

УСЛОВИЯ МОНОТОННОСТИ ФАКТОРИЗОВАННОЙ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ ДЛЯ ЭВОЛЮЦИОННОГО УРАВНЕНИЯ С ДВУМЯ ПРОСТРАНСТВЕННЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

Ю. В. ПИВОВАРОВ

*Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН
Новосибирск, Россия*

For a difference scheme with coefficients satisfying certain relations the sufficient conditions of monotonicity have been obtained in the form of a limitations on a time step. Necessary and sufficient monotonicity conditions are obtained for the problem with small number of partitions. The advantages of monotonous scheme over non-monotonous one are shown using calculations.

В настоящей работе рассматривается проблема выбора временного шага при численном интегрировании нестационарного уравнения, описывающего диффузионный и конвективный перенос субстанции в сплошной среде. Схема записывается в факторизованном виде. Ее коэффициенты удовлетворяют некоторым условиям, обеспечивающим монотонность при достаточно малом шаге по времени. Формулируются ограничения на этот шаг, достаточные для монотонности схемы. (Эти результаты в некоторой степени аналогичны результатам Хартена [1, с. 6, 7], которые выражают условия монотонности абстрактной трехточечной разностной схемы в случае одной пространственной переменной.) Рассмотрена также задача для уравнения теплопроводности с малым числом разбиений, для которой получены необходимые и достаточные условия монотонности схемы. Оказалось, что в этом случае достаточные условия монотонности весьма близки к необходимым и достаточным при значениях весового коэффициента γ , меньших $1/2$, и далеки от них при $\gamma \rightarrow 1$. Предложено скорректировать (без доказательства) достаточные условия монотонности, чтобы снять это несоответствие. Произведены расчеты для уравнения теплопроводности в случае, когда схема является немонотонной (из-за большого шага по времени) и монотонной. Показано, что в 1-м случае в решении возникают осцилляции в окрестности зоны больших градиентов начальных данных, которые затем переносятся на всю область, а во 2-м случае осцилляций нет. Построен график критического шага по времени, при котором решение на 1-м временном слое еще остается монотонным.

1. Описание разностной схемы

При математическом моделировании квазидвумерных (когда имеются три компоненты скорости, зависящие от двух пространственных переменных): плоских и осесимметричных процессов тепломассопереноса приходится решать уравнения вида

$$(\partial/\partial t + L_1 + L_2)F = G, \quad (1)$$

где

$$L_1 F = \frac{1}{sH^2} \frac{\partial}{\partial x} \left[(p + U)F - \mu \frac{\partial F}{\partial x} \right];$$

$$L_2 F = \frac{1}{sH^2} \frac{\partial}{\partial y} \left[(q + V)F - \mu \frac{\partial F}{\partial y} \right];$$

t — время; x, y — независимые пространственные переменные, такие, что функция $r(x, y) + iz(x, y)$ конформно отображает некоторый прямоугольник Π на заданную ограниченную односвязную область; r, z, φ — декартовы или цилиндрические координаты; $H = \sqrt{(\partial r/\partial x)^2 + (\partial r/\partial y)^2}$ — коэффициент Ламэ; $s \equiv 1$ в плоском и $s \equiv r$ в осесимметричном случае; U, V — модифицированные компоненты скорости, удовлетворяющие уравнению неразрывности $\partial U/\partial x + \partial V/\partial y = 0$ и связанные с физическими компонентами скорости u, v в направлениях x, y соотношениями $U = sHu, V = sHv$; G, p, q, μ — заданные функции.

Например, при

$$G = \frac{1}{sH^2} \left[-\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial s}{\partial y} w^2 \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial s}{\partial x} w^2 \right) + \right.$$

$$+ \frac{2}{\text{Re}} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \nu}{\partial x} \left(-\frac{1}{H} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{v}{H^2} \frac{\partial H}{\partial x} \right) - \frac{\partial \nu}{\partial y} \left(\frac{1}{H} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{u}{H^2} \frac{\partial H}{\partial x} \right) \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \nu}{\partial x} \left(\frac{1}{H} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{v}{H^2} \frac{\partial H}{\partial y} \right) - \frac{\partial \nu}{\partial y} \left(-\frac{1}{H} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{u}{H^2} \frac{\partial H}{\partial y} \right) \right) \right\} -$$

$$- \frac{\text{Gr}}{\text{Re}^2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial r}{\partial x} T \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial r}{\partial y} T \right) \right\} \Bigg],$$

$$p = -\frac{1}{\text{Re}} \left(2 \frac{\partial s}{\partial x} \nu + s \frac{\partial \nu}{\partial x} \right), \quad q = -\frac{1}{\text{Re}} \left(2 \frac{\partial s}{\partial y} \nu + s \frac{\partial \nu}{\partial y} \right), \quad \mu = \frac{\nu s}{\text{Re}}$$

получаем уравнение для модифицированного вихря Ω , связанного с физическим вихрем $\omega = (\partial(uH)/\partial y - \partial(vH)/\partial x)/H^2$ соотношением $\Omega = \omega/s$, где w — компонента скорости в направлении φ ; Re — число Рейнольдса; $\nu(T(x, y, t))$ — безразмерный коэффициент кинематической вязкости; T — температура; Gr — число Грасгофа.

