Вычислительные технологии **Том 6, № 3, 2001**

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ НОВЫМИ КОНСТРУКЦИЯМИ СПЕЦИАЛЬНЫХ СОГЛАСОВАННЫХ РЯДОВ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ*

М. Ю. Филимонов
Институт математики и механики УрО РАН
Екатеринбург, Россия
e-mail: fmy@imm.uran.ru

New constructions of consistent special series for representation of solutions of non-linear partial differential equations are presented. This approach is the continuation of the special series method. The main feature of this method is constructive representation of solutions of non-linear equations as the series on the powers of special basic functions with recurrently calculated coefficients found from solutions of ordinary differential equations. It is shown that these series can be used for solving boundary-initial problems with exact satisfaction of boundary conditions. The convergence area of suggested series is investigated and the results of numerical experiments are presented.

Введение

В настоящее время перспективным направлением получения приближенных решений нелинейных уравнений с частными производными является сочетание численных и аналитических методов. Одним из аналитических подходов является метод специальных рядов, получивший свое развитие после работы А. Ф. Сидорова [1]. Суть его состоит в разложении решения в ряд по степеням одной или нескольких специальным образом выбираемых функций [2, 3] (эти функции будем называть базисными). Такой выбор позволяет находить коэффициенты ряда последовательно из обыкновенных дифференциальных уравнений. В отличие от метода Фурье, который лишь для линейных уравнений приводит к рекуррентным способам получения коэффициентов ряда, метод специальных рядов и для нелинейных уравнений позволяет конструктивно находить коэффициенты ряда. Похожие идеи, но для представления решений нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений по степеням функций, определяемых в свою очередь из других уравнений, встречаются, например, в монографии А. М. Ляпунова [4, с. 44]. В этом случае также получаются ряды

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты № 99-01-00326, № 00-01-00370.

с рекуррентно вычисляемыми коэффициентами. Однако перенос таких идей на случай нелинейных уравнений с частными производными не очевиден.

Предлагаемый метод специальных рядов является эффективным инструментом для доказательства теорем существования решений нелинейных задач. С его помощью удается доказывать и нелокальные теоремы о представлении решений важных уравнений в неограниченных областях [5–7], в которых применение численных методов сталкивается с принципиальными трудностями. В предлагаемой работе основное внимание уделяется решению начально-краевых задач для нелинейных уравнений.

1. Общая схема построения решений специальными рядами

Опишем метод специальных рядов на примере уравнения

$$u_t = F\left(t, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial^m u}{\partial x^m}\right), \tag{1.1}$$

где F — аналитическая функция своих переменных, кроме, быть может, первой.

Решение уравнения (1.1) будем искать в виде ряда по степеням специальных функций (базисных функций)

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(t) Q^n(x), \tag{1.2}$$

где базисная функция $Q(x)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{d}{dx} Q(x) = \sum_{k=1}^{\infty} q_k Q^k(x), \quad q_k = \text{const}. \tag{1.3}$$

В этом случае коэффициенты $\alpha_n(t)$ после подстановки ряда (1.2) в уравнение (1.1) будут находиться последовательно (для двойных специальных рядов это доказано в [8], для кратных — в работе [9]). Такие базисные функции назовем универсальными ввиду того, что с их помощью можно искать решения нелинейных уравнений достаточно общего вида. При этом специфика уравнения почти не учитывается. Примерами базисных функций $Q(x)$ являются

$$Q_1(x) = \frac{1}{1+x}; \quad Q_2(x) = \exp(-ax), \quad a > 0; \quad Q_3(x) = x^{1/k}, \quad k \geq 1. \tag{1.4}$$

Как следует из работы [2], универсальные базисные функции $Q(x)$ убывают при $x \to +\infty$ либо как $Q_2(x)$, либо как $Q_3(x)$.

Сходимость рядов по степеням универсальных функций установлена для многих уравнений математической физики [2]. Решалась в основном задача Коши, когда начальное условие $u(x,0)$ может быть представлено в виде ряда

$$u(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} u_{0n} Q^n(x), \quad u_{0n} = \text{const}. \tag{1.5}$$

2. Согласованные ряды

Использование универсальных рядов для уравнения (1.1) свидетельствует о том, что такие ряды, позволяющие выписать формальное решение, не учитывают специфики исходного уравнения. Поэтому возникает вопрос о возможности расширения класса базисных функций за счет учета особенностей исходного уравнения.

