ГРУППОВОЙ АНАЛИЗ И ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ МИКРОКОНВЕКЦИИ*

А. А. Родионов
Институт вычислительного моделирования СО РАН
Красноярск, Россия
e-mail: sek@cckr.krasnoyarsk.su

Group analysis of a new model for convection under low gravity which are presented in the works of V. V. Pukhnachov are considered. The complete group of admissible transformations, the optimal systems of first- and second-order sub-algebras of Lie algebra of operators, some examples of exact solutions of the model are presented in this paper.

1. Базис допустимых операторов

Известно, что движение жидкости, вызванное тепловой гравитационной конвекцией, обычно моделируется системой уравнений Обербека — Буссинеска. Эта модель, хорошо описывающая конвективные течения в естественных земных условиях, перестает работать в очень слабых силовых полях. В. В. Пухначевым предложена новая модель тепловой конвекции при пониженной гравитации, основанная на *точных* уравнениях неразрывности и импульса [1, 2]. Модель учитывает, что диссипативные функции и силы давления пренебрежимо малы и в уравнении состояния используется обратно пропорциональная зависимость плотности от температуры.

Рассматривается система уравнений конвективного движения жидкости при пониженной гравитации

$$\mathbf{w}_t + \mathbf{w} \bigtriangledown \mathbf{w} + \chi(\bigtriangledown\theta \bigtriangledown \mathbf{w} - \bigtriangledown\mathbf{w} \bigtriangledown \theta) + \chi^2(\Delta\theta \bigtriangledown \theta - \bigtriangledown| \bigtriangledown \theta|^2/2) = \theta(- \bigtriangledown q + \nu\Delta\mathbf{w}) + \mathbf{g},$$

$$\theta_t + \mathbf{w} \bigtriangledown \theta + \chi| \bigtriangledown \theta|^2 = \chi\theta\Delta\theta, \quad \operatorname{div} \mathbf{w} = 0. \tag{1.1}$$

Здесь функции $\mathbf{w} = (u, v, w), q, \theta$ имеют смысл скорости по осям (x, y, z), давления и температуры соответственно; t — время, $\mathbf{g} = (0, 0, -g)$ — ускорение силы тяжести; χ — коэффициент температуропроводности; ν — коэффициент кинематической вязкости.

Функции $\mathbf{w}, q, \theta$ связаны с естественными физическими функциями $\mathbf{v}, p, T$ (скоростью, давлением, температурой) соотношениями

$$\mathbf{v} = \mathbf{w} + \chi \bigtriangledown \theta, \quad p = \rho_0(q + (\nu - \chi)\chi\Delta\theta) + \lambda \operatorname{div} \mathbf{v}, \quad 1 + \beta T = \theta, \tag{1.2}$$

где ρ_0 — характерное значение плотности жидкости; $\rho_0 > 0, \lambda > 0$. Плотность жидкости определяется из выражения $\rho = \rho_0\theta^{-1}$.

---

*Работа выполнена при поддержке СО РАН (проект №5) и Красноярского краевого фонда науки.

Если в уравнениях (1.1) сделать замену $\chi\theta \to \theta,\ q \to \chi q,\ \nu \to \chi\nu$, то коэффициент температуропроводности χ исключается. Поэтому в системе уравнений (1.1) можно положить $\chi = 1$.

На первом этапе группового анализа системы уравнений (1.1) исследуются свойства ее инвариантности относительно преобразований пространства всех независимых и зависимых переменных $R^9(t, x, y, z, u, v, w, q, \theta)$. Наиболее широкая группа Ли преобразований пространства R^9, допускаемая системой (1.1), бесконечномерна, так как преобразование $q \to q + \varphi(t)$ с произвольной функцией φ сохраняет систему. Соответствующая алгебра Ли операторов вычисляется по стандартной методике [3], и ее базис образуют следующие операторы [4]:

$$\begin{gathered} X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_3 = \partial_z, \quad X_4 = t\partial_x + \partial_u, \quad X_5 = t\partial_y + \partial_v, \quad X_6 = t\partial_z + \partial_w, \\ X_7 = \partial_t, \quad X_8 = x\partial_x + y\partial_y + (z + gt^2/2)\partial_z + u\partial_u + v\partial_v + (w + gt)\partial_w + 2\theta\partial_\theta, \\ X_9 = x\partial_x + y\partial_y + (z - gt^2/2)\partial_z + t\partial_t - gt\partial_w + \theta\partial_\theta - q\partial_q, \\ X_{10} = (z + gt^2/2)\partial_y - y\partial_z + (w + gt)\partial_v - v\partial_w, \\ X_{11} = x\partial_z - (z + gt^2/2)\partial_x + u\partial_w - (w + gt)\partial_u, \\ X_{12} = y\partial_x - x\partial_y + v\partial_u - u\partial_v, \quad X_{13}(\varphi) = \varphi(t)\partial_q \end{gathered} \tag{1.3}$$

(∂_s — оператор дифференцирования по координате s пространства R^9). Обозначим алгебру Ли операторов (1.3) через L.

При описании нестационарного движения жидкости можно воспользоваться преобразованием эквивалентности

$$z \to z - gt^2/2, \quad w \to w - gt, \tag{1.4}$$

которое упрощает уравнения системы (1.1), исключая в первом уравнении ускорение силы тяжести. Структура уравнений при такой замене сохраняется. Всякое точное решение уравнений (1.1) с $g = 0$ обратной заменой (1.4) переводится в их точное решение с $g \neq 0$. Далее рассматривается система уравнений (1.1) с $g = 0$. Соответствующая алгебра Ли допустимых операторов (1.3) упрощается: в базисных операторах X_8, X_9, X_{10}, X_{11} необходимо положить $g = 0$.

В настоящей работе решается задача построения оптимальной системы подалгебр первого Θ_1 и второго Θ_2 порядков для алгебры Ли операторов (1.3). Необходимо выделить такие линейные комбинации базисных операторов (1.3), которые приводят к построению существенно различных (с точки зрения допустимых групп преобразований) точных инвариантных решений уравнений системы (1.1). Метод поиска операторов оптимальных систем подалгебр подробно изложен в работах [3, 5].

2. Построение отимальной системы подалгебр Θ_1

Вычисляются коммутаторы операторов (1.3) по формулам

$$[X_i, X_j] = C_{ij}^k X_k = X_i(X_j) - X_j(X_i),$$

где C_{ij}^k — структурные постоянные, $i, j, k = 1, ..., 13$. Затем вычисляется присоединенная группа A внутренних автоморфизмов алгебры L и проводится структурный анализ алгебры L.

В табл. 1 представлены коммутаторы базисных операторов алгебры L.