При

$$G = 0, \quad p = \frac{2}{\text{Re}} \frac{\partial s}{\partial x} \nu, \quad q = \frac{2}{\text{Re}} \frac{\partial s}{\partial y} \nu, \quad \mu = \frac{\nu s}{\text{Re}}$$

получаем уравнение для модифицированной скорости $W = sw$, а при

$$G = p = q = 0, \quad \mu = \frac{s}{\text{Pe}},$$

где Pe — число Пекле, — уравнение для T .

Введем в прямоугольнике Π неравномерную сетку

$$0 = x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = 1, \quad 0 = y_0 < y_1 < \dots < y_{M-1} < y_M = Y$$

и обозначим

$$x_{n+1/2} = \frac{x_n + x_{n+1}}{2}, \quad h_{x_{n+1/2}} = x_{n+1} - x_n, \quad n = \overline{0, N-1};$$

$$y_{m+1/2} = \frac{y_m + y_{m+1}}{2}, \quad h_{ym+1/2} = y_{m+1} - y_m, \quad m = \overline{0, M-1};$$

$$\bar{h}_{xn} = \frac{x_{n+1} - x_{n-1}}{2}, \quad n = \overline{1, N-1}; \quad \bar{h}_{ym} = \frac{y_{m+1} - y_{m-1}}{2}, \quad m = \overline{1, M-1}.$$

Будем предполагать, что имеют место соотношения

$$h_{xn+1/2} - h_{xn-1/2} = O(h_{xn+1/2}^2), \quad n = \overline{1, N-1},$$

$$h_{ym+1/2} - h_{ym-1/2} = O(h_{ym+1/2}^2), \quad m = \overline{1, M-1}.$$

Введем разностные аналоги Λ_1, Λ_2 операторов L_1, L_2 следующим образом (см. [2, с. 280–288]):

$$\begin{aligned} \Lambda_1 F_{nm} &= -a_{nm}^x F_{n+1m} + c_{nm}^x F_{nm} - b_{nm}^x F_{n-1m}, \\ \Lambda_2 F_{nm} &= -a_{nm}^y F_{nm+1} + c_{nm}^y F_{nm} - b_{nm}^y F_{nm-1}, \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned} a_{nm}^x &= \frac{1}{s_{nm} H_{nm}^2} \left(-\frac{U_{n+1/2m} + p_{n+1/2m}}{2\bar{h}_{xn}} + \frac{\mu_{n+1/2m} \alpha_{n+1/2m} \coth \alpha_{n+1/2m}}{h_{xn+1/2} \bar{h}_{xn}} \right); \\ c_{nm}^x &= \frac{1}{s_{nm} H_{nm}^2} \left(\frac{U_{n+1/2m} + p_{n+1/2m}}{2\bar{h}_{xn}} - \frac{U_{n-1/2m} + p_{n-1/2m}}{2\bar{h}_{xn}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\mu_{n+1/2m} \alpha_{n+1/2m} \coth \alpha_{n+1/2m}}{h_{xn+1/2} \bar{h}_{xn}} + \frac{\mu_{n-1/2m} \alpha_{n-1/2m} \coth \alpha_{n-1/2m}}{h_{xn-1/2} \bar{h}_{xn}} \right); \\ b_{nm}^x &= \frac{1}{s_{nm} H_{nm}^2} \left(\frac{U_{n-1/2m} + p_{n-1/2m}}{2\bar{h}_{xn}} + \frac{\mu_{n-1/2m} \alpha_{n-1/2m} \coth \alpha_{n-1/2m}}{h_{xn-1/2} \bar{h}_{xn}} \right); \\ a_{nm}^y &= \frac{1}{s_{nm} H_{nm}^2} \left(-\frac{V_{nm+1/2} + q_{nm+1/2}}{2\bar{h}_{ym}} + \frac{\mu_{nm+1/2} \beta_{nm+1/2} \coth \beta_{nm+1/2}}{h_{ym+1/2} \bar{h}_{ym}} \right); \\ c_{nm}^y &= \frac{1}{s_{nm} H_{nm}^2} \left(\frac{V_{nm+1/2} + q_{nm+1/2}}{2\bar{h}_{ym}} - \frac{V_{nm-1/2} + q_{nm-1/2}}{2\bar{h}_{ym}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\mu_{nm+1/2} \beta_{nm+1/2} \coth \beta_{nm+1/2}}{h_{ym+1/2} \bar{h}_{ym}} + \frac{\mu_{nm-1/2} \beta_{nm-1/2} \coth \beta_{nm-1/2}}{h_{ym-1/2} \bar{h}_{ym}} \right); \\ b_{nm}^y &= \frac{1}{s_{nm} H_{nm}^2} \left(\frac{V_{nm-1/2} + q_{nm-1/2}}{2\bar{h}_{ym}} + \frac{\mu_{nm-1/2} \beta_{nm-1/2} \coth \beta_{nm-1/2}}{h_{ym-1/2} \bar{h}_{ym}} \right); \\ \alpha_{n+1/2m} &= \frac{h_{xn+1/2} (U_{n+1/2m} + p_{n+1/2m})}{2\mu_{n+1/2m}}; \\ \beta_{nm+1/2} &= \frac{h_{ym+1/2} (V_{nm+1/2} + q_{nm+1/2})}{2\mu_{nm+1/2}}. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь для произвольной функции $f(x, y, t)$ принято обозначение $f_{nm}^k = f(x_n, y_m, \tau k)$, где τ — шаг по оси t , индекс k пока для простоты опущен.

