2, 3$ при помощи операторов из (2.5), (2.6), (2.12) имеют вид

$$\begin{aligned}
 (U_{M,L}^{n+1/3} - U_{M,L}^n)/\tau &= -\nabla_1 T_{M,L}^{n+1/3} - \nabla_2 R_{M,L}^n - \nabla_3 S_{M,L}^n, \\
 (U_{M,L}^{n+2/3} - U_{M,L}^{n+1/3})/\tau &= -\nabla_2 (R_{M,L}^{n+2/3} - R_{M,L}^n), \\
 (U_{M,L}^{n+1} - U_{M,L}^{n+2/3})/\tau &= -\nabla_3 (S_{M,L}^{n+1} - S_{M,L}^n), \quad i = 2, \dots, N-2, \\
 (U_{1,M,L}^{n+1/3} - U_{1,M,L}^n)/\tau &= -\nabla_1 T_{1,M,L}^{n+1/3} - \nabla_2 R_{1,M,L}^n - \nabla_3 S_{1,M,L}^n, \\
 (U_{1,M,L}^{n+2/3} - U_{1,M,L}^{n+1/3})/\tau &= -\nabla_2 (R_{1,M,L}^{n+2/3} - R_{1,M,L}^n), \\
 (U_{1,M,L}^{n+1} - U_{1,M,L}^{n+2/3})/\tau &= -\nabla_3 (S_{1,M,L}^{n+1} - S_{1,M,L}^n), \\
 (U_{N-1,M,L}^{n+1/3} - U_{N-1,M,L}^n)/\tau &= -\nabla_1 T_{N-1,M,L}^{n+1/3} - \nabla_2 R_{N-1,M,L}^n - \nabla_3 S_{N-1,M,L}^n, \\
 (U_{N-1,M,L}^{n+2/3} - U_{N-1,M,L}^{n+1/3})/\tau &= -\nabla_2 (R_{N-1,M,L}^{n+2/3} - R_{N-1,M,L}^n), \\
 (U_{N-1,M,L}^{n+1} - U_{N-1,M,L}^{n+2/3})/\tau &= -\nabla_3 (S_{N-1,M,L}^{n+1} - S_{N-1,M,L}^n), \\
 (U_{N,M,L}^{n+1/3} - U_{N,M,L}^n)/\tau &= -\nabla_1 T_{N,M,L}^{n+1/3} - \nabla_2 R_{N,M,L}^n - \nabla_3 S_{N,M,L}^n, \\
 (U_{N,M,L}^{n+2/3} - U_{N,M,L}^{n+1/3})/\tau &= -\nabla_2 (R_{N,M,L}^{n+2/3} - R_{N,M,L}^n), \\
 (U_{N,M,L}^{n+1} - U_{N,M,L}^{n+2/3})/\tau &= -\nabla_3 (S_{N,M,L}^{n+1} - S_{N,M,L}^n).
 \end{aligned} \tag{2.21}$$

Разностные схемы на плоскости $x_1 = d_1$ при помощи операторов (2.12) записываются

$$\begin{aligned}
 (U_N^{n+1/3} - U_N^n)/\tau &= -\nabla_1 T_N^{n+1/3} - \nabla_2 R_N^n - \nabla_3 S_N^n, \\
 (U_N^{n+2/3} - U_N^{n+1/3})/\tau &= -\nabla_2 (R_N^{n+2/3} - R_N^n), \\
 (U_N^{n+1} - U_N^{n+2/3})/\tau &= -\nabla_3 (S_N^{n+1} - S_N^n), \\
 j = 2, \dots, M-2, \quad k = 2, \dots, L-2.
 \end{aligned} \tag{2.22}$$

Не представляет труда записать разностные уравнения для плоскостей $x_m = d_m$, $m = 2, 3$, для ребра ($0 < x_2 < d_2$) пересечения плоскостей $x_1 = d_1$, $x_3 = d_3$ и ребра ($0 < x_3 < d_3$) пересечения плоскостей $x_1 = d_1$, $x_2 = d_2$, используя операторные выражения, подобные (2.5), (2.6), (2.12).