Т а б л и ц а 1

Коммутаторы операторов алгебры L

$[\downarrow,\rightarrow]$	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	X_{10}	X_{11}	X_{12}	$X_{13}(\psi)$
X_1	0	0	0	0	0	0	0	X_1	X_1	0	X_3	$-X_2$	0
X_2	0	0	0	0	0	0	0	X_2	X_2	$-X_3$	0	X_1	0
X_3	0	0	0	0	0	0	0	X_3	X_3	X_2	$-X_1$	0	0
X_4	0	0	0	0	0	0	$-X_1$	X_4	0	0	X_6	$-X_5$	0
X_5	0	0	0	0	0	0	$-X_2$	X_5	0	$-X_6$	0	X_4	0
X_6	0	0	0	0	0	0	$-X_3$	X_6	0	X_5	$-X_4$	0	0
X_7	0	0	0	X_1	X_2	X_3	0	0	X_7	0	0	0	$X_{13}(\dot{\psi})$
X_8	$-X_1$	$-X_2$	$-X_3$	$-X_4$	$-X_5$	$-X_6$	0	0	0	0	0	0	0
X_9	$-X_1$	$-X_2$	$-X_3$	0	0	0	$-X_7$	0	0	0	0	0	$X_{13}(t\dot{\psi}+\psi)$
X_{10}	0	X_3	$-X_2$	0	X_6	$-X_5$	0	0	0	0	X_{12}	$-X_{11}$	0
X_{11}	$-X_3$	0	X_1	$-X_6$	0	X_4	0	0	0	$-X_{12}$	0	X_{10}	0
X_{12}	X_2	$-X_1$	0	X_5	$-X_4$	0	0	0	0	X_{11}	$-X_{10}$	0	0
$X_{13}(\varphi)$	0	0	0	0	0	0	$X_{13}(-\dot{\varphi})$	0	$X_{13}(-t\dot{\varphi}-\varphi)$	0	0	0	0

Примечание. $\varphi(t)$, $\psi(t)$ — произвольные гладкие функции, точка означает дифференцирование по t.

Т а б л и ц а 2

Группа внутренних автоморфизмов

	$\tilde{x}^1 =$	$\tilde{x}^2 =$	$\tilde{x}^3 =$	$\tilde{x}^4 =$	$\tilde{x}^5 =$	$\tilde{x}^6 =$	$\tilde{x}^7 =$	$\tilde{x}^8 =$	$\tilde{x}^9 =$	$\tilde{x}^{10} =$	$\tilde{x}^{11} =$	$\tilde{x}^{12} =$	$\tilde{\varphi}$
A_1	$x^1 - a_1\times$ $\times(x^8+x^9)$	$x^2 + a_1 x^{12}$	$x^3 - a_1 x^{11}$	x^4	x^5	x^6	x^7	x^8	x^9	x^{10}	x^{11}	x^{12}	$\varphi(t)$
A_2	$x^1 - a_2 x^{12}$	$x^2 - a_2(x^8+$ $+x^9)$	$x^3 + a_2 x^{10}$	x^4	x^5	x^6	x^7	x^8	x^9	x^{10}	x^{11}	x^{12}	$\varphi(t)$
A_3	$x^1 + a_3 x^{11}$	$x^2 - a_3 x^{10}$	$x^3 - a_3(x^8+$ $+x^9)$	x^4	x^5	x^6	x^7	x^8	x^9	x^{10}	x^{11}	x^{12}	$\varphi(t)$
A_4	$x^1 + a_4 x^7$	x^2	x^3	$x^4 - a_4 x^8$	$x^5 + a_4 x^{12}$	$x^6 - a_4 x^{11}$	x^7	x^8	x^9	x^{10}	x^{11}	x^{12}	$\varphi(t)$
A_5	x^1	$x^2 + a_5 x^7$	x^3	$x^4 - a_5 x^{12}$	$x^5 - a_5 x^8$	$x^6 + a_5 x^{10}$	x^7	x^8	x^9	x^{10}	x^{11}	x^{12}	$\varphi(t)$
A_6	x^1	x^2	$x^3 + a_6 x^7$	$x^4 + a_6 x^{11}$	$x^5 - a_6 x^{10}$	$x^6 - a_6 x^8$	x^7	x^8	x^9	x^{10}	x^{11}	x^{12}	$\varphi(t)$
A_7	$x^1 - a_7 x^4$	$x^2 - a_7 x^5$	$x^3 - a_7 x^6$	x^4	x^5	x^6	x^7- $-a_7 x^9$	x^8	x^9	x^{10}	x^{11}	x^{12}	$\varphi(t-$ $-a_7)$
A_8	$\mathrm{e}^{a_8} x^1$	$\mathrm{e}^{a_8} x^2$	$\mathrm{e}^{a_8} x^3$	$\mathrm{e}^{a_8} x^4$	$\mathrm{e}^{a_8} x^5$	$\mathrm{e}^{a_8} x^6$	x^7	x^8	x^9	x^{10}	x^{11}	x^{12}	$\varphi(t)$
A_9	$\mathrm{e}^{a_9} x^1$	$\mathrm{e}^{a_9} x^2$	$\mathrm{e}^{a_9} x^3$	x^4	x^5	x^6	$\mathrm{e}^{a_9} x^7$	x^8	x^9	x^{10}	x^{11}	x^{12}	$\mathrm{e}^{-a_9}\times$ $\times\varphi(\mathrm{e}^{-a_9} t)$
A_{10}	x^1	$x^2 \cos a_{10}+$ $+x^3 \sin a_{10}$	$-x^2 \sin a^{10}+$ $+x^3 \cos a_{10}$	x^4	$x^5 \cos a_{10}+$ $+x^6 \sin a_{10}$	$-x^5 \sin a_{10}+$ $+x^6 \cos a_{10}$	x^7	x^8	x^9	x^{10}	$x^{11} \cos a_{10}+$ $+x^{12} \sin a_{10}$	$x^{12} \cos a_{10}-$ $-x^{11} \sin a_{10}$	$\varphi(t)$ $\varphi(t)$
A_{11}	$x^1 \cos a_{11}-$ $-x^3 \sin a_{11}$	x^2	$x^1 \sin a_{11}+$ $+x^3 \cos a_{11}$	$x^4 \cos a_{11}-$ $-x^6 \sin a_{11}$	x^5	$x^4 \sin a_{11}+$ $+x^6 \cos a_{11}$	x^7	x^8	x^9	$x^{10} \cos a_{11}-$ $-x^{12} \sin a_{11}$	x^{11}	$x^{10} \sin a_{11}+$ $+x^{12} \cos a_{11}$	$\varphi(t)$ $\varphi(t)$
A_{12}	$x^1 \cos a_{12}+$ $+x^2 \sin a_{12}$	$-x^1 \sin a_{12}+$ $+x^2 \cos a_{12}$	x^3	$x^4 \cos a_{12}+$ $+x^5 \sin a_{12}$	$x^5 \cos a_{12}-$ $-x^4 \sin a_{12}$	x^6	x^7	x^8	x^9	$x^{10} \cos a_{12}+$ $+x^{11} \sin a_{12}$	$x^{11} cos a_{12}-$ $-x^{10} \sin a_{12}$	x^{12}	$\varphi(t)$ $\varphi(t)$
A_{13}	x^1	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	$x7$	x^8	x^9	x^{10}	x^{11}	x^{12}	$\varphi(t)+$ $+(x^7+$ $+tx^9)\dot{\psi}(t)$ $+x^9\psi(t)$

Примечание. A_i — преобразование с параметром a_i, $i = 1, ..., 12$.