Для численного решения уравнения (1) используем разностную схему

$$(E + \gamma^2 \tau^2 \Lambda_1 \Lambda_2) \frac{F_{nm}^{k+1} - F_{nm}^k}{\tau} + (\Lambda_1 + \Lambda_2) (\gamma F_{nm}^{k+1} + (1 - \gamma) F_{nm}^k) = G_{nm}^k,$$

$$n = \overline{1, N-1}, \quad m = \overline{1, M-1}, \quad (4)$$

где E — тождественный оператор; $\gamma \in [0, 1]$ — весовой коэффициент.

На каждой из четырех сторон прямоугольника могут быть поставлены условия 1-го, 2-го или 3-го рода, но так как, например, при $x = 0$ последние два могут быть сведены к 1-му добавлением фиктивного узла $x_{-1} = -x_1$ (см. [3, с. 419]), то будем для простоты рассматривать только постановку условий 1-го рода:

$$F_{0m} = g_{1m}, \quad F_{Nm} = g_{2m}, \quad F_{n0} = g_{3n}, \quad F_{nM} = g_{4n}. \quad (5)$$

Зададим также начальное условие

$$F_{nm}^0 = \widehat{F}_{nm}. \quad (6)$$

Описанная схема является консервативной. Кроме того, если функции U, V удовлетворяют разностному уравнению неразрывности

$$\frac{U_{n+1m} - U_{n-1m}}{2\bar{h}_{xn}} + \frac{V_{nm+1} - V_{nm-1}}{2\bar{h}_{ym}} = 0$$

и условиям непротекания

$$U_{0m} = U_{Nm} = 0, \quad V_{n0} = V_{nM} = 0,$$

то она нейтральна с точностью до членов $O(h + \tau^2)$, где h — максимальный шаг сетки около границы в направлении, ортогональном к ней [2]. Если функции U, V и μ одного порядка, то описанная схема превращается в схему с центральными разностями для конвективных членов, которая имеет 2-й порядок аппроксимации по пространству. Если $U, V \gg \mu$, то данная схема с точностью до несущественных при выполнении условий (4) множителей вида $\bar{h}_{xn}/h_{xn\pm 1/2}$ превращается в схему для уравнений Эйлера с разностями против потока, которая имеет 1-й порядок аппроксимации по пространству. По времени описанная схема имеет 1-й порядок аппроксимации.

2. Достаточные условия монотонности в общем случае

Согласно работе [4, с. 348] в случае одной пространственной переменной схема называется монотонной, если она сохраняет монотонность решения при переходе с k -го на $(k+1)$ -й временной слой. Там же сформулирован признак монотонности: схема

$$\widetilde{F}_n^{k+1} = \sum_{m=0}^N \widetilde{\beta}_{nm} \widetilde{F}_m^k$$

монотонна тогда и только тогда, когда все коэффициенты $\widetilde{\beta}_{nm} \geq 0$. Так как этот признак необходимый и достаточный, его можно принять за определение монотонности. А последнее легко распространяется на случай двух пространственных переменных: схему

$$F_{nm}^{k+1} = \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^M \left[\widehat{\beta}_{nmij} F_{ij}^k + \bar{\beta}_{nmij} G_{ij}^k \right]$$

назовем монотонной, если все $\widehat{\beta}_{nmij} \geq 0$.

Предложение. Пусть операторы Λ_1, Λ_2 определены равенствами (2), причем коэффициенты $a_{nm}^x, a_{nm}^y, b_{nm}^x, b_{nm}^y$ неотрицательны, а коэффициенты c_{nm}^x, c_{nm}^y положительны (например, эти коэффициенты вычисляются по формулам (3)). Тогда разностная схема (4) с граничными условиями (5) и начальным условием (6) монотонна при $\tau \leq \tau_{\max}$, где

$$\begin{aligned} \tau_{\max} &= \min\{\tau^1, \tau^2\}; \\ \tau^1 &= \begin{cases} \tau^{11} & \text{при } \gamma = 0; \\ \tau^{12} & \text{при } 0 < \gamma < 0.5; \\ \tau^{13} & \text{при } 0.5 \leq \gamma \leq 1; \end{cases} \\ \tau^{11} &= \frac{1}{X + Y}; \\ \tau^{12} &= \frac{(1 - \gamma)(X + Y) - \sqrt{\gamma^2(X - Y)^2 + (1 - 2\gamma)(X + Y)^2}}{2\gamma^2 XY}; \\ \tau^{13} &= \min\left\{\frac{(1 - \gamma)}{\gamma^2 X}, \frac{(1 - \gamma)}{\gamma^2 Y}\right\}; \\ X &= \max\{c_{nm}^x : 1 \leq n \leq N - 1; 1 \leq m \leq M - 1\}; \\ Y &= \max\{c_{nm}^y : 0 \leq n \leq N; 1 \leq m \leq M - 1\}; \\ \tau^2 &= \min\{\tau^{21}, \tau^{22}\}; \\ \tau^{21} &= \begin{cases} \infty, & \text{если } A \leq 0, \\ 1/A, & \text{если } A > 0; \end{cases} \\ \tau^{22} &= \begin{cases} \infty, & \text{если } B \leq 0, \\ 1/B, & \text{если } B > 0; \end{cases} \\ A &= \max\{\gamma(a_{nm}^x + b_{nm}^x - c_{nm}^x) : 1 \leq n \leq N - 1, 1 \leq m \leq M - 1\}; \\ B &= \max\{\gamma(a_{nm}^y + b_{nm}^y - c_{nm}^y) : 1 \leq n \leq N - 1, 1 \leq m \leq M - 1\}. \end{aligned} \tag{7}$$