Наконец, на граничных плоскостях $x_m = 0$, $m = 1, 2, 3$ имеем

$$\begin{aligned}
 U_{0,j,k}^{n+1} &= P_{1,j,k}^{n+1}|_{x_1=0}, \quad j = 0, \dots, M, \quad k = 0, \dots, L, \\
 U_{i,0,k}^{n+1} &= P_{2,i,k}^{n+1}|_{x_2=0}, \quad i = 0, \dots, N, \quad k = 0, \dots, L, \\
 U_{i,j,0}^{n+1} &= P_{3,i,j}^{n+1}|_{x_3=0}, \quad i = 0, \dots, N, \quad j = 0, \dots, M.
 \end{aligned} \tag{2.23}$$

3. О погрешности аппроксимации и устойчивости разностной схемы

Внутри параллелепипеда $Q: x \in (0 < x_m < d_m, m = 1, 2, 3)$ получается $B_1 = (N-1)(M-1)(L-1)$ разностных уравнений (2.13)–(2.15), (2.18), (2.19) плюс пять систем уравнений вида (2.18), плюс одиннадцать разностных схем системы уравнений типа (2.19) и плюс семь разностных уравнений, подобных уравнениям (2.20), для определения B_1 неизвестных U .

На граничных плоскостях $x_m = d_m, m = 1, 2, 3$ выписываются $B_2 = (N-1)(M-1) + (N-1)(L-1) + (M-1)(L-1) + N-1 + M-1 + L-1$ разностных уравнений вида (2.21), (2.22) для определения B_2 неизвестных. На граничных поверхностях $x_m = 0, m = 1, 2, 3$ имеем также $B_3 = NM + NL + ML$ конечных алгебраических выражений (2.23) для определения B_3 заданных функций из (1.3).

Легко заметить, что расчет по однородным разностным схемам (2.13)–(2.15), (2.18)–(2.23) экономичен (с учетом условий абсолютной устойчивости (3.6), (3.8)), так как для получения решения в узлах области определения понадобится $O(B_1)$ арифметических действий, пропорциональное числу узлов области Q .

Если существуют ограниченные вплоть до шестого порядка производные по пространству и третьего порядка по времени, то для уравнения (1.1) локальная погрешность аппроксимации разностной схемы (2.13)–(2.15) при $h_m = h, m = 1, 2, 3$ внутри области определения Q на решении задачи — $O(\tau^2 + h^4)$. Условие $h_m = h, m = 1, 2, 3$ для ПЭВМ Pentium-2 (ОП — 128 Мб) не является обременительным.

Локальная погрешность аппроксимации разностных схем (2.21), (2.22) на уравнении (1.1) — $O(\tau + h^3)$, а схем (2.18)–(2.20) на решении задачи — $O(\tau^2 + h^3)$. Имеются в виду первые уравнения этих систем по направлению координаты OX_1 , так как вторые уравнения типа (2.16), (2.17) по направлению координат OX_2, OX_3 необходимы только для устойчивости разностных схем.

Начальное условие (1.2) удовлетворяется точно. Граничные уравнения (2.23) на соответствующей граничной плоскости из (1.3) аппроксимируются точно, так как они заданы от времени явно на целом слое.

Методом Фурье в приближении “замороженных” коэффициентов [1, 13, 14] можно найти условие устойчивости явно-неявных разностных уравнений (2.13)–(2.15) по начальным данным при $u = v = w = c$ ($c = \text{const}$). Принцип “замороженных” коэффициентов [14] позволяет ориентироваться на эвристическом уровне строгости и при исследовании устойчивости нелинейных задач.

Если ζ — множитель роста разностных схем (2.13), (2.16), (2.17), то спектральное условие Неймана имеет вид (3.6). Сделаем стандартную подстановку [1]

$$U^{n+1} = \zeta U^n, \quad U_{i,j,k}^n = \exp[I(g_1 x_{1,i} + g_2 x_{2,j} + g_3 x_{3,k})], \quad (3.1)$$

где $I = \sqrt{-1}$, $g_m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, m = 1, 2, 3$ — гармоники при переходе со слоя на слой. Подставим (3.1) в (2.13), (2.16), (2.17) и для сокращения дальнейших выкладок введем обозначения:

$$\begin{aligned} f_2 &= v|_{t=0} = c, & f_3 &= w|_{t=0} = c, & f_1 &= u|_{t=0} = c, \\ b_m &= f_m h_m^{-1} \sin g_m h_m, & r_m &= (1 + 2 \cos^2 g_m h_m / 2) / 3\tau, \\ a_m &= \tau f_m^2 h_m^{-2} (16 \sin^2 g_m h_m / 2 - \sin^2 g_m h_m) / 6, & m &= 1, 2, 3, \\ d_{i,j} &= \tau (h_i h_j)^{-1} f_i f_j \sin g_i h_i \sin g_j h_j, & q_{i,j} &= \tau (h_i h_j)^{-1} f_i f_j \sin 2g_i h_i \sin 2g_j h_j, \end{aligned}$$

$$i, j = 1, 2, 3, \quad i \neq j,$$

$$Y = 2(d_{1,2} + d_{1,3} - q_{1,2} - q_{1,3}) + 2(d_{2,3} - q_{2,3}). \quad (3.2)$$