Рассмотрим оператор общего положения

$$X = \sum_{i=1}^{12} x^i X_i + X_{13}(\varphi), \quad X \in L,$$

где $x = (x^1, \ldots, x^{12}, \varphi(t))$ — вектор координат оператора X в базисе (1.3). На каждом из операторов $X_i \in L$ строятся автоморфизмы Aut_{X_i} алгебры L, действие которых на оператор X определяется по формуле

$$\mathrm{Aut}_{X_i}(a_i)\langle X\rangle = X + \frac{a_i}{1!}[X, X_i] + \frac{a_i^2}{2!}[[X, X_i], X_i] + \ldots \qquad (2.1)$$

Формула (2.1) также определяет полную группу преобразований вектора координат оператора $X \in L$:

$$x = (x^1, \ldots, x^{12}, \varphi) \to \tilde{x} = (\tilde{x}^1, \ldots, \tilde{x}^{12}, \tilde{\varphi}). \qquad (2.2)$$

Задача построения оптимальной системы подалгебр состоит в построении таких наборов $x = (x^1, \ldots, x^{12}, \varphi)$, что ни один из векторов не может быть переведен в другой автоморфизмами Aut_{X_i}.

Согласно формулам (2.1), находятся все возможные преобразования (2.2) векторов x. В табл. 2 приведена полная группа преобразований координат этого вектора (группа внутренних автоморфизмов). Преобразованиям A_i соответствуют Aut_{X_i} с параметром a_i, $i = 1, \ldots, 12$, преобразованию A_{13} с функцией $\psi(t)$ соответствует $\mathrm{Aut}_{X_{13(\psi)}}$. Из A_{13} следует, что если $x^7 = x^9 = 0$, то $\tilde{\varphi}(t) = \varphi(t)$, а если $x^7 \neq 0$ или $x^9 \neq 0$, то всегда найдется функция $\psi(t)$, что $\tilde{\varphi}(t) = 0$.

Из стуктурного анализа коммутаторов из табл. 1 видно, что $L = L_{1-12} \oplus L_\varphi$, где $L_{1-12} = \{X_1, \ldots, X_{12}\}$ — конечномерная подалгебра, а $L_\varphi = \{X_{13}(\varphi)\}$ — бесконечномерная подалгебра. Выделяется и фиксируется последовательность вложенных подалгебр:

$$0 \subset L_{8,9} \subset L_{7-9} \subset L_{7-12} \subset L_{1-12} \subset L, \qquad (2.3)$$

где, например, $L_{7-12} = \{X_7, X_8, \ldots, X_{12}\}$. Последовательность (2.3) определяет порядок рассмотрения координат вектора x и действие на них внутренних автоморфизмов. Из формул табл. 2 видим, что компоненты $(x^8 x^9)$ вектора x под действием преобразований A_i всегда остаются тождественными. Поэтому сначала рассматривается подалгебра $L_{8,9}$ с возможными вариантами компонент $(x^8 x^9) : (00), (x^8 0), (0 x^9), (x^8 x^9)$, $x^8 \neq 0$, $x^9 \neq 0$. На подалгебре L_{7-12} рассматриваем вектор $(x^7, \ldots, x^{12})$ в зависимости от выбора вариантов для $(x^8 x^9)$ и действия преобразований группы автоморфизмов A. Результат второго шага переносится на конечномерную подалгебру L_{1-12} с вектором $(x^1, \ldots, x^{12})$ с учетом действия группы A. Полученные варианты $(x^1, \ldots, x^{12})$ окончательно рассматриваются на алгебре L с вектором $(x^1, \ldots, x^{12}, \varphi(t))$.

Заметим, что оператор общего вида определен с точностью до произвольного множителя. Поэтому кроме преобразований группы автоморфизмов (табл. 2) возможно преобразование общего растяжения вектора x. В результате получаем набор существенно различных векторов x, которые не могут быть переведены друг в друга преобразованиями группы A внутренних автоморфизмов. Этому набору координатных векторов x соответствует набор операторов, называемый оптимальной системой подалгебр Θ_1 для уравнений (1.1):

$$\varepsilon X_1 + X_6 + X_{13}(\varphi), \quad \varepsilon X_3 + \delta X_{12} + X_{13}(\varphi), \quad \nu X_6 + X_{12} + X_{13}(\varphi),$$

$$X_8+X_{13}(\varphi),\quad \varepsilon X_1+X_8+cX_{12}+X_{13}(\varphi),\quad \nu X_4+X_8+cX_{12}+X_{13}(\varphi),$$
$$\varepsilon_1X_6+X_7+\varepsilon_2X_{12},\quad \varepsilon X_1+\nu X_7+X_8+cX_{12},\quad \nu_1X_4+\nu_2X_7+X_8+cX_{12},$$
$$\nu X_7+X_8,\quad \varepsilon X_6+X_9,\quad \varepsilon_1X_1+\varepsilon_2X_6+X_9+cX_{12},\quad \nu X_3+X_8-X_9,\quad X_8+bX_9,$$
$$\nu X_3+X_8-X_9+cX_{12},\quad \varepsilon X_3+\nu X_4+X_8-X_9+cX_{12},\quad \varepsilon_1X_1+\varepsilon_2X_4+X_8+bX_9+cX_{12}, \tag{2.4}$$

где $\delta=\{0;1\}$; $\varepsilon,\varepsilon_1,\varepsilon_2=\{-1;0;1\}$; $\nu,\nu_1,\nu_2=\{-1;1\}$; $b,c,\in R$, $b\neq 0$, $c\neq 0$; $\varphi(t)$ — произвольная гладкая функция.

Заметим, что уравнения (1.1) при $g\neq 0$ допускают следующие дискретные преобразования своих переменных:

$$E_1:(t,u,v,w,\theta,q)\to(-t,-u,-v,-w,-\theta,-q);\quad E_2:(x,u)\to(-x,-u);$$
$$E_3:(y,v)\to(-y,-v);\quad E_4:(t,z,w)\to(t,-z-gt,-w-2gt),$$

хотя первое преобразование не имеет физического смысла.

Для системы (1.1) с $g=0$ преобразования E_1, E_2, E_3 допускаются в том же виде, а преобразование E_4 упрощается: $(z,w)\to(-z,-w)$.

Данным дискретным преобразованиям физических переменных соответствуют дискретные преобразования компонент вектора x:

$\tilde{E_1}:\tilde{x}=(x^1,x^2,x^3,-x^4,-x^5,-x^6,-x^7,x^8,x^9,x^{10},x^{11},x^{12},-\varphi(-t))$;
$\tilde{E_2}:\tilde{x}=(-x^1,x^2,x^3,-x^4,x^5,x^6,x^7,x^8,x^9,x^{10},-x^{11},-x^{12},\varphi(-t))$;
$\tilde{E_3}:\tilde{x}=(x^1,-x^2,x^3,x^4,-x^5,x^6,x^7,x^8,x^9,-x^{10},x^{11},-x^{12},\varphi(-t))$;
$\tilde{E_4}:\tilde{x}=(x^1,x^2,-x^3,x^4,x^5,-x^6,x^7,x^8,x^9,-x^{10},-x^{11},x^{12},\varphi(-t))$.

Если в оптимальной системе подалгебр (2.4) учесть преобразования $\tilde{E}_1$, $\tilde{E}_2$, $\tilde{E}_3$, $\tilde{E}_4$, то можно получить набор операторов вида (2.4), в котором постоянные ε, ε_1, ε_2 нужно положить равными $\{0;1\}$, а постоянные ν, ν_1, ν_2 — единице.