Рассмотрим, например, нелинейное уравнение типа нестационарной фильтрации

$$u_t(x,t) = [\varphi(u)]_{xx}, \tag{2.1}$$

$$\varphi(u) = \sum_{k=2}^{\infty} \beta_k(t) u^k, \quad \varphi'(u) \geq 0, \quad \beta_k(t) \in C_{[0,t]}. \tag{2.2}$$

Утверждение 2.1. Ряд

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(t) R^n(x) \tag{2.3}$$

является формальным решением уравнения (2.1), (2.2), если базисные функции $R(x)$ удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$\left(\frac{dR}{dx}\right)^2 = \sum_{k=2}^{\infty} \alpha_k R^k, \quad \alpha_k = \text{const}. \tag{2.4}$$

Ряд (2.4) предполагается сходящимся при $|R| \leq R_0$, $R_0 > 0$.

Доказательство этого утверждения следует после подстановки ряда (2.3) в уравнение (2.1) и приведения подобных членов при одинаковых степенях R. Оказывается, что для последовательного определения коэффициентов $\alpha_n(t)$ достаточно выполнения равенства (2.4) и условия

$$R'' = \sum_{k=1}^{\infty} b_k R^k, \quad b_k = \text{const}. \tag{2.5}$$

Заметим, что условие (2.5) является следствием (2.4). Действительно, после дифференцирования уравнения (2.4) получим соотношение (2.5) с $b_k = 0.5\alpha_{k+1}$, $k \geq 1$.

Таким образом, ряд (2.3), (2.4) является формальным решением уравнения (2.1), (2.2). Такие ряды и базисные функции будем называть согласованными.

В качестве примеров согласованных базисных функций можно рассмотреть следующие:

$$R_1(x) = (x^2+1)^{-1}, \quad (R_1')^2 = 4R_1^3 - 4R_1^4;$$
$$R_2(x) = (\cos^2 x + A)^{-1}, \quad (R_2')^2 = -4R_2^2 + (4+8A)R_2^2 + 4A(A-1)R_2^4, \quad A = \text{const};$$
$$R_3(x) = 4/(e^x + e^{-x})^2, \quad (R_3')^2 = 4R_3^2 - 4R_3^3.$$

Замечание 2.1. Универсальные базисные функции $Q(x)$ также удовлетворяют дифференциальному уравнению (2.4). Поэтому класс согласованных базисных функций более богатый. В него входят, например, периодические функции $R_2(x)$ и функции, стремящиеся к нулю при $x \to \pm\infty$ $(R_1(x), R_3(x))$, которые среди универсальных базисных функций отсутствуют.

Опишем класс уравнений, допускающих решения в виде как универсальных, так и согласованных рядов (2.3), (2.4).

Утверждение 2.2. Пусть для уравнения

$$u_t = \sum_{j=0}^{\infty} A_{p_j}(t) u^{k_{0j}} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^{k_{1j}} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^{l_{1j}} \cdots \left(\frac{\partial^{2m-1} u}{\partial x^{2m-1}}\right)^{k_{mj}} \left(\frac{\partial^{2m} u}{\partial x^{2m}}\right)^{l_{mj}}, \tag{2.6}$$

где $A_{p_j}(t) \in C_{[0,\infty)}$, $p_j = (k_{oj}, k_{1j}, l_{1j}, \ldots, k_{mj}, l_{mj})$, $k_{0j} + \sum_{j=1}^{m}(k_{ij} + l_{ij}) = j$; ряд (2.6) предполагается сходящимся в некоторой области; для любого j выполнены условия $\sum_{i=1}^{m} k_{ij} = 2S_j$, S_j — натуральное число. Тогда с помощью ряда (2.3), (2.4) можно построить формальное решение уравнения (2.6).

При доказательстве этого утверждения используется специфика уравнения (2.4) для базисных функций, а также анализ четности суммы показателей степеней для нечетных производных от u в уравнении (2.6). Из утверждения 2.1 следует, что четные производные от u, а значит, и их степени представимы рядами (2.3), (2.4). Следовательно, эти ряды будут формальным решением уравнения (2.6).