Тогда по каждому из направлений получим, замечая, что $G|_{t=0} = 0$

$$U^{n+1/3}(r_1 + a_1 + Ib_1) = U^n(r_1 - a_2 - a_3 - Ib_2 - Ib_3 - Y), \quad (3.3)$$

$$U^{n+2/3}(r_2 + a_2 + Ib_2) = r_1 U^{n+1/3} + U^n(r_2 - r_1 + a_2 + Ib_2), \quad (3.4)$$

$$U^{n+1}(r_3 + a_3 + Ib_3) = r_2 U^{n+2/3} + U^n(r_3 - r_2 + a_3 + Ib_3). \quad (3.5)$$

Выразим $U^{n+1/3}$ из (3.3) и подставим в (3.4), затем найдем $U^{n+2/3}$ из полученного соотношения и подставим в (3.5). В результате окончательно имеем уравнение для определения ζ :

$$\zeta = (H + IB)/(C + ID), \quad |\zeta| = [(H^2 + B^2)/(C^2 + D^2)]^{0.5}, \quad (3.6)$$

где

$$H = F + s - r_1 r_2 Y, \quad C = F + a, \quad D = E + b, \quad B = E + q, \quad I^2 = -1,$$

$$F = r_3 r_2 r_1 + r_1(a_2 a_3 - b_2 b_3) + r_2(a_1 a_3 - b_1 b_3) + r_3(a_2 a_1 - b_2 b_1) + a_1 a_2 a_3 - a_1 b_2 b_3 - a_2 b_1 b_3 - a_3 b_2 b_1,$$

$$s = a_1 r_2 (r_3 - r_1) + r_1 a_2 (r_3 - r_2),$$

$$a = r_3 r_2 a_1 + r_3 a_2 r_1 + a_3 r_2 r_1,$$

$$E = r_1(b_2 a_3 + a_2 b_3) + r_2(b_1 a_3 + a_1 b_3) + r_3(b_2 a_1 + a_2 b_1) + a_2 a_3 b_1 + a_1 a_3 b_2 + a_1 a_2 b_3 - b_1 b_2 b_3,$$

$$q = b_1 r_2 (r_3 - r_1) + r_1 b_2 (r_3 - r_2),$$

$$b = r_3 r_2 b_1 + r_3 b_2 r_1 + b_3 r_2 r_1. \quad (3.7)$$

Для двухслойных разностных схем необходимое условие устойчивости по начальным данным записывается [1, 13]: $|\zeta| \leq 1$. В силу того, что $|\sin g_m h_m| \leq 1$, $|\cos g_m h_m| \leq 1$, найдем оценку сверху для ζ в (3.6). В частности, знаменатель будет минимален в (3.6) при $g_m h_m / 2 = k\pi$ ($m = 1, 2, 3$, $k = 1, 2, \dots$). Тогда из выражений (3.2), (3.6), (3.7) имеем $r_m = 1/\tau$, $\sin g_m h_m = \sin g_m h_m / 2 = 0$, $m = 1, 2, 3$, $a = b = s = q = E = 0$, $C = F = 1/\tau^3$. При этом числитель в (3.6) равен $H = F = 1/\tau^3$, так как $s = Y = B = 0$. В результате окончательно получим

$$|\zeta| = H/C \equiv 1. \quad (3.8)$$

Из (3.6), (3.8) видно, что разностные схемы (2.13), (2.16), (2.17) безусловно устойчивы при $\tau > 0$. Аналогично доказывается абсолютная устойчивость остальных разностных схем (2.18)–(2.22).