Доказательство. Запишем разностную схему (4) в факторизованном виде:

$$\begin{aligned} (E + \gamma\tau\Lambda_1)(E + \gamma\tau\Lambda_2)F_{nm}^{k+1} &= (E - (1 - \gamma)\tau(\Lambda_1 + \Lambda_2) + \gamma^2\tau^2\Lambda_1\Lambda_2)F_{nm}^k + G_{nm}^k, \\ n &= \overline{1, N - 1}, \quad m = \overline{1, M - 1}. \end{aligned} \tag{8}$$

Вычисления по схеме (8) можно разбить на три этапа:

- 1) вычисление правой части (8);
- 2) обращение оператора $E + \gamma\tau\Lambda_1$;
- 3) обращение оператора $E + \gamma\tau\Lambda_2$.

Для монотонности схемы в целом достаточно, чтобы она была монотонной на каждом из трех этапов. Рассмотрим этап 1:

$$\begin{aligned} \eta_{nm}^k &= (E - (1 - \gamma)\tau(\Lambda_1 + \Lambda_2) + \gamma^2\tau^2\Lambda_1\Lambda_2)F_{nm}^k + G_{nm}^k = \\ &= (1 - (1 - \gamma)\tau(c_{nm}^x + c_{nm}^y) + \gamma^2\tau^2 c_{nm}^x c_{nm}^y)F_{nm}^k + (((1 - \gamma)\tau - \gamma^2\tau^2 c_{n+1m}^y) a_{nm}^x)F_{n+1m}^k + \\ &+ (((1 - \gamma)\tau - \gamma^2\tau^2 c_{n-1m}^y) b_{nm}^x)F_{n-1m}^k + (((1 - \gamma)\tau - \gamma^2\tau^2 c_{nm}^x) a_{nm}^y)F_{nm+1}^k + \\ &+ (((1 - \gamma)\tau - \gamma^2\tau^2 c_{nm}^x) b_{nm}^y)F_{nm-1}^k + \dots + G_{nm}^k. \end{aligned} \tag{9}$$

Здесь не выписаны члены с заведомо неотрицательными коэффициентами при $F_{n\pm 1m\pm 1}$. Пусть $\gamma > 0$. Тогда нужно решить систему неравенств относительно τ :

$$\begin{cases} 1 - (1 - \gamma)\tau(x + y) + \gamma^2\tau^2xy \geq 0, & x \in (0, X], \quad y \in (0, Y]; \\ \tau \leq \min \{ (1 - \gamma)/(\gamma^2X), (1 - \gamma)/(\gamma^2Y) \}, \end{cases} \quad (10)$$

где X, Y определены в (7). Обозначим $f(x, y) = 1 - (1 - \gamma)\tau(x + y) + \gamma^2\tau^2xy$. Имеем $\partial f/\partial x = -(1 - \gamma)\tau + \gamma^2\tau^2y \leq 0$ при $y \leq y_0 = (1 - \gamma)/(\gamma^2\tau)$ и $\partial f/\partial y = -(1 - \gamma)\tau + \gamma^2\tau^2x \leq 0$ при $x \leq y_0$. Из второго неравенства (10) имеем $X \leq y_0, Y \leq y_0$. Следовательно, минимум функции $f(x, y)$ достигается при $x = X, y = Y$. Теперь первое неравенство (10) можно заменить на

$$1 - (1 - \gamma)\tau(X + Y) + \gamma^2\tau^2XY \geq 0. \quad (11)$$

Его решение есть $\tau \leq \tau^{12}$ (см. формулы (7)). Пусть для определенности $X \geq Y$. Составим разность $(\tau^{12} - \tau^{13})2\gamma^2XY = (1 - \gamma)(X - Y) - \sqrt{\gamma^2(X - Y)^2 + (1 - 2\gamma)(X + Y)^2}$. Предположим, что γ таково, что подкоренное выражение неотрицательно. Тогда имеем разность двух неотрицательных чисел, а последняя имеет тот же знак, что и разность их квадратов, которая равна $(1 - 2\gamma)(2X^2 + 2Y^2)$. Таким образом, $\tau^{12} < \tau^{13}$ при $\gamma < 1/2$, $\tau^{12} = \tau^{13}$ при $\gamma = 1/2$, $\tau^{12} > \tau^{13}$ при $\gamma > 1/2$ на участке существования вещественного τ^{12} . Если же γ таково, что τ^{12} комплексное, то неравенство (11) выполняется при любом τ и, следовательно, ограничение на τ дает только функция τ^{13} . При этом $\gamma > 1/2$. Определим τ^1 при $\gamma = 0$ как предельное значение τ^{12} при $\gamma \rightarrow 0$. В результате получим формулу для τ^{11} в (7) (это несколько более грубая оценка, чем та, которая непосредственно следует из (9)).