Замечание 2.2. Базисные функции (2.4) могут быть согласованы не только с уравнением (2.6), но и с уравнениями, имеющими особенности, для которых формальное решение в виде универсального ряда построить не удается. Например, для уравнения стационарных осесимметричных течений газа [7] удается доказать сходимость согласованного ряда в неограниченной области для конкретной базисной функции.

3. Применение согласованных рядов для решения начально-краевых задач

Используя более полно особенности исходного уравнения, можно строить ряды и по другим базисным функциям [10–12]. Учет специфики уравнения и начальных условий позволяет применять согласованные ряды и для решения начально-краевых задач [13]. Применение универсальных базисных функций для решения краевых задач связано с определенными трудностями. Так, в работе [14] для решения уравнения (1.1) предложены ряды

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t) P^n(x,t). \tag{3.1}$$

Если выполнены дифференциальные соотношения

$$\frac{\partial P}{\partial x} = A(t,P), \quad \frac{\partial P}{\partial t} = B(t,P), \tag{3.2}$$

где A, B — аналитические в нуле функции по P и $A(t,0) \equiv B(t,0) \equiv 0$, то коэффициенты ряда (3.1) также будут находиться последовательно (свойства таких базисных функций описаны в [2]). Примером такой базисной функции является

$$P(x,t) = (\exp(bx) + f(t))^{-1}, \quad f(t) \in C^1_{[0,\infty)}, \quad b = \text{const}, \tag{3.3}$$

удовлетворяющая соотношениям вида (3.2):

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -bP + f(t)P^2, \quad \frac{\partial P}{\partial t} = -f'(t)P^2.$$

Заметим, что в отличие от решения в виде ряда (1.2) ряд (3.1), (3.3) содержит произвольную функцию $f(t)$, которая порождает некоторый краевой режим, например, при $x = 0$. Поэтому можно попытаться приближенно удовлетворить заданному краевому условию [6], ограничиваясь конечным числом членов ряда. Трудоемкость таких вычислений с ростом числа членов ряда сильно возрастает.

Однако можно указать классы нелинейных задач, для которых удается точно удовлетворить краевым условиям. Рассмотрим для нелинейного волнового уравнения начально-краевую задачу

$$u_{tt} = G(t, u, u^2 u_{xx}, u^2 u_x^2), \tag{3.4}$$

$$u_t(x, 0) = u_1(x), \quad u(x, 0) = u_0(x), \tag{3.5}$$

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad t \geq 0. \tag{3.6}$$

Здесь G — аналитическая функция своих переменных, кроме, быть может, первой. Пусть G представлена при $|u|$, $|u_x^2|$, $|u_{xx}| \leq D$ $(D > 0)$ в виде абсолютно сходящегося ряда

$$G = \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{m+k+l=q} \beta_{mkl}(t) u^{q+k+l} u_{xx}^k u_x^{2l}.$$

Предположим, что $\beta_{100}(t) \equiv 0$, $\beta_{mkl}(t) \in C_{[0,\infty)}$ и выполнены условия

$$\sum_{m+k+l=q} |\beta_{mkl}(t)| \leq b_q, \quad \sum_{q=1}^{\infty} b_q = B, \quad b_q, B = \text{const}.$$

Справедлива

Теорема 1. *Пусть начальные условия $u_\nu(x)$, $\nu = 0, 1$ представимы в виде рядов*

$$u_\nu(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g_{\nu n} S^n(x), \quad g_{\nu n} = \text{const} \tag{3.7}$$

и функция $S(x)$ удовлетворяет уравнению

$$\left(\frac{dS}{dx}\right)^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k S^k, \quad \alpha_k = \text{const}. \tag{3.8}$$

Здесь ряды (3.7), (3.8) предполагаются сходящимися при $|S| \leq A$, $A > 0$ и выполнены условия $g_{01} = g_{11} = 0$ и $|g_{0n}| + |g_{1n}| + |\alpha_k| \leq 0.5 n^{-4} M^n$, $0 < M < A^{-1} < 1$. Тогда ряд

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) S^n(x) \tag{3.9}$$

является решением задачи Коши (3.4), (3.5) при всех $0 \leq t \leq T$, $T = -b^{-1} \ln(AM)$, $b \geq b_0 > 1$ и x, для которых $|S(x)| \leq A$.