Рассмотрим разностные схемы в направлении координаты OX_1 . Это будет разностная схема (2.13) с пятидиагональной матрицей, алгебраические выражения из первого соотношения типа (2.18) при $x_1 = h_1$, и $x_{N-1} = d_{N-1} - h_{N-1}$, а также (2.22) при $x_1 = d_1$. Воспользуемся сокращенной записью этих уравнений:

$$H_i U_{i-2} + B_i U_{i-1} + C_i U_i + D_i U_{i+1} + E_i U_{i+2} = F_i, \quad (3.9)$$

$$i = 2, \dots, N - 2,$$

$$U_0 = P_1|_{X_1=0}, \quad (3.10)$$

$$H_1 U_0 + B_1 U_1 + C_1 U_2 + D_1 U_3 + E_1 U_4 = F_1, \quad (3.11)$$

$$H_{N-1}U_{N-4} + B_{N-1}U_{N-3} + C_{N-1}U_{N-2} + D_{N-1}U_{N-1} + E_{N-1}U_N = F_{N-1}, \quad (3.12)$$

$$B_N U_{N-3} + C_N U_{N-2} + D_N U_{N-1} + E_N U_N = F_N. \quad (3.13)$$

Так как матрица коэффициентов уравнений (3.9)–(3.13) пятидиагональна, то для нахождения неизвестных воспользуемся методом скалярной прогонки [15]. Используя методику работы [15], нетрудно доказать устойчивость пятиточечной прогонки для разностных схем (2.13), (2.18)–(2.23).

Для разностных схем вида (2.22), например, на плоскости $x_1 = d_1$, ограничивающей область определения задачи Q , условие устойчивости прогонки имеет вид

$$\tau \leq h/(1.5u), \quad (3.14)$$

где $u = \max u_{N,j,k}$, $j = 1, \dots, M-1$, $k = 1, \dots, L-1$.

Нетрудно показать [12, 16], что разностные схемы (2.13)–(2.15), (2.18)–(2.22), получаемые при помощи поочередного интегрирования по пространственным переменным ИИМ, обладают свойством слабой консервативности (консервативность удовлетворяется с порядком аппроксимации $O(\tau + h^2)$) в смысле результатов работы [17].

4. Сходимость и примеры применения метода

Сходимость разностных схем (1.5), (2.21)–(2.23) установим практически на последовательности сгущающихся сеток по пространству при решении трехмерной дифференциальной задачи (4.1) с граничными условиями (4.2)

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \sum_{m=1}^3 \frac{\partial U}{\partial x_m} = F, \quad U|_{t=0} = f, \quad (4.1)$$

$$f = 1 + x_1^z + x_3^z + (x_2 - 1)^z, \quad F = 4ft^3 + z(1 + t^4)[x_1^{z-1} + x_3^{z-1} + (x_2 - 1)^{z-1}],$$

$$U|_{x_1=0} = (1 + t^4)[1 + (x_2 - 1)^z + x_3^z], \quad U|_{x_2=0} = (1 + t^4)[1 + (-1)^z + x_1^z + x_3^z],$$

$$U|_{x_3=0} = (1 + t^4)[1 + x_1^z + (x_2 - 1)^z]. \quad (4.2)$$

Точное решение задачи (4.1), (4.2) : $U = f(1 + t^4)$ в кубе $Q : [0 \leq x_m \leq 1, m = 1, 2, 3]$ известно при $0 \leq t \leq t_k$. Были взяты следующие значения входных данных: $h_m = h$, $m = 1, 2, 3$, $z = 6$, $t_k = 7$, $\tau = 0.005$. Программа составлена на языке Фортран-77, расчет проводился на ПЭВМ Pentium-2 (200 МГц, Транслятор Power Station 4) с двойной точностью.

На рис. 2 изображена максимальная относительная погрешность $\varepsilon = \frac{|U - \bar{U}|}{U} 100\%$ (U — точное, \bar{U} — приближенное численное решение) от времени. Кривые 1, 2, 3 отвечают пространственной сетке $h = 0.1$ ($N = 11, M = 11, L = 11$), $h = 0.05$ и $h = 0.025$ соответственно. Штриховые кривые получены по предлагаемому методу и время, затраченное для их расчета (t_0): $t_{0,1} = 2.1$ мин ($h = 0.1$), $t_{0,2} = 15$ мин ($h = 0.05$), $t_{0,3} = 75$ мин ($h = 0.025$). Сплошные кривые на рис. 2 отвечают расчету по неявной разностной схеме бегущего счета (29) на стр. 345 из [1]:

$$\frac{U_{i,j,k}^{n+1} - U_{i,j,k}^n}{\tau} + \frac{(U_{i,j,k} - U_{i-1,j,k})^{n+1}}{h_1} + \frac{(U_{i,j,k} - U_{i,j-1,k})^{n+1}}{h_2} + \frac{(U_{i,j,k} - U_{i,j,k-1})^{n+1}}{h_3} = F_{i,j,k}^n,$$