Рассмотрим этап 2. Мы имеем серию одномерных задач:

$$\begin{aligned} -\gamma\tau a_{nm}^x F_{n+1m}^{k+1/2} + (1 + \gamma\tau c_{nm}^x) F_{nm}^{k+1/2} - \gamma\tau b_{nm}^x F_{n-1m}^{k+1/2} &= \eta_{nm}^k, \quad n = \overline{1, N-1}, \\ F_{0m}^{k+1/2} &= (E + \gamma\tau\Lambda_2)g_{1m}, \quad F_{Nm}^{k+1/2} = (E + \gamma\tau\Lambda_2)g_{2m}, \quad m = \overline{1, M-1}. \end{aligned}$$

Известно (см. [5, с. 270]), что для монотонности схемы на этом этапе достаточно неотрицательности коэффициентов a_{nm}^x, b_{nm}^x , которая имеет место в силу условий предложения, и свойства диагонального преобладания $1 + \gamma\tau c_{nm}^x \geq \gamma\tau(a_{nm}^x + b_{nm}^x)$, которое можно записать в виде $\tau \leq \tau^{21}$, где τ^{21} вычисляется по формулам (7).

На этапе 3 опять имеем серию одномерных задач

$$\begin{aligned} -\gamma\tau a_{nm}^y F_{nm+1}^{k+1} + (1 + \gamma\tau c_{nm}^y) F_{nm}^{k+1} - \gamma\tau b_{nm}^y F_{nm-1}^{k+1} &= F_{nm}^{k+1/2}, \quad m = \overline{1, M-1}, \\ F_{n0}^{k+1} &= g_{3n}, \quad F_{nM}^{k+1} = g_{4n}, \quad n = \overline{1, N-1}, \end{aligned}$$

для которой аналогично этапу II получаем $\tau \leq \tau^{22}$. Предложение доказано.

3. Необходимые и достаточные условия монотонности для задачи с малым числом разбиений

Доказанное предложение дает ограничения на шаг τ , выполнения которых достаточно для монотонности схемы. Возникает вопрос: насколько эти ограничения близки к необходимым и, в частности, является ли схема безусловно немонотонной при $\gamma = 1$ ($\tau_{\max} = 0$ при $\gamma = 1$). Для ответа на эти вопросы рассмотрим разностную схему для уравнения теплопроводности

$$\partial F/\partial t - \chi(\partial^2 F/\partial x^2 + \partial^2 F/\partial y^2) = 0$$

с числами разбиений $N = M = 4$ и равномерными шагами по осям x, y (здесь $\chi = \text{const}$ — коэффициент температуропроводности). Положим на границе области $F = 0$. Исключив граничные точки, как показано в [6, с. 363], получим разностную задачу с девятью узлами на каждом временном слое:

$$(E + \gamma\tau\Lambda_1)(E + \gamma\tau\Lambda_2)F_{nm}^{k+1} = \Lambda_{\Pi}F_{nm}^k, \quad n, m = 1, 2, 3. \quad (12)$$

Введем обозначения:

$$\delta = \tau\chi/h_x^2, \quad l = h_x^2/h_y^2.$$

Оператор $E + \gamma\tau\Lambda_1$ действует по столбцам и задается матрицей

$$\begin{bmatrix} 1 + 2\gamma\delta & -\gamma\delta & 0 \\ -\gamma\delta & 1 + 2\gamma\delta & -\gamma\delta \\ 0 & -\gamma\delta & 1 + 2\gamma\delta \end{bmatrix}.$$

Оператор $E + \gamma\tau\Lambda_2$ действует по строкам и задается матрицей

$$\begin{bmatrix} 1 + 2\gamma\delta l & -\gamma\delta l & 0 \\ -\gamma\delta l & 1 + 2\gamma\delta l & -\gamma\delta l \\ 0 & -\gamma\delta l & 1 + 2\gamma\delta l \end{bmatrix}.$$

Оператор Λ_{Π} действует следующим образом:

$$\begin{aligned} \Lambda_{\Pi}F_{11} &= AF_{11} + BF_{21} + CF_{12} + DF_{22}, \\ \Lambda_{\Pi}F_{21} &= AF_{21} + B(F_{31} + F_{11}) + CF_{22} + D(F_{12} + F_{32}), \\ \Lambda_{\Pi}F_{31} &= AF_{31} + BF_{21} + CF_{32} + DF_{22}, \\ \Lambda_{\Pi}F_{12} &= AF_{12} + BF_{22} + C(F_{11} + F_{13}) + D(F_{21} + F_{23}), \\ \Lambda_{\Pi}F_{22} &= AF_{22} + B(F_{32} + F_{12}) + C(F_{21} + F_{23}) + D(F_{11} + F_{33} + F_{13} + F_{31}), \\ \Lambda_{\Pi}F_{32} &= AF_{32} + BF_{22} + C(F_{31} + F_{33}) + D(F_{21} + F_{23}), \\ \Lambda_{\Pi}F_{13} &= AF_{13} + BF_{23} + CF_{12} + DF_{22}, \\ \Lambda_{\Pi}F_{23} &= AF_{23} + B(F_{33} + F_{13}) + CF_{22} + D(F_{12} + F_{32}), \\ \Lambda_{\Pi}F_{33} &= AF_{33} + BF_{23} + CF_{32} + DF_{22}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} A &= 1 - 2(1 - \gamma)\delta(1 + l) + 4\gamma^2\delta^2l; & B &= (1 - \gamma)\delta - 2\gamma^2\delta^2l; \\ C &= (1 - \gamma)\delta l - 2\gamma^2\delta^2l; & D &= \gamma^2\delta^2l. \end{aligned}$$