3. Построение отимальной системы подалгебр Θ_2

При построении оптимальной системы подалгебр второго порядка Θ_2 алгебры Ли операторов (1.3) рассматривается двумерная подалгебра общего положения

$$\langle X,Y\rangle=\langle\sum_{i=1}^{12}x^iX_i+X_{13}(\varphi(t)),\ \sum_{i=1}^{12}y^iX_i+X_{13}(\omega(t))\rangle,\quad \langle X,Y\rangle\in L^2 \tag{3.1}$$

с вектором коэффициентов $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x^1 & ... & x^{12} & \varphi(t)\\ y^1 & ... & y^{12} & \omega(t)\end{pmatrix}$.

Преобразования внутренних автоморфизмов, которые действуют в L^2 одновременно на коэффициенты операторов X и Y, определяют отображение

$$\langle X,Y\rangle\to\langle\tilde{X},\tilde{Y}\rangle=\langle\sum_{i=1}^{12}\tilde{x}^iX_i+X_{13}(\tilde{\varphi}),\ \sum_{i=1}^{12}\tilde{y}^iX_i+X_{13}(\tilde{\omega})\rangle,$$

т. е. производится преобразование векторов коэффициентов по правилу табл. 2:

$$\begin{pmatrix}x^1 & ... & x^{12} & \varphi\\ y^1 & ... & y^{12} & \omega\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}\tilde{x}^1 & ... & \tilde{x}^{12} & \tilde{\varphi}\\ \tilde{y}^1 & ... & \tilde{y}^{12} & \tilde{\omega}\end{pmatrix}.$$

Для операторов общего положения X, Y допускается умножение на произвольное число, не равное нулю. Поэтому имеют место преобразования растяжения

$$B_{xx}: \tilde{x}^i = \alpha x^i, \quad i = 1, ..., 12, \quad \tilde{\varphi} = \alpha\varphi, \quad \alpha = \text{const} \neq 0,$$

$$B_{yy}: \tilde{y}^j = \beta y^j, \quad j = 1, ..., 12, \quad \tilde{\omega} = \beta\omega, \quad \beta = \text{const} \neq 0. \qquad (3.2)$$

Заметим, что наборы операторов $\langle X, Y\rangle$, $\langle X, aX + Y\rangle$, $\langle bY + X, Y\rangle$, $a, b = \text{const}$ с точки зрения алгебры эквивалентны, так как имеют одни и те же коммутаторы. Поэтому для координат $(x^1, ..., x^{12}, \varphi)$, $(y^1, ..., y^{12}, \omega)$ используются дополнительные преобразования

$$B_{yx}: \tilde{x}^i = x^i + ay^i, \quad i = 1, ..., 12, \quad \tilde{\varphi} = \varphi + a\omega, \quad a = \text{const},$$

$$B_{xy}: \tilde{y}^j = y^j + bx^j, \quad j = 1, ..., 12, \quad \tilde{\omega} = \omega + b\varphi, \quad b = \text{const}. \qquad (3.3)$$

Для того чтобы исключить из рассмотрения повторение подалгебр, например, $\langle X^1, Y^1\rangle = \langle X^2, Y^2\rangle$, если $X^1 = Y^2$, $X^2 = Y^1$, будем применять преобразование подстановок (замену координат):

$$x \to y, \; y \to x. \qquad (3.4)$$

То, что операторы X, Y образуют подалгебру, означает, что операция коммутации не должна выводить за пределы подалгебры, т. е. $[X, Y] = \lambda X + \mu Y$, где λ, μ — некоторые постоянные. Реализуя это требование, получим соотношения, связывающие коэффицинты векторов x, y — условия подалгебры:

$$\begin{aligned}
&\lambda x^1 + \mu y^1 = x^1(y^8 + y^9) - y^1(x^8 + x^9) + x^2y^{12} - x^{12}y^2 - x^3y^{11} + x^{11}y^3 - x^4y^7 + x^7y^4,\\
&\lambda x^2 + \mu y^2 = x^2(y^8 + y^9) - y^2(x^8 + x^9) - x^1y^{12} + x^{12}y^1 + x^3y^{10} - x^{10}y^3 - x^5y^7 + x^7y^5,\\
&\lambda x^3 + \mu y^3 = x^3(y^8 + y^9) - y^3(x^8 + x^9) + x^1y^{11} - x^{11}y^1 - x^2y^{10} + x^{10}y^2 - x^6y^7 + x^7y^6,\\
&\lambda x^4 + \mu y^4 = x^4y^8 - x^8y^4 + x^5y^{12} - x^{12}y^5 - x^6y^{11} + x^{11}y^6,\\
&\lambda x^5 + \mu y^5 = -x^4y^{12} + x^{12}y^4 + x^5y^8 - x^8y^5 + x^6y^{10} - x^{10}y^6,\\
&\lambda x^6 + \mu y^6 = x^4y^{11} - x^{11}y^4 - x^5y^{10} + x^{10}y^5 + x^6y^8 - x^8y^6,\\
&\lambda x^7 + \mu y^7 = x^7y^9 - x^9y^7, \quad \lambda x^8 + \mu y^8 = 0, \quad \lambda x^9 + \mu y^9 = 0,\\
&\lambda x^{10} + \mu y^{10} = x^{11}y^{12} - x^{12}y^{11}, \; \lambda x^{11} + \mu y^{11} = -x^{10}y^{12} + x^{12}y^{10}, \; \lambda x^{12} + \mu y^{12} = x^{10}y^{11} - x^{11}y^{10},\\
&\lambda\varphi(t) + \mu\omega(t) = x^7\dot{\omega}(t) - \dot{\varphi}(t)y^7 + x^9(\omega(t) + t\dot{\omega}(t)) - (\varphi(t) + t\dot{\varphi}(t))y^9. \qquad (3.5)
\end{aligned}$$

Из структурного анализа коммутаторов из табл. 1 видим, что $L = L_{1-12} \oplus L_\varphi$, где $L_{1-12} = \{X_1, ..., X_{12}\}$ — конечномерная подалгебра, а $L_\varphi = \{X_{13}(\varphi)\}$ — бесконечномерная подалгебра. Выделяется и фиксируется последовательность вложенных двумерных подалгебр

$$0 \subset {L_{8,9}}^2 \subset {L_{7-9}}^2 \subset {L_{7-12}}^2 \subset {L_{1-12}}^2 \subset L^2,$$

которая определяет пять этапов последовательного рассмотрения координат вектора $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. На каждом из этих этапов производится упрощение координат вектора за счет преобразований внутренних автоморфизмов (см. табл. 2) и преобразований (3.2) – (3.4). Условия подалгебры (3.5) реализуются только на четвертом и пятом этапах.

Из формул табл. 2 видим, что компоненты $\begin{pmatrix} x^8 & x^9 \\ y^8 & y^9 \end{pmatrix}$ вектора $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ под действием преобразований A_i всегда остаются тождественными. Поэтому на первом этапе рассматривается подалгебра $L^2_{8,9}$, на которой с учетом (3.3), (3.4) выделяются возможные варианты координат:

$$\begin{pmatrix} x^8 & x^9 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x^8 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x^8 & 0 \\ 0 & y^9 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & x^9 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где x^8, x^9, $y^9 \neq 0$. Далее на L^2_{7-12} получаются следующие наборы координат, в которых используется результат первого этапа:

$$\begin{pmatrix} 0 & x^8 & x^9 \\ y^7 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & x^8 & 0 \\ y^7 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x^7 & x^8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x^7 & x^8 & 0 \\ 0 & 0 & y^9 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & x^9 \\ y^7 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x^7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Координаты со второго шага переносятся на подалгебру L^2_{7-12} с вектором $\begin{pmatrix} x^7 & ... & x^{12} \\ y^7 & ... & y^{12} \end{pmatrix}$. После упрощений, в которых используются условия подалгебры (3.5), результат переносится на L^2_{1-12}. На последнем этапе рассматриваем L^2 с вектором $\begin{pmatrix} x^1 & ... & x^{12} & \varphi \\ y^1 & ... & y^{12} & \omega \end{pmatrix}$. Здесь окончательно реализуются требования (3.5), растяжения (3.2) и неиспользованные преобразования табл. 2.