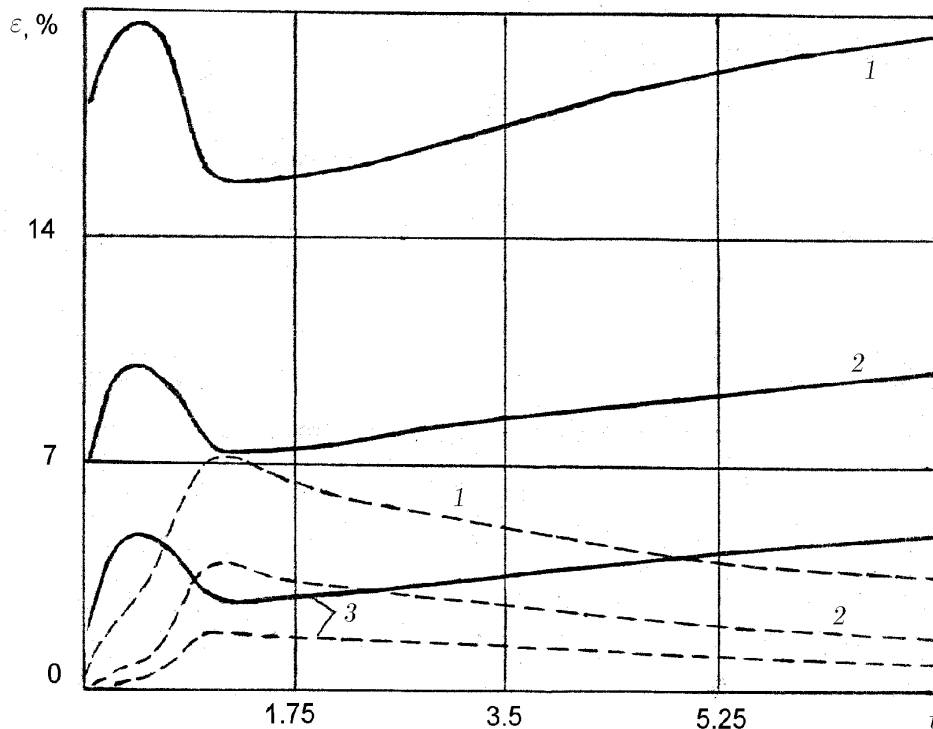


Рис. 2. Максимальная относительная погрешность решения задачи (4.1), (4.2) от времени. Кривые 1, 2 и 3 соответствуют пространственным сеткам $h = 0.1$, $h = 0.05$ и $h = 0.025$. Сплошные кривые — разностная схема (4.3), штриховые кривые — двухслойная разностная схема по времени из алгоритма ИИМ (1.5), (2.21)–(2.23).

$$i = 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, M, \quad k = 1, \dots, L, \quad (4.3)$$

которая в трехмерном случае имеет погрешность аппроксимации $O(\tau + h_1 + h_2 + h_3)$, а время расчета их составило $t_{0,1} = 1$ мин, $t_{0,2} = 8$ мин, $t_{0,3} = 46$ мин соответственно. Из сравнения кривых видно, что на конкретном примере точность расчета по предлагаемому методу лучше в 5 раз, а время $t_{0,3}$ у них различается только в 1.6 раза.

Уравнение Лакса — Вендроффа (2.4) записывается только для внутренних узлов области определения задачи и имеет в общем случае параболический вид. Поэтому сходимость разностных схем (2.13), (2.16)–(2.20) проверим на решении дифференциального уравнения (4.4) с граничными условиями первого рода (4.5)