Оператор $(E + \gamma\tau\Lambda_1)^{-1}$ действует по столбцам и задается матрицей

$$\frac{1}{\Delta_x} \begin{bmatrix} E_x & F_x & G_x \\ F_x & H_x & F_x \\ G_x & F_x & E_x \end{bmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} E_x &= (1 + 2\gamma\delta)^2 - \gamma^2\delta^2; & H_x &= (1 + 2\gamma\delta)^2; & F_x &= (1 + 2\gamma\delta)\gamma\delta; \\ G_x &= \gamma^2\delta^2; & \Delta_x &= (1 + 4\gamma\delta + 2\gamma^2\delta^2)(1 + 2\gamma\delta). \end{aligned}$$

Оператор $(E + \gamma\tau\Lambda_2)^{-1}$ действует по строкам и задается матрицей

$$\frac{1}{\Delta_y} \begin{bmatrix} E_y & F_y & G_y \\ F_y & H_y & F_y \\ G_y & F_y & E_y \end{bmatrix},$$

где

$$E_y = (1 + 2\gamma\delta l)^2 - \gamma^2\delta^2 l^2; \quad H_y = (1 + 2\gamma\delta l)^2; \quad F_y = (1 + 2\gamma\delta l)\gamma\delta l; \\ G_y = \gamma^2\delta^2 l^2; \quad \Delta_y = (1 + 4\gamma\delta l + 2\gamma^2\delta^2 l^2)(1 + 2\gamma\delta l).$$

Разрешая (12) относительно F_{nm}^{k+1} , получим

$$F_{nm}^{k+1} = (E + \gamma\tau\Lambda_2)^{-1}(E + \gamma\tau\Lambda_1)^{-1}\Lambda_{\Pi}F_{nm}^k = \frac{1}{\Delta_x\Delta_y} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \beta_{nmij}^* F_{ij}^k.$$

Среди 81 коэффициентов β_{nmij}^* в силу симметрии задачи только 25 различных. Это следующие коэффициенты:

$$\begin{aligned} \beta_{1111}^* &= E_y(E_x A + F_x B) + F_y(E_x C + F_x D), \\ \beta_{2111}^* &= E_y((E_x + G_x)B + F_x A) + F_y((E_x + G_x)D + F_x C), \\ \beta_{1211}^* &= (E_y + G_y)(E_x C + F_x D) + F_y(E_x A + F_x B), \\ \beta_{2211}^* &= (E_y + G_y)((E_x + G_x)D + F_x C) + F_y((E_x + G_x)B + F_x A), \\ \beta_{3111}^* &= E_y(F_x B + G_x A) + F_y(F_x D + G_x C), \\ \beta_{3211}^* &= (E_y + G_y)(F_x D + G_x C) + F_y(F_x B + G_x A), \\ \beta_{1311}^* &= F_y(E_x C + F_x D) + G_y(E_x A + F_x B), \\ \beta_{2311}^* &= F_y((E_x + G_x)D + F_x C) + G_y((E_x + G_x)B + F_x A), \\ \beta_{3311}^* &= F_y(F_x D + G_x C) + G_y(F_x B + G_x A), \\ \beta_{1121}^* &= E_y(F_x A + H_x B) + F_y(F_x C + H_x D), \\ \beta_{2121}^* &= E_y(2F_x B + H_x A) + F_y(2F_x D + H_x C), \\ \beta_{1221}^* &= (E_y + G_y)(F_x C + H_x D) + F_y(F_x A + H_x B), \\ \beta_{2221}^* &= (E_y + G_y)(2F_x D + H_x C) + F_y(2F_x B + H_x A), \\ \beta_{1321}^* &= F_y(F_x C + H_x D) + G_y(F_x A + H_x B), \\ \beta_{2321}^* &= F_y(2F_x D + H_x C) + G_y(2F_x B + H_x A), \\ \beta_{1112}^* &= F_y(E_x A + F_x B) + H_y(E_x C + F_x D), \\ \beta_{2112}^* &= F_y((E_x + G_x)B + F_x A) + H_y((E_x + G_x)D + F_x C), \\ \beta_{1212}^* &= 2F_y(E_x C + F_x D) + H_y(E_x A + F_x B), \\ \beta_{2212}^* &= 2F_y((E_x + G_x)D + F_x C) + H_y((E_x + G_x)B + F_x A), \\ \beta_{3112}^* &= F_y(F_x B + G_x A) + H_y(F_x D + G_x C), \\ \beta_{3212}^* &= 2F_y(F_x D + G_x C) + H_y(F_x B + G_x A), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta_{1122}^* &= F_y(F_x A + H_x B) + H_y(F_x C + H_x D), \\ \beta_{2122}^* &= F_y(2F_x B + H_x A) + H_y(2F_x D + H_x C), \\ \beta_{1222}^* &= 2F_y(F_x C + H_x D) + H_y(F_x A + H_x B), \\ \beta_{2222}^* &= 2F_y(2F_x D + H_x C) + H_y(2F_x B + H_x A).\end{aligned}$$