В результате получается оптимальная система подалгебр второго порядка Θ_2, приведенная в табл. 3.

Т а б л и ц а 3

Оптимальная система подалгебр Θ_2

	$X =$	$Y =$	Примечание
1	$\varepsilon_1 X_1 + \varepsilon_2 X_4 + aX_8 + X_9 + bX_{12}$	$y^1X_1 + y^2X_2 + y^4X_4 + y^5X_5 + X_{12} + X_{13}(\omega_0 t^{-1})$	$y^1 = \dfrac{\varepsilon_1 b}{(1+a)^2+b^2}$, $y^4 = \dfrac{\varepsilon_2 b}{1+b^2}$, $y^2 = \dfrac{-\varepsilon_1(1+a)}{(1+a)^2+b^2}$, $y^5 = \dfrac{-\varepsilon_2}{1+b^2}$, $(\varepsilon_1)^2 + (\varepsilon_2)^2 \neq 0$
2	$\varepsilon_1 X_1 + \varepsilon_2 X_4 + aX_8 + X_9 + bX_{12}$	$X_{13}(t^\alpha)$	
3	$\varepsilon_1 X_1 + \varepsilon_2 X_4 + aX_8 + X_9 + bX_{12}$	$X_3 + X_{13}(\omega_0 t^{-(a+2)})$	
4	$\varepsilon_1 X_1 + \varepsilon_2 X_4 + aX_8 + X_9 + bX_{12}$	$X_6 + X_{13}(\omega_0 t^{-(a+1)})$	
5	$\varepsilon_1 X_1 + \varepsilon_2 X_4 + aX_8 + X_9 + bX_{12}$	$y^1X_1 + y^2X_2 + X_7 + X_{13}(\omega_0 t^{-2})$	$y^1 = \dfrac{-\varepsilon_2 a}{a^2+b^2}$, $y^2 = \dfrac{-\varepsilon_2 b}{a^2+b^2}$
6	$\varepsilon_1 X_1 + \varepsilon_2 X_4 + X_8 + X_9 + bX_{12}$	$y^1X_1 + y^2X_2 + bX_6 + X_7 + X_{13}(\omega_0 t^{-2})$	$y^1 = \dfrac{-\varepsilon_2}{1+b^2}$, $y^2 = \dfrac{-\varepsilon_2 b}{1+b^2}$
7	$\varepsilon_1 X_3 + \varepsilon_2 X_4 - X_8 + X_9 + bX_{12}$	$cX_3 + y^4X_4 + y^5X_5 + X_{12} + X_{13}(\omega_0 t^{-1})$	$y^4 = \dfrac{\varepsilon_2 b}{1+b^2}$, $y^5 = \dfrac{\varepsilon_2}{1+b^2}$
8	$\varepsilon_1 X_4 - X_8 + X_9 + bX_{12}$	$X_3 + X_{13}(\varepsilon_2 t^{-1})$	
9	$\varepsilon_1 X_3 + \varepsilon_2 X_4 - X_8 + X_9 + bX_{12}$	$X_{13}(t^{-\alpha})$	
10	$\varepsilon_1 X_3 + \varepsilon_2 X_4 - X_8 + X_9 + bX_{12}$	$X_6 + X_{13}(\omega_0)$	
11	$\varepsilon_1 X_3 + \varepsilon_2 X_4 - X_8 + X_9 + bX_{12}$	$y^1X_1 + y^2X_2 + X_7 + X_{13}(\omega_0 t^{-2})$	$y^1 = \dfrac{\varepsilon_2}{1+b^2}$, $y^2 = \dfrac{-\varepsilon_2 b}{1+b^2}$
12	$aX_8 + X_9$	$X_{12} + X_{13}(\omega_0 t^{-1})$	
13	$cX_8 + X_9$	$X_3 + X_{13}(\varepsilon t^{-(c+2)})$	
14	$cX_8 + X_9$	$X_6 + X_{13}(\varepsilon t^{-(c+1)})$	
15	$cX_8 + X_9$	$\delta X_7 + X_{13}(\omega_0 t^{-2})$	
16	$X_8 + X_9$	$\nu X_6 + X_7 + X_{13}(\omega_0 t^{-2})$	
17	$\nu X_3 - X_8 + X_9$	$kX_1 + mX_3 + X_{13}(\varepsilon t^{-1})$	$k^2 + m^2 \neq 0$
18	$\nu X_3 - X_8 + X_9$	$kX_4 + \delta X_6 + X_{13}(\varepsilon t^{-1})$	$k^2 + \delta^2 \neq 0$
19	$\nu X_3 - X_8 + X_9$	$\delta X_7 + X_{13}(\omega_0 t^{-2})$	$\omega_0 = 1$, если $\delta = 0$
20	$X_8 + X_{13}(\varphi_0)$	$X_7 + \varepsilon X_{12}$	
21	$\nu X_4 + X_8 + bX_{12} + X_{13}(\varphi_0)$	$y^1X_1 + y^2X_2 + y^4X_4 + y^5X_5 + X_7 + \varepsilon X_{12}$	$y^1 = \dfrac{-\nu}{1+b^2}$, $y^2 = \dfrac{-\nu b}{1+b^2}$, $y^4 = \dfrac{\nu\varepsilon b}{1+b^2}$, $y^5 = \dfrac{-\nu\varepsilon}{1+b^2}$
22	$\varepsilon_1 X_1 + X_8 + bX_{12} + X_{13}(\varphi_0)$	$y^1X_1 + y^2X_2 + X_7 + \varepsilon_2 X_{12}$	$y^1 = \dfrac{\varepsilon_1\varepsilon_2 b}{1+b^2}$, $y^2 = \dfrac{-\varepsilon_1\varepsilon_2}{1+b^2}$

Т а б л и ц а 3 (окончание)