$$c_4 \frac{\partial U}{\partial t} + c_1 \sum_{m=1}^3 \frac{\partial U}{\partial x_m} = c_2 \sum_{m=1}^3 \frac{\partial^2 U}{\partial x_m^2} + c_3 \sum_{m=1, p \neq m}^3 \frac{\partial^2 U}{\partial x_m \partial x_p} + F, \quad U|_{t=0} = f, \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} F &= 4c_4 ft^3 + c_1 z(1+t^4)[x_1^{z-1} + x_3^{z-1} + (x_2 - 1)^{z-1}] - c_2 z(z-1)(1+t^4)[x_1^{z-2} + x_3^{z-2} + (x_2 - 1)^{z-2}], \\ U|_{x_1=0} &= (1+t^4)[1 + (x_2 - 1)^z + x_3^z], \quad U|_{x_2=0} = (1+t^4)[1 + (-1)^z + x_1^z + x_3^z], \\ U|_{x_3=0} &= (1+t^4)[1 + x_1^z + (x_2 - 1)^z], \quad U|_{x_1=1} = (1+t^4)[2 + (x_2 - 1)^z + x_3^z], \\ U|_{x_2=1} &= (1+t^4)[1 + x_1^z + x_3^z], \quad U|_{x_3=1} = (1+t^4)[2 + x_1^z + (x_2 - 1)^z]. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Использовались следующие значения входных данных: $h_m = h$, $m = 1, 2, 3$, $t_k = 7$, $z = 6$, $c_4 = 100$, $c_1 = 800$, $c_2 = 1$, $c_3 = 2$. Из таблицы видно, что численное решение задачи

сходится к точному при измельчении шагов разностной сетки, так как ε уменьшается (t_0 — расчетное время в минутах на ПЭВМ). Отметим, что погрешность аппроксимации разностных схем, при помощи которых решена задача (4.4), (4.5), — $O(\tau + h^2)$.

Т а б л и ц а

τ	0.004	0.004	0.004	0.007
h	0.1	0.05	0.025	0.05
ε	18.2	3.7	1.17	4.35
t_0	5	19	62	11

Правильность предложенного алгоритма ИИМ (2.13), (2.16)–(2.23) целесообразно также проверить, например, при решении квазилинейного уравнения переноса [1], которое записывается в дивергентной форме и для трехмерного случая имеет вид

$$\frac{\partial U}{\partial t} + 0.5 \sum_{m=1}^3 \frac{\partial U^2}{\partial x_m} = 0, \quad U > 0 \quad (4.6)$$

с начальным и граничным условиями

$$\begin{aligned} U|_{t=0} = a : x_3 < x_{3,0}, \quad 0 \leq x_m \leq 1, \quad m = 1, 2, \\ U|_{t=0} = b : x_3 > x_{3,0}, \quad 0 \leq x_m \leq 1, \quad m = 1, 2, \\ U|_{x_m=0} = a, \quad m = 1, 2, 3, \quad a > b > 0. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Тогда уравнение Лакса — Вендроффа (2.4) переписется

$$\frac{(U^{n+1} - U^n)}{\tau} + 0.5 \sum_{m=1}^3 \frac{\partial U^2}{\partial x_m} = 0.5\tau \left[\sum_{m=1}^3 \frac{1}{3} \frac{\partial^2 U^3}{\partial x_m^2} + \frac{2}{3} \left(\frac{\partial^2 U^3}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 U^3}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial^2 U^3}{\partial x_2 \partial x_3} \right) \right]. \quad (4.8)$$

Находим решение, имеющее разрыв. Пусть наклон линии разрыва соответствует скорости $D = (a + b)/2$, тогда искомое решение имеет вид

$$\begin{aligned} U = a : x_3 - x_{3,0} < Dt, \quad 0 \leq x_m \leq 1, \quad m = 1, 2, \\ U = b : x_3 - x_{3,0} > Dt, \quad 0 \leq x_m \leq 1, \quad m = 1, 2. \end{aligned} \quad (4.9)$$

На рис. 3 изображен результат решения задачи (4.6)–(4.9) в сечении $x_1 = x_{1,0}$, $x_2 = x_{2,0}$ при $a = 2$, $b = 1$, $x_{m,0} = 0.5$, $h_m = h$, $m = 1, 2, 3$ по разностным уравнениям ИИМ, по схеме Лакса — Вендроффа [2] с погрешностью аппроксимации $O(\tau^2 + \sum_{m=1}^3 h_m^2)$ и по уравнениям (4.3) (сплошные, штриховые и штрихпунктирные кривые соответственно).

В дальнейшем для сокращения назовем их подходами 1, 2 и 3. Шаг по времени τ выбирался из условия устойчивости пятиточечной прогонки (3.14) для $h = 0.0125$.