Анализ показывает, что при $\delta > 0$ и любых γ (в том числе $\gamma = 1$) все коэффициенты $\beta_{nmij}^* > 0$ в некоторой окрестности точки $\delta = 0$. Следовательно, можно определить максимально допустимый шаг δ_{\max} , при котором все коэффициенты β_{nmij}^* будут неотрицательны, если $\delta \leq \delta_{\max}$. Умножив в формулах (7) левые и правые части на χ/h_x^2 , получим достаточные условия монотонности относительно δ : $\delta \leq \delta_{\max}^*(\gamma; l)$, где

$$\delta_{\max}^*(\gamma; l) = \begin{cases} \frac{1}{2+2l} & \text{при } \gamma = 0, \\ \frac{(1-\gamma)(1+l) - \sqrt{\gamma^2(1-l)^2 + (1-2\gamma)(1+l)^2}}{4\gamma^2 l} & \text{при } 0 < \gamma < 1/2, \\ \min \left\{ \frac{1-\gamma}{2\gamma^2}, \frac{1-\gamma}{2\gamma^2 l} \right\} & \text{при } 1/2 \leq \gamma \leq 1. \end{cases} \quad (13)$$

На рис. 1 представлены зависимости δ_{\max} и δ_{\max}^* от γ при различных значениях l . Так как $\delta_{\max}^*(\gamma; 1/l) = l\delta_{\max}^*(\gamma; l)$ и аналогичным свойством обладает величина δ_{\max} , то рассматривался только случай $l \leq 1$. А так как при $\gamma \geq 1/2$ величины $\delta_{\max}, \delta_{\max}^*$ уже не зависят от l при $l \leq 1$, то принята различная нумерация кривых при $\gamma < 0.5$ и $\gamma \geq 0.5$. Кривые 1, 3, 5 показывают зависимость δ_{\max} , кривые 2, 4, 6 — зависимость δ_{\max}^* от γ при $l = 1, 0.25$ и 0.01 соответственно, $0 \leq \gamma < 1/2$. Кривые 7, 8 показывают зависимость от γ величин δ_{\max} и δ_{\max}^* соответственно при $1/2 \leq \gamma \leq 1$. Из рис. 1 видно, что при $\gamma < 1/2$ δ_{\max}^* весьма близко к δ_{\max} . При $\gamma > 1/2$, $\gamma \rightarrow 1$ кривые δ_{\max} и δ_{\max}^* далеки (δ_{\max} не стремится к нулю в отличие от δ_{\max}^*). Цифрой 9 на рис. 1 обозначена кривая

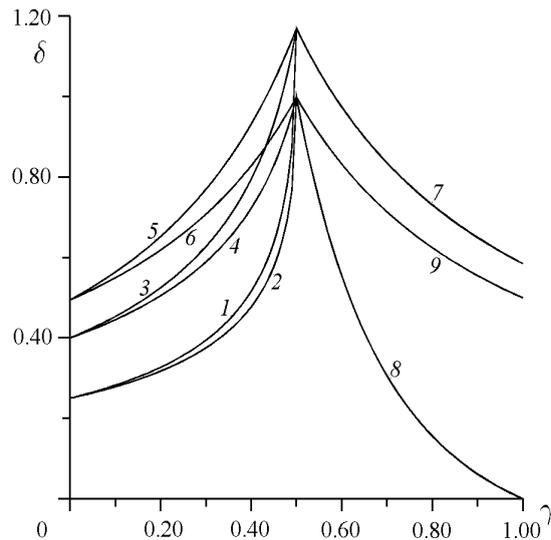


Рис. 1.

$$\widehat{\delta}_{\max} = \min \left\{ \frac{1}{2\gamma}, \frac{1}{2\gamma l} \right\}, \quad \frac{1}{2} \leq \gamma \leq 1.$$

Видно, что эта кривая уже близка к кривой 7. Поэтому можно выдвинуть гипотезу, что и в общем случае в формулах (7) можно заменить функцию τ^{13} на

$$\widehat{\tau}^{13} = \min \left\{ \frac{1}{2\gamma X}, \frac{1}{2\gamma Y} \right\},$$

при этом полученный критерий останется достаточным.

4. Пример расчета

Рассмотрим задачу

$$\frac{\partial F}{\partial t} - \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1, \quad t > 0;$$

$$F = -0.5, \quad x = 0; \quad F = 0.5, \quad x = 1; \quad F = f(x, t), \quad y = 0; \quad F = f(x, t), \quad y = 1; \quad (14)$$

$$F = \theta(x - 0.5) - 0.5, \quad t = 0,$$

где

$$f(x, t) = x - 0.5 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2 \cos(k\pi/2)}{k\pi} e^{-k^2\pi^2 t} \sin(k\pi x);$$

$$\theta(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0; \\ 1 & \text{при } x \geq 0. \end{cases}$$

Она имеет аналитическое решение $F(x, y, t) \equiv f(x, t)$.

Введем в квадрате $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ равномерную сетку: $x_n = n/N$, $n = \overline{0, N}$; $y_m = m/M$, $m = \overline{0, M}$. Имеем $\Lambda_1 F_{nm} = (-F_{n+1m} + 2F_{nm} - F_{n-1m})/h_x^2$, $\Lambda_2 F_{nm} = (-F_{nm+1} + 2F_{nm} - F_{nm-1})/h_y^2$, где $h_x = 1/N$; $h_y = 1/M$. Используем для численного решения задачи (14) разностную схему (4).