	$X=$	$Y=$	Примечание
23	$\nu_1X_4+\nu_2X_7+X_8+bX_{12}$	$y^1X_1+y^2X_2+y^4X_4+y^5X_5+X_{12}+X_{13}(\omega_0)$	$y^1=\dfrac{2b\nu_1\nu_2}{(1+b^2)^2},\quad y^4=\dfrac{\nu_1 b}{1+b^2},$ $y^2=\dfrac{\nu_1\nu_2(b^2-1)}{(1+b^2)^2},\quad y^5=\dfrac{-\nu_1 b}{1+b^2}$
24	$\nu_1X_4+\nu_2X_7+X_8+bX_{12}$	$X_3+X_{13}(\omega_0\mathrm{e}^{-\nu_2 t})$	
25	$\nu_1X_4+\nu_2X_7+X_8+bX_{12}$	$X_{13}(\mathrm{e}^{\alpha t})$	
26	$\nu_1X_1+\nu_2X_7+X_8+bX_{12}$	$y^1X_1+y^2X_2+X_{12}+X_{13}(\omega_0)$	$y^1=\dfrac{\nu b}{1+b^2},\quad y^2=\dfrac{-\nu}{1+b^2}$
27	$\nu X_1+X_8+bX_{12}+X_{13}(\varphi(t))$	$y^1X_1+y^2X_2+X_{12}+X_{13}(\omega(t))$	$y^1=\dfrac{\nu b}{1+b^2},\quad y^2=\dfrac{-\nu}{1+b^2}$
28	$\epsilon X_1+X_8+bX_{12}+X_{13}(\varphi_0 t^{-1})$	$y^1X_1+y^2X_2+X_9+mX_{12}$	$y^1=\dfrac{\varepsilon(1+bm)}{1+b^2},\quad y^2=\dfrac{\varepsilon(b-m)}{1+b^2}$
29	$\nu X_4+X_8+bX_{12}+X_{13}(\varphi(t))$	$y^4X_4+y^5X_5+X_{12}+X_{13}(\omega(t))$	$y^4=\dfrac{\nu b}{1+b^2},\quad y^5=\dfrac{-\nu}{1+b^2}$
30	$\nu X_4+X_8+bX_{12}+X_{13}(\varphi(t))$	εX_3+X_6	
31	$\nu X_4+X_8+bX_{12}+X_{13}(\varphi(t))$	X_3	
32	$\nu X_4+X_8+bX_{12}+X_{13}(\varphi(t))$	$X_{13}(\omega(t))$	
33	$\nu X_4+X_8+bX_{12}+X_{13}(\varphi_0 t^{-1})$	$y^4X_4+y^5X_5+X_9+mX_{12}$	$y^4=\dfrac{\nu bm}{1+b^2},\quad y^5=\dfrac{-\nu b}{1+b^2}$
34	$\varepsilon X_1+X_8+bX_{12}+X_{13}(\varphi(t))$	X_6	
35	$\varepsilon X_1+X_8+bX_{12}+X_{13}(\varphi(t))$	X_3	
36	$\varepsilon X_1+X_8+bX_{12}+X_{13}(\varphi(t))$	$X_{13}(\omega(t))$	
37	$\varepsilon X_1+\nu X_7+X_8+bX_{12}$	$X_3+X_{13}(\omega_0\mathrm{e}^{-\nu t})$	
38	$\varepsilon X_1+\nu X_7+X_8+bX_{12}$	$X_{13}(\mathrm{e}^{\alpha t})$	
39	νX_7+X_8	$X_{12}+X_{13}(\omega_0)$	
40	νX_7+X_8	$X_3+X_{13}(\omega_0\mathrm{e}^{-\nu t})$	
41	νX_7+X_8	$X_{13}(\mathrm{e}^{\alpha t})$	
42	νX_7+X_8	$X_9+mX_{12}+X_{13}(\varepsilon)$	
43	$X_8+X_{13}(\varphi(t))$	$X_{12}+X_{13}(\omega(t))$	
44	$X_8+X_{13}(\varphi(t))$	εX_1+X_6	
45	$X_8+X_{13}(\varphi(t))$	X_3	
46	$X_8+X_{13}(\varphi(t))$	$X_{13}(\omega(t))$	
47	$X_8+X_{13}(\varphi_0(t^{-1})$	X_9+mX_{12}	
48	$\varepsilon_1X_1+X_9+bX_{12}$	$X_6+X_{13}(\varepsilon_2 t^{-1})$	
49	$\varepsilon_1X_1+X_9+bX_{12}$	$mX_3+X_7+X_{13}(\omega_0 t^{-2})$	
50	$\nu X_1+\varepsilon X_6+X_9+bX_{12}$	$y^1X_1+y^2X_2+mX_6+X_{12}+X_{13}(\omega_0 t^{-1})$	$y^1=\dfrac{\nu b}{1+b^2},\quad y^2=\dfrac{-\nu}{1+b^2}$
51	$\varepsilon_1X_1+\varepsilon_2X_6+X_9+bX_{12}$	$X_3+X_{13}(\omega_0 t^{-2})$	
52	$\varepsilon_1X_1+\varepsilon_2X_6+X_9+bX_{12}$	$X_{13}(t^{\alpha})$	
53	εX_6+X_9	$mX_6+X_{12}+X_{13}(\omega_0 t^{-1})$	
54	X_9	$X_7+X_{13}(\varepsilon t^{-2})$	
55	$\varepsilon X_6+X_7+\nu X_{12}$	$X_3+X_{13}(\omega_0)$	
56	$\varepsilon X_6+X_7+\nu X_{12}$	$X_{13}(\mathrm{e}^{\alpha t})$	
57	$\varepsilon_1X_6+X_7$	$\varepsilon_2X_3+X_{12}+X_{13}(\omega_0)$	
58	$\varepsilon_1X_6+X_7$	$X_{13}(\mathrm{e}^{\alpha}t)$	
59	νX_6+X_7	$mX_1+\delta X_3+X_{13}(\omega_0)$	
60	X_7	$X_3+X_{13}(\varepsilon)$	
61	$\nu X_6+X_{12}+X_{13}(\varphi(t))$	$X_3+\varepsilon X_6+X_{12}+X_{13}(\omega(t))$	
62	$\nu X_6+X_{12}+X_{13}(\varphi(t))$	$X_{13}(\omega(t))$	
63	$\varepsilon X_3+X_{12}+X_{13}(\varphi(t))$	$X_6+X_{13}(\omega(t))$	
64	$\varepsilon X_3+X_{12}+X_{13}(\varphi(t))$	$X_{13}(\omega(t))$	
65	$X_{12}+X_{13}(\varphi(t))$	$X_3+X_{13}(\omega(t))$	
66	$\nu X_1+X_6+X_{13}(\varphi(t))$	$kX_1+mX_3+nX_4+X_5+X_{13}(\omega(t))$	
67	$\nu X_1+X_6+X_{13}(\varphi(t))$	$kX_2+mX_3+X_4+X_{13}(\omega(t))$	
68	$\nu X_1+X_6+X_{13}(\varphi(t))$	$kX_1+mX_2+X_3+X_{13}(\omega(t))$	
69	$\nu X_1+X_6+X_{13}(\varphi(t))$	$kX_1+X_2+X_{13}(\omega(t))$	
70	$\nu X_1+X_6+X_{13}(\varphi(t))$	$\delta X_1+X_{13}(\omega(t))$	
71	$X_6+X_{13}(\varphi(t))$	$kX_2+\nu X_3+X_4+X_{13}(\omega(t))$	
72	$X_6+X_{13}(\varphi(t))$	$\varepsilon X_2+X_4+X_{13}(\omega(t))$	
73	$X_6+X_{13}(\varphi(t))$	$kX_1+X_3+X_{13}(\omega(t))$	
74	$X_6+X_{13}(\varphi(t))$	$\delta X_1+X_{13}(\omega(t))$	
75	$X_3+X_{13}(\varphi(t))$	$\delta X_1+X_{13}(\omega(t))$	
76	$X_{13}(\varphi(t))$	$X_{13}(\omega(t))$	

Примечание. $a, b, c, k, m, n, \alpha, \omega_0, \varphi_0$ — постоянные, $a \neq \{0;-1\}$, $b \neq 0$, $c \neq 0$; $\varepsilon, \varepsilon_1, \varepsilon_2 = \{0;\pm 1\}$; ν, ν_1, $\nu_2 = \{\pm 1\}$; $\delta = \{0;1\}$; $\varphi(t)$, $\omega(t)$ — произвольные гладкие функции.