Кривые 1, 2, 3 отвечают моментам времени $t_1 = 0.05$, $t_2 = 0.1$, $t_3 = 0.2$, жирные линии соответствуют точному решению задачи (4.9) ($x_3 = Dt_m + x_{3,0}$, $m = 1, 2, 3$). Цифры с двумя штрихами приписываются результату решения при $h = 0.05$, с одним штрихом — $h = 0.025$, а без штриха — $h = 0.0125$. Расчет проводился до момента времени $t_3 = 0.2$, когда граница $x_3 = 1$ практически не влияет на результат решения задачи.

При $h = 0.05$ имеются выбросы в численных решениях по предлагаемому подходу 1 (в одномерном случае [10] колебаний нет) и подходу 2, а подход 3 размазывает точное

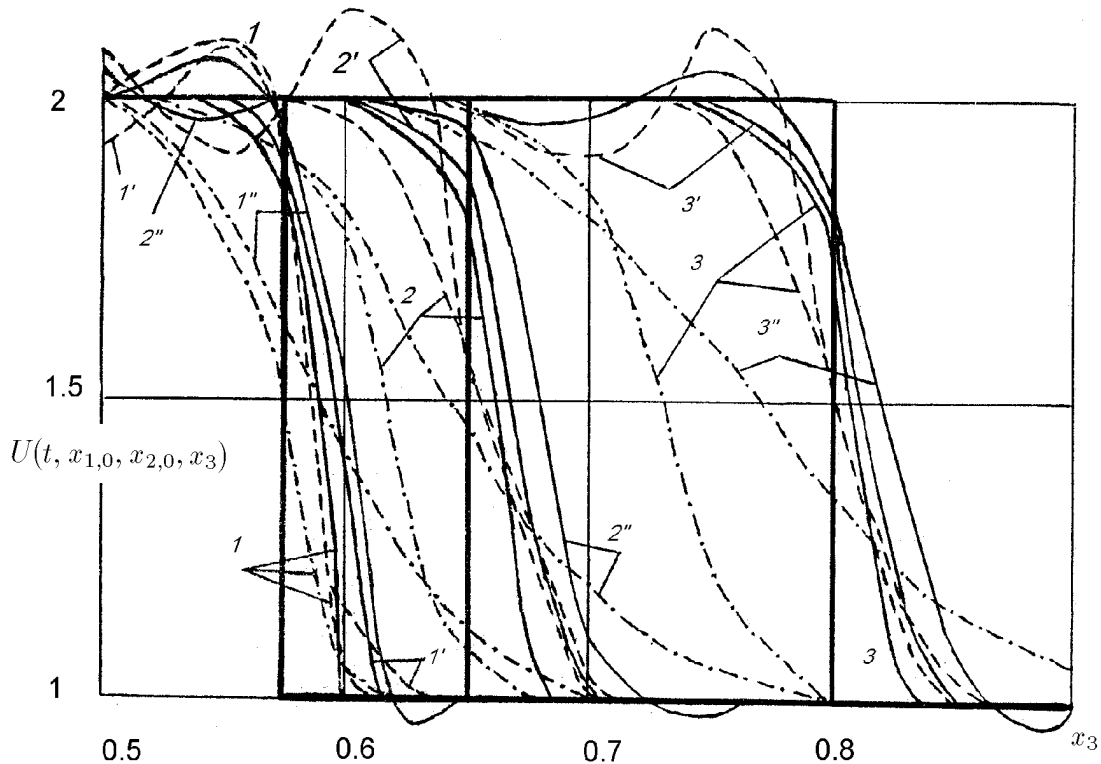


Рис. 3. Результат решения задачи (4.6)–(4.9) в сечении $x_1 = x_{1,0}$, $x_2 = x_{2,0}$ вдоль координаты x_3 для моментов времени t : 1 – 0.05, 2 – 0.1, 3 – 0.2. Цифры с двумя штрихами отвечают $h = 0.05$, с одним штрихом – $h = 0.025$, а без штриха – $h = 0.0125$. Сплошные кривые – разностные схемы ИИМ, штриховые кривые – схема Лакса–Вендроффа, штрихпунктирные – разностные уравнения (4.3).