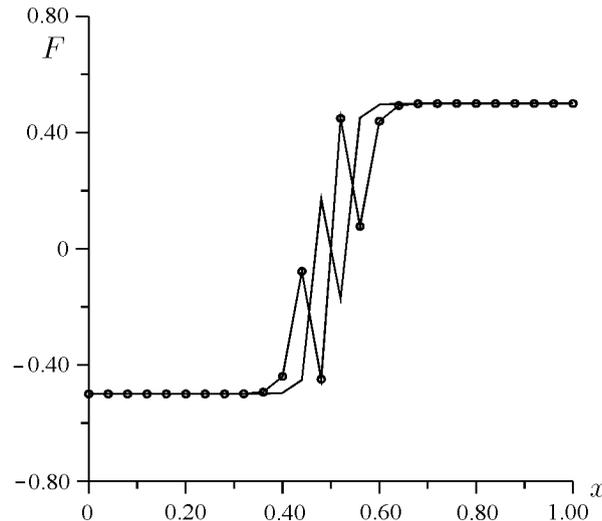


Рис. 2.

Положим $N = M = 25$ (тогда $l = 1$). Сначала произведем расчет при $\gamma = 0, 1$, $\tau = 3\delta_{\max}^*(0.1; 1)h_x^2$ (см. формулу (13)). На рис. 2 приведена зависимость от x полученной в расчете функции F при $y = 0.48$, $t = \tau$ (непомеченная кривая) и $t = 2\tau$ (кривая,

помеченная кружками). При увеличении t осцилляции в решении распространяются на всю область значений переменной x .

Произведем аналогичный расчет при $\gamma = 0,1$, $\tau = \delta_{\max}^*(0,1;1)h_x^2$. На рис. 3 приведена зависимость от x полученной в расчете функции F при $y = 0,48$, $t = \tau$ (непомеченная кривая) и $t = 2\tau$ (кривая, помеченная кружками). Видно, что в этом случае осцилляций нет.

Определим теперь величину $\bar{\tau}_{\max}$ как наибольшее значение τ , при котором решение при $t = \tau$, $y = 0,48$ остается монотонным, и рассчитаем зависимость величины $\bar{\delta}_{\max} = \bar{\tau}_{\max}/h_x^2$ от γ . Полученная зависимость показана на рис. 4. (При $\gamma = 0$ $\bar{\delta}_{\max} = 0,5$; при $\gamma = 0,5$ $\bar{\delta}_{\max} = 1,5$.) Она обрывается на значении $\gamma = 0,9$, так как при $\gamma = 0,9$ $\bar{\delta}_{\max}$ скачком увеличивается от значения 39 до 550 и затем плавно уменьшается до значения 500 при $\gamma = 1$. Это говорит о том, что с точки зрения уменьшения осцилляций при заданном τ лучше использовать схему с γ , близким к 1.

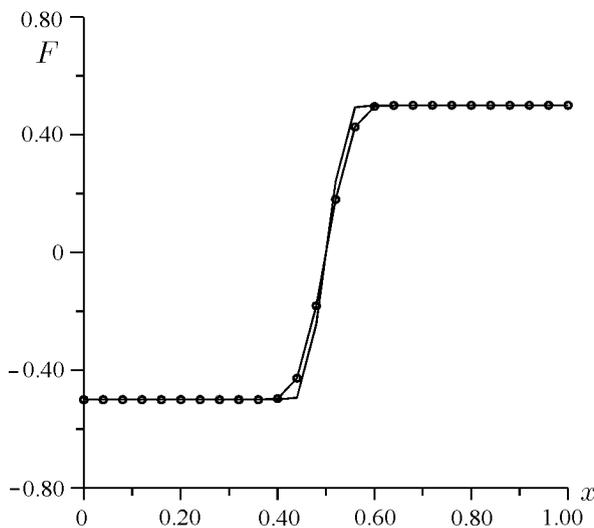


Рис. 3.

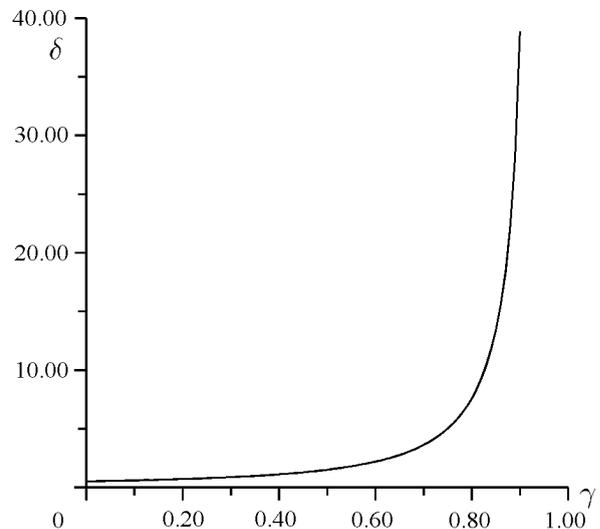


Рис. 4.

Список литературы

- [1] HARTEN A. On a Class of High Resolution Total – Variation – Stable Finite – Difference Schemes // SIAM J. Numer. Anal. 1984. Vol. 21, No. 1. P. 1 – 23.
- [2] БУЛЕЕВ Н. И. Пространственная модель турбулентного обмена. М.: Наука, 1989. 344 с.
- [3] САМАРСКИЙ А. А., НИКОЛАЕВ Е. С. Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978. 592 с.
- [4] КАЛИТКИН Н. Н. Численные методы. М.: Наука, 1978. 512 с.
- [5] ВОЕВОДИН В. В., КУЗНЕЦОВ Ю. А. Матрицы и вычисления. М.: Наука, 1984. 320 с.
- [6] МАРЧУК Г. И. Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1977. 456 с.

Поступила в редакцию 3 января 2001 г.