Доказательство. Проверим возможность рекуррентного нахождения коэффициентов ряда (3.9) $u_n(t)$. Вначале вычислим $u^2 u_{xx}$.

$$u_{xx} = \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1) u_n(t) S^{n-2}(x) S_x^2(x) + \sum_{n=1}^{\infty} n u_n(t) S^{n-1}(x) S_{xx}(x) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)u_n(t)S^{n-2}(x)\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k S^k(x) + \sum_{n=1}^{\infty} nu_n(t)S^{n-1}(x)0.5\sum_{k=1}^{\infty}k\alpha_k S^{k-1}(x).$$

Окончательно имеем

$$u^2u_{xx} = \sum_{n\ge 4}\Big[\sum_{m_1+m_2+m_3-2+k=n} u_{m_1}(t)u_{m_2}(t)m_3(m_3-1)u_{m_3}(t)\alpha_k +$$

$$+0.5ku_{m_1}(t)u_{m_2}(t)m_3u_{m_3}(t)\alpha_k\Big]S(x)^n.$$

Аналогично вычисляется

$$u^2u_x^2 = \sum_{n\ge 4}\sum_{m_1+m_2+m_3+m_4+k=n} u_{m_1}(t)u_{m_2}(t)m_3u_{m_3}(t)m_4u_{m_4}\alpha_k S^n(x).$$

Подставляя найденные выражения в функцию G и приравнивая выражения при одинаковых степенях $S(x)$, для определения коэффициентов ряда (3.9) $u_n(t)$ получим последовательность обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка

$$u_n''(t) = G_n(t, u_m(t)), \quad m < n \tag{3.10}$$

с начальными условиями

$$u_n'(0) = g_{1n}, \quad u_n(0) = g_{0n}, \quad n > 1. \tag{3.11}$$

Для решений уравнений (3.10), (3.11) справедливы оценки

$$|u_n(t)| \le n^{-4}M^n \exp(btn), \quad n \ge 2, \quad 0 \le t \le T. \tag{3.12}$$

Доказательство оценок (3.12) проводится методом математической индукции аналогично тому, как это сделано в работах [12, 13]. Действительно, для правой части уравнений (3.10) справедливо неравенство

$$|G_n| \le K_1 \sum_{j=1}^{n} b_j \sum_{m_1+\dots+m_j=n}\prod_{i=1}^{j} m_i(m_i-1)|u_{m_i}(t)||\alpha_k|, \tag{3.13}$$

где $K_1 = \mathrm{const}$. Используя числовое неравенство

$$\sum_{m_1+\dots+m_j=n}\prod_{i=1}^{j} m_i^{-2} \le K_2 n^{-2} \quad (K_2 = \mathrm{const})$$

и предположение индукции (3.12), продолжим оценку (3.13):

$$|G_n| \le K_1 \sum_{j=1}^{n} b_j K_2 n^{-2}M^n \exp(btn) \le K_1K_2Bn^{-2}M^n\exp(btn). \tag{3.14}$$

Решение уравнений (3.10), (3.11) можно записать в явном виде

$$u_n(t) = \int_0^t\int_0^\tau G_n(\tau, u_m(\tau))d\tau d\tau + g_{1n}\tau + g_{0n}. \tag{3.15}$$

Используя неравенство (3.14) и проводя двойное интегрирование в формулах (3.15), убеждаемся в справедливости предположения индукции. Теперь с помощью оценок (3.12) можно установить сходимость ряда (3.9) к решению задачи Коши (3.4), (3.5).

Замечание 3.1. Согласованные функции $S(x)$ включают в себя класс базисных функций $R(x)$, удовлетворяющих уравнению (2.4), являющемуся частным случаем уравнения (3.8).

Замечание 3.2. При оценке коэффициентов ряда (3.9) существенно использовалось условие $g_{01} = g_{11} = 0$. В этом случае $u_1(t) \equiv 0$ и получается последовательность уравнений (3.10) с $m < n$. В противном случае также получается последовательность линейных уравнений с $m \leq n$, вопрос оценки коэффициентов которой остается открытым.