4. Построение фактор-систем и решений

Используя операторы оптимальных систем подалгебр Θ_1, Θ_2, построим несколько примеров фактор-систем в инвариантных переменных [6].

Пример 1. Рассмотрим операторы $\langle X_9,\ X_6 + X_{13}(c_0 t^{-1})\rangle = \langle t\partial_t + x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z + \theta\partial_\theta - q\partial_q,\ t\partial_z + \partial_w + c_0 t^{-1}\partial_q\rangle$, где $c_0 = \mathrm{const}$. Инвариантами этих операторов являются переменные $\{xt^{-1}, yt^{-1}, u, v, w - zt^{-1}, \theta t^{-1}, qt - c_0 zt^{-1}\}$. Решение системы (1.1) ищем в виде

$$(u, v, w, q, \theta) = (U, V, W + zt^{-1}, t^{-1}Q + c_0 zt^{-2}, tT),$$

где U, V, W, Q, T зависят от $\xi = xt^{-1}, \eta = yt^{-1}$. Фактор-система запишется так:

$$(U-\xi)U_\xi + (V-\eta)U_\eta + (U_\eta - V_\xi)T_\eta + T_\xi T_{\eta\eta} - T_\eta T_{\xi\eta} = T(-Q_\xi + \nu(U_{\xi\xi} + U_{\eta\eta})),$$

$$(U-\xi)V_\xi + (V-\eta)V_\eta + (V_\xi - U_\eta)T_\xi + T_\eta T_{\xi\xi} - T_\xi T_{\xi\eta} = T(-Q_\eta + \nu(V_{\xi\xi} + V_{\eta\eta})),$$

$$W + (U-\xi)W_\xi + (V-\eta)W_\eta + W_\xi T_\xi + W_\eta T_\eta = T(-c_0 + \nu(W_{\xi\xi} + W_{\eta\eta})),$$

$$T + (U-\xi)T_\xi + (V-\eta)T_\eta + {T_\xi}^2 + {T_\eta}^2 = T(T_{\xi\xi} + T_{\eta\eta}), \quad U_\xi + V_\eta + 1 = 0. \tag{4.1}$$

Предположим, что функции U, V, W, Q, T не зависят от η. Тогда из последнего уравнения системы (4.1) получаем $U = C_1 - \xi$, $C_1 = \mathrm{const}$. Обозначим $2\xi - C_1 = h$. Остальные уравнения будут иметь вид

$$2TQ_h = -h, \quad -2hV_h + 4V_h T_h = 4\nu T V_{hh},$$

$$W - 2hW_h + 4W_h T_h = T(-c_0 + 4\nu W_{hh}), \quad T - 2hT_h + 4(T_h)^2 = 4TT_{hh}. \tag{4.2}$$

Если решение третьего уравнения системы (4.2) искать в виде $T = ah^2 + bh + d$, то получим

$$T = \frac{3}{8}h^2, \quad Q = C_2 - \frac{4}{3}\ln|h|, \quad V = C_3 h^{(2/3\nu)+1} + C_4.$$

Функция W удовлетворяет уравнению Эйлера

$$\frac{3}{2}\nu h^2 W_{hh} - hW_h - W = \frac{3}{8}c_0 h^2$$

и имеет представление

$$W = \left(C_5 + \frac{3c_0}{28}\ln|h|\right)h^2 + C_6 h^{-1/3} \quad \text{при} \quad \nu = 1,$$

$$W = C_5 h^{\lambda_1} + C_6 h^{\lambda_2} + \frac{c_0}{8(\nu-1)}h^2 \quad \text{при} \quad \nu \neq 1, \quad \lambda_{1,2} = \frac{(3\nu+2) \pm \sqrt{(3\nu+2)^2 + 24\nu}}{6\nu}.$$

Здесь C_i, $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ — произвольные постоянные.

Пример 2. Рассмотрим комбинацию операторов $\langle \alpha X_7 + X_8,\ X_3 + X_{13}(c\mathrm{e}^{-\alpha t})\rangle = \langle \alpha\partial_t + x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z + u\partial_u + v\partial_v + w\partial_w + 2\theta\partial_\theta,\ \partial_z + c\mathrm{e}^{-\alpha t}\partial_q\rangle$, $\alpha \neq 0, c = \mathrm{const}$. Инвариантами этих операторов являются переменные $\{(x, y, u, v, w)\mathrm{e}^{-\alpha t}, \theta\mathrm{e}^{-2\alpha t}, q - cz\mathrm{e}^{-\alpha t}\}$. Решение системы (1.1) ищем в виде

$$(u, v, w, q, \theta) = (U\mathrm{e}^{\alpha t}, V\mathrm{e}^{\alpha t}, W\mathrm{e}^{\alpha t}, Q + cz\mathrm{e}^{-\alpha t}, T\mathrm{e}^{2\alpha t}),$$

где U, V, W, Q, T зависят от $\xi = x\mathrm{e}^{-\alpha t}, \eta = y\mathrm{e}^{-\alpha t}$. Фактор-система запишется так:

$$\alpha U + (U - \alpha\xi)U_\xi + (V - \alpha\eta)U_\eta + (U_\eta - V_\xi)T_\eta + T_\xi T_{\eta\eta} - T_\eta T_{\xi\eta} = T(-Q_\xi + \nu(U_{\xi\xi} + U_{\eta\eta})),$$
$$\alpha V + (U - \alpha\xi)V_\xi + (V - \alpha\eta)V_\eta + (V_\xi - U_\eta)T_\xi + T_\eta T_{\xi\xi} - T_\xi T_{\xi\eta} = T(-Q_\eta + \nu(V_{\xi\xi} + V_{\eta\eta})),$$
$$\alpha W + (U - \alpha\xi)W_\xi + (V - \alpha\eta)W_\eta + W_\xi T_\xi + W_\eta T_\eta = T(-c + \nu(W_{\xi\xi} + W_{\eta\eta})),$$
$$\alpha T + (U - \alpha\xi)T_\xi + (V - \alpha\eta)T_\eta + {T_\xi}^2 + {T_\eta}^2 = T(T_{\xi\xi} + T_{\eta\eta}), \quad U_\xi + V_\eta = 0. \tag{4.3}$$

Так же, как в примере 1, предположим, что функции U, V, W, Q, T не зависят от η. Тогда из последнего уравнения системы (4.3) получаем $U = U_0 = \mathrm{const}$. Введем замену $\alpha\xi - U_0 = h$, тогда остальные уравнения перепишутся так:

$$TQ_h = -U_0, \quad V - hV_h + \alpha V_h T_h = \nu\alpha T V_{hh}, \tag{4.4}$$
$$-hW_h + \alpha W_h T_h = T\left(-\frac{c}{\alpha} + \nu\alpha W_{hh}\right), \quad T - hT_h + \alpha {T_h}^2 = \alpha T T_{hh}.$$

Решение последнего уравнения системы (4.4) будем искать в виде $T = ah^2 + bh + d$ (a, b, d — произвольные постоянные). Получаем три варианта решений:

$$T = 0, \quad T = bh - \alpha b^2, \quad T = \frac{1}{2\alpha}h^2 + c.$$

Первый случай приводит к простому решению системы (1.1):

$$u = 0, \quad v = V_0 x, \quad w = W_0 x, \quad q = Q(x\mathrm{e}^{-\alpha t}) + cz\mathrm{e}^{-\alpha t}, \quad \theta = 0,$$

где V_0, W_0 — произвольные постоянные; $Q(\xi)$ — произвольная функция.