решение (угол вдоль координаты x_3) в силу большой схемной вязкости. Для $h = 0.05$ при подходе 2 штриховые кривые $1'' - 3''$ на рис. 3 не приводятся, так как амплитуда колебаний их еще выше, чем в одномерном расчете из [10]. При $h = 0.025$ колебания в решении в подходе 2 остаются и исчезают только при $h = 0.0125$, в то время как при подходе 1 точное решение (ступенька) с уменьшением шага по пространству отслеживается лучше (см. на рис. 3 сплошные кривые $1' - 3'$ и $1 - 3$). Отметим, что подход 3 для $h = 0.025$, $h = 0.0125$ при $t = t_2$ и особенно при $t = t_3$ вообще не воспроизводит точное решение (на рис. 3 см. штрихпунктирные кривые 2 и 3).

Заключение

1. Для численного решения трехмерного уравнения в частных производных первого порядка на основе ИИМ получены разностные схемы с погрешностью аппроксимации в обычном смысле внутри области определения на решении задачи $O(\tau^2 + h^4)$ при $h_m = h$, $m = 1, 2, 3$.

2. При гладких коэффициентах переноса и подходе Лакса–Вендроффа разностные уравнения ИИМ – абсолютно устойчивы по начальным данным и диссипативны.

3. Лучший результат, полученный по разностным уравнениям ИИМ настоящей работы для тестового примера, подтверждает их эффективность при решении задачи с разрывом решения.

Список литературы

- [1] КАЛИТКИН Н. Н. *Численные методы*. Наука, М., 1978.
- [2] РИХТМАЙЕР Р., МОРТОН К. *Разностные методы решения краевых задач*. Мир, М., 1972.
- [3] ВОЙНОВИЧ П. А., ЖМАКИН А. И., ПОПОВ Ф. Д., ФУРСЕНКО А. А. *О расчете разрывных течений газа*. Препр. ФТИ им. А. Ф. Иоффе АН СССР. Л., №561, 1977.
- [4] ОРАН Е., БОРИС Д. *Численное моделирование реагирующих потоков*. Мир, М., 1990.
- [5] LAX P. D., WENDROFF B. Systems of Conservation Laws. *Comm. Pure Appl. Math.*, **13**, 1960, 217–237.
- [6] LAX P. D., WENDROFF B. Difference Schemes for hyperbolic equations with high-order of accuracy. *Ibid.*, **17**, 1964, 381–398.
- [7] ПААСОНЕН В. И. Абсолютно устойчивые разностные схемы повышенной точности для систем гиперболического типа. В “*Численные методы механики сплошной среды*”. Новосибирск, **3**, №3, 1972, 82–91.
- [8] ВАЛИУЛЛИН А. Н. Многопараметрические итерационные процессы для разностных задач Дирихле повышенного порядка точности. *Там же*, **4**, №2, 1973, 32–42.
- [9] ПААСОНЕН В. И. Об одном методе построения высокоточных разностных схем и их применении в механике жидкости. *Там же*, **7**, №6, 1976, 111–126.
- [10] ЯКИМОВ А. С. Об одном методе решения линейного уравнения переноса. В “*Вычислительные технологии*”. ИВТ СО РАН, Новосибирск, **4**, №10, 1995, 322–332.
- [11] ГРИШИН А. М. Об одном видоизменении метода М. Е. Швеца. *Инженерно-физический журнал*, **19**, №1, 1970, 84–93.
- [12] ГРИШИН А. М., ЯКИМОВ А. С. Обобщение итерационно-интерполяционного метода для решения трехмерного параболического уравнения общего вида. *Вычисл. технологии*. **4**, №2, 1999, 26–41.
- [13] ЯНЕНКО Н. Н. *Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики*. Наука, Новосибирск, 1967.
- [14] ГОДУНОВ С. К., РЯБЕНЬКИЙ В. С. *Разностные схемы*. Наука, М., 1973.
- [15] ШАМАНСКИЙ В. Е. *Методы численного решения краевых задач*. Изд-во АН УССР, Киев, 1963.
- [16] ЯКИМОВ А. С. Об одном методе расщепления. *Численные методы механики сплошной среды*, **16**, №2, 1985, 144–161.
- [17] ВОЙНОВИЧ П. А., ЖМАКИН А. И., ПОПОВ Ф. Д., ФУРСЕНКО А. А. Численное исследование течений газа с разрывами сложных конфигураций. *Журн. вычисл. матем. и мат. физики*, **19**, №2, 1979, 1608–1614.

Поступила в редакцию 25 февраля 1999 г.,
в переработанном виде 10 мая 2000 г.