Замечание 3.3. Если согласованная базисная функция $S(x)$ удовлетворяет дополнительному условию $S(0) = S(\pi) = 0$, то ряд (3.9), очевидно, является и решением начально-краевой задачи (3.4)–(3.6). Например, такой функцией будет функция $S(x) = \sin x$, для которой ряд (3.9) имеет вид

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin^n(x). \tag{3.16}$$

Покажем применение специального ряда (3.16) для модельной задачи

$$u_{tt} = u^2 u_{xx}, \tag{3.17}$$

$$u_t(x,0) = 0, \quad u(x,0) = u_0(x), \tag{3.18}$$

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \quad t \geq 0. \tag{3.19}$$

После подстановки ряда (3.16) в уравнение (3.17) для определения его коэффициентов получится последовательность уравнений

$$u_n''(t) = u_1(t)^2 n(n-1)u_n(t)) + \sum_{m+k+l-2=n} u_m(t)u_k(t)l(l-1)u_l(t) - \sum_{m+k+l=n} u_m(t)u_k(t)l^2 u_l(t). \tag{3.20}$$

Для этой частной задачи формулировку теоремы 1 можно конкретизировать. Справедлива

Теорема 2. *Пусть начальные условия (3.18) представимы в виде*

$$u_0(x) = \sum_{n=2}^{\infty} g_{0n} \sin^n(x),$$

и $|g_{0n}| \leq M^n n^{-4}$ $M = \text{const}$, $0 < M < 1$. *Тогда ряд (3.16) является решением начально-краевой задачи (3.17)–(3.19) при всех* $0 \leq t \leq T$, $(T = -b^{-1} \ln M > 0,\ b \geq b_0 > 0)$ *и* $0 \leq x \leq \pi$.

Доказательство теоремы 2 проводится аналогично доказательству теоремы 1. В этом случае следует отметить, что краевые условия (3.19) удовлетворяются автоматически за счет выбора базисной функции. Коэффициенты ряда (3.16) определяются следующим образом из уравнений (3.20):

$$u_n(t) = \int_0^t \int_0^\tau \left[\sum_{m+k+l-2=n} u_m u_k l(l-1) u_l - \sum_{m+k+l=n} u_m u_k l^2 u_l \right] d\tau d\tau + g_{0n}. \tag{3.21}$$

Здесь мы воспользовались условием, что $g_{01} = 0$, а значит, и $u_1(t) \equiv 0$. Таким образом, ряд (3.16) является решением начально-краевой задачи во всей рассматриваемой области по x и для всех $0 \leq t \leq T$.

4. Результаты численных расчетов

Результаты численных расчетов приведены для модельной задачи (3.17) – (3.19) с начальными данными $u_0(x) = 0.1 \sin^2(x)$ (рис. 1) и $u_0(x) = 1/15 \sin^2(x) - 1/20 \sin^3(x)$ (рис. 2). Вычисления проводились с помощью системы символьных вычислений MAPLE. Из уравнения (3.21) находились первые 12 коэффициентов ряда (3.16) и вычислялось приближенное решение в виде частичной суммы

$$u_m(x,t) = \sum_{k=1}^{m} u_k(t) \sin^k(x), \quad m \le 12.$$

Проведенные расчеты подтвердили, что ряд (3.16) быстро сходится. Величина разностей $|u_{12}(x,t) - u_6(x,t)|$ на рис. 1, *в* и $|u_{12}(x,t) - u_{10}(x,t)|$ на рис. 2, *в* относительно величины $\max u_{12}(x,t)$ составляет около 1 %.

Таким образом, предложенные новые конструкции специальных согласованных рядов могут быть использованы не только для решений задач Коши, но и для решения начально-краевых задач.

Список литературы

[1] Сидоров А. Ф. О некоторых представлениях решений квазилинейных гиперболических уравнений // Числ. методы механики сплошной среды: Сб. науч. тр. / СО АН СССР. ВЦ; ИТПМ. 1975. Т. 6, № 4. С. 106–115.

[2] Filimonov M. Yu., Korzunin L. G., Sidorov A. F. Approximate methods for solving nonlinear initial boundary-value problems based on special construction of series // Rus. J. of Numer. Anal. and Math. Modelling. 1993. Vol. 8, №. 2. P. 101–125.

[3] Филимонов М. Ю. Специальные ряды и их приложения // Тр. VIII Всерос. шк.-сем. Совр. пробл. мат. моделирования. Ростов-на-Дону, 1999. С. 231–239.

[4] Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. Собр. соч. М., 1956. Т. 2.

[5] Титов С. С. Пространственно-периодические решения полной системы Навье — Стокса // Докл. РАН. 1999. Т. 365, №6. С. 761–763.

[6] Корзунин Л. Г., Филимонов М. Ю. О представлении решения уравнения Кортевега — де-Фриза в виде специальных рядов // Числ. методы механики сплошной среды: Сб. науч. тр. / СО АН СССР. ВЦ; ИТПМ. 1985. Т. 16, №5. С. 57–67.

[7] Филимонов М. Ю. Применение специальных рядов для решения нелинейных уравнений с частными производными в неограниченных областях // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36, №11. С. 1538–1543.

[8] Титов С. С. Разложение решений нелинейных уравнений в двойные ряды // Дифференц. уравнения. 1978. Т. 14, №10. С. 1844–1850.

[9] Филимонов М. Ю. Применение обобщенных базисных функций и кратных рядов для разложения решений нелинейных уравнений // Числ. и аналитические методы моделирования в механике сплошной среды. Свердловск, 1988. С. 54–65.

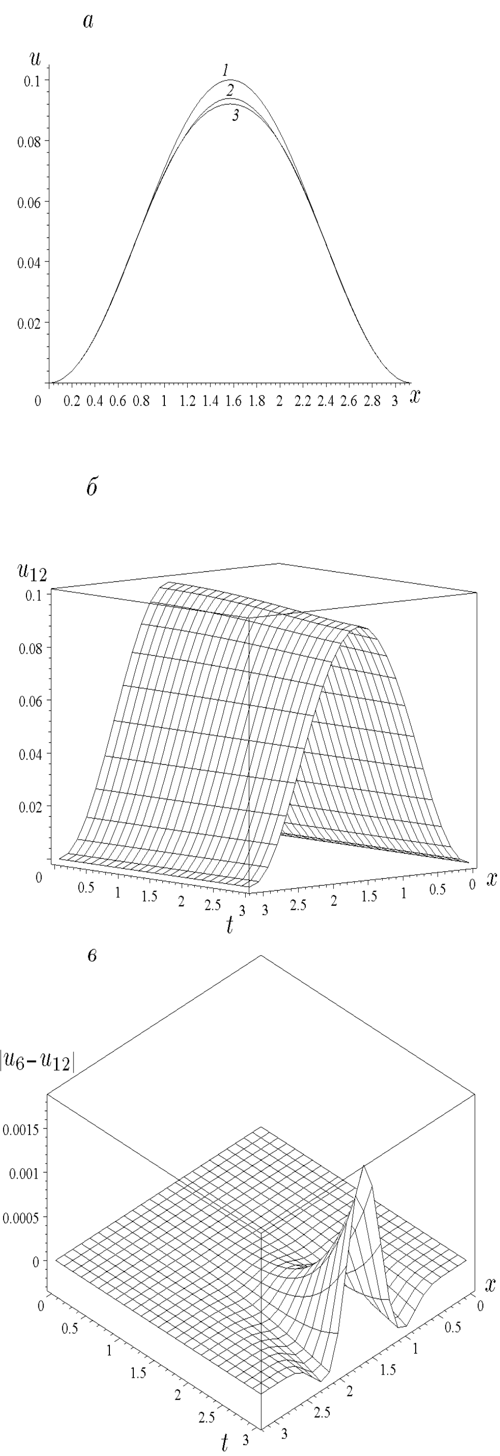

Рис. 1. Результаты численных расчетов приведены для модельной задачи (3.17) – (3.19) с начальными данными $u_0(x) = 0.1\sin^2(x)$: *а* — кривая *1* — начальное условие $u_0(x)$, кривые *2* и *3* — приближенные решения $u_6(x,3)$ и $u_{12}(x,3)$ соответственно; *б* — временная эволюция решения $u_{12}(x,t)$; *в* — разность между приближенными решениями $u_6(x,t)$ и $u_{12}(x,t)$.

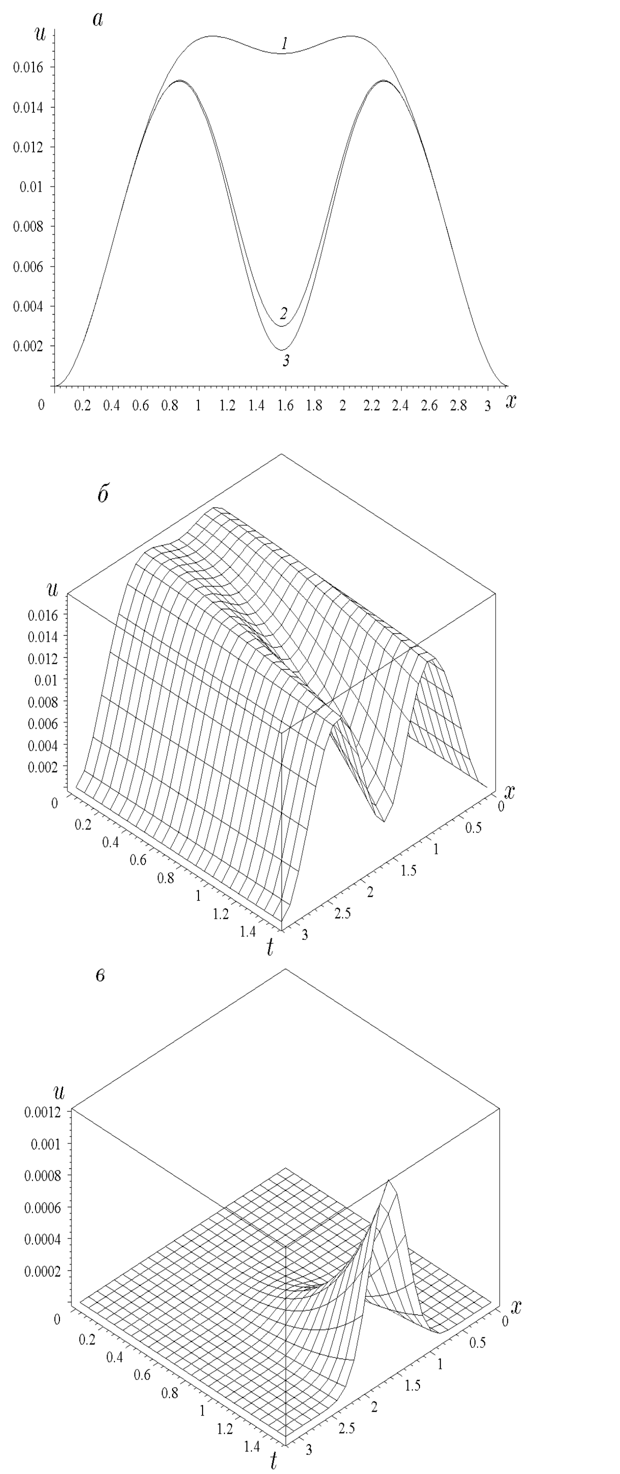

Рис. 2. Результаты численных расчетов приведены для модельной задачи (3.17) – (3.19) с начальными данными $u_0(x) = 1/15\sin^2(x) - 1/20\sin^3(x)$: *а* — кривая *1* — начальное условие $u_0(x)$, кривые *2* и *3* — приближенные решения $u_{10}(x,1.5)$ и $u_{12}(x,1.5)$ соответственно; *б* — временная эволюция решения $u_{12}(x,t)$; *в* — разность между приближенными решениями $u_{10}(x,t)$ и $u_{12}(x,t)$.

[10] Вершинин С. В., Сидоров А. Ф. О поведении решений уравнений двойных волн в окрестности области покоя // Прикл. математика и механика. 1975. Т. 39, вып. 6. С. 1043–1050.

[11] Титов С. С. Представление решения многомерного симметричного уравнения фильтрации газа в виде логарифмического ряда // Динамика многофазных сред: Сб. науч. тр. / СО АН СССР. ИГиЛ. 1984. С. 132–144.

[12] Филимонов М. Ю. О некоторых конструкциях специальных рядов, согласованных с данным нелинейным уравнением // Моделирование в механике: Сб. науч. тр. / СО РАН. ВЦ; ИТПМ. 1989. Т. 3(20), №4. С. 151–157.

[13] Филимонов М. Ю. О представлении решений смешанных задач для нелинейного волнового уравнения специальными двойными рядами // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27, №9. С. 1625–1631.

[14] Коковихина О. В., Сидоров А. Ф. Специальные конструкции рядов для решения нелинейных уравнений с частными производными // Числ. методы механики сплошной среды: Сб. науч. тр. / СО АН СССР. ВЦ; ИТПМ. 1984. Т. 15, №3. С. 72–84.

Поступила в редакцию 7 декабря 2000 г.,
в переработанном виде — 6 февраля 2001 г.