Во втором случае ($b \neq 0$) имеем

$$Q = -\frac{U_0}{b}\ln|bh - \alpha b^2| + Q_0, \quad V = C_1\lambda - C_0\left[\mathrm{e}^{-\frac{\lambda}{\nu\alpha b}} - \frac{\lambda}{\nu\alpha b}\int \frac{1}{\lambda}\mathrm{e}^{-\frac{\lambda}{\nu\alpha b}}d\lambda\right],$$

в третьем случае —

$$Q(h) = \frac{1}{\sqrt{2c\alpha}}\operatorname{arctg}\frac{h}{\sqrt{2c\alpha}}, \quad \text{если} \quad 2\alpha > 0,$$
$$Q(h) = -\frac{1}{2\sqrt{-2c\alpha}}\ln\left|\frac{\sqrt{-2c\alpha} - h}{\sqrt{-2c\alpha} - h}\right|, \quad \text{если} \quad 2\alpha < 0,$$
$$Q(h) = \frac{2\alpha U_0}{h}, \quad \text{если} \quad c = 0.$$

Для функции $V(h)$, $W(h)$ получаются обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка.

Пример 3. Рассмотрим подалгебру операторов $\langle \alpha X_3 + X_7,\ X_1,\ X_2\rangle = \langle \alpha\partial_z + \partial_t,\ \partial_x,\ \partial_y\rangle$, $\alpha = \mathrm{const}$. Инвариантами этих операторов являются переменные $\{z - \alpha t, u, v, w, q, \theta\}$. Поэтому считаем, что функции u, v, w, q, θ зависят от одной переменной $\zeta = z - \alpha t$. После подстановки система (1.1) преобразуется в фактор-систему

$$(-\alpha + w + \theta')u' = \nu\theta u'', \quad (-\alpha + w + \theta')v' = \nu\theta v'',$$
$$(-\alpha + w)w' = \theta(-q' + \nu w''), \quad w' = 0, \quad (-\alpha + w + \theta')\theta' = \theta\theta'' \tag{4.5}$$

(штрих означает дифференцирование по переменной ζ).

Система уравнений (4.5) интегрируется и имеет два варианта решений:

$$u = U_0 + U_1\zeta, \quad v = V_0 + V_1\zeta, w = W_0, \quad q = Q_0, \quad \theta = -(W_0 - \alpha)\zeta + T_1; \tag{4.6}$$

$$u = U_0 + U_1 \mathrm{e}^{T_0\zeta/\nu}, \quad v = V_0 + V_1 \mathrm{e}^{T_0\zeta/\nu}, \quad w = W_0, \quad q = Q_0, \quad \theta = \frac{W_0 - \alpha}{T_0} + T_1 \mathrm{e}^{T_0\zeta}. \tag{4.7}$$

Здесь U_0, U_1, V_0, V_1, W_0, Q_0, T_0, T_1 — произвольные постоянные, $T_0 \neq 0$.

Возвращаясь к естественным физическим переменным $\mathbf{v}$, p, T (скорости, давлению, температуре) при обратной замене в формулах (1.2), (1.3), получим решения:

для (4.6)

$$v_1 = U_0 + U_1\zeta, \quad v_2 = V_0 + V_1\zeta, \quad v_3 = \alpha - gt, \quad p = \rho_0\chi Q_0, \quad T = \frac{-(W_0 - \alpha)\zeta + T_1 - \chi}{\chi\beta};$$

для (4.7)

$$v_1 = U_0 + U_1 \mathrm{e}^{\chi T_0\zeta/\nu}, \quad v_2 = V_0 + V_1 \mathrm{e}^{\chi T_0\zeta/\nu}, \quad v_3 = W_0 - gt + T_1 T_0 \mathrm{e}^{T_0\zeta},$$

$$p = \rho_0\chi Q_0 + (\rho_0(\nu - \chi) + \lambda) T_1 {T_0}^2 \mathrm{e}^{T_0\zeta}, \quad T = \frac{1}{\chi\beta T_0}(-\chi T_0 + W_0 - \alpha + T_1 T_0 \mathrm{e}^{T_0\zeta}).$$

Здесь $T_0 \neq 0$, $\zeta = z - \alpha t + \dfrac{gt^2}{2}$.

Аналогичные решения можно построить на подалгебрах $\langle \beta X_1 + X_7,\ X_2,\ X_3 \rangle$, $\langle \gamma X_2 + X_7,\ X_1,\ X_3 \rangle$.

Пример 4. Будем строить решение на операторах $\langle X_2; X_5; X_7; X_3 + X_{13}(\psi_0) \rangle$, $\psi_0 = \mathrm{const}$. Инвариантами этих операторов являются переменные $\{x, u, v, w, \theta, q - \psi_0 z\}$. Поэтому частично-инвариантное решение ранга 1 и дефекта 1 ищем в виде

$$u = U(x), \quad v = v(t, x, y, z), \quad w = W(x), \quad \theta = \theta(x), \quad q = \psi_0 z + Q(x).$$

Система (1.1) преобразуется в систему

$$UU_x = \theta(-Q_x + \nu U_{xx}) = 0, \quad v_t + Uv_x + vv_y + Wv_z + \chi v_x\theta_x = \nu\theta(v_{xx} + v_{yy} + v_{zz}),$$

$$UW_x + \chi W_x\theta_x = \theta(-\psi_0 + \nu W_{xx}) - g, \quad U\theta_x + \chi\theta_x^2 = \chi\theta\theta_{xx}, \quad U_x = 0, \tag{4.8}$$

из которой следует, что $U \equiv U_0 = \mathrm{const}$, $Q \equiv Q_0 = \mathrm{const}$.

Система (4.8) расщепляется относительно функций θ, W, v и имеет два решения

$$\theta_1(x) = \frac{1}{C_1} + C_2 \exp\left(\frac{C_1 U_0 x}{\chi}\right), \quad \theta_2(x) = \theta_0 - \frac{U_0 x}{\chi},$$

где C_1, C_2, $\theta_0 = \mathrm{const}$, $C_1 \neq 0$.

Функция $v = \mathrm{const} = 0$ (плоское движение) является решением системы (4.8). Этот случай подробно рассмотрен В. К. Андреевым и В. В. Бекежановой в работе [8]. Ими исследовано течение жидкости в полосе $-a \leq x \leq a$ с заданным тепловым потоком на границе $\dfrac{\partial\theta}{\partial n} = \delta(\theta - \theta_{\text{вн}}) = d$, где $\theta_{\text{вн}}$ — внешняя (на границе) температура жидкости.

Рассмотрим функцию $\theta_2(x)$, тогда, интегрируя, получим третье уравнение в (4.8):

$$W(x) = \frac{1}{\nu}\left\{\psi_0\frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2 + \frac{g\chi^2}{U_0^2}\left(\theta_0 - \frac{U_0 x}{\chi}\right)\left[\ln|\theta_0 - \frac{U_0 x}{\chi}| - 1\right]\right\}.$$

Отметим, что полученное решение существенно отличается от известного решения стационарной задачи в приближении Обербека — Буссинеска

$$W(x) = -\frac{gU_0}{6\nu\chi}x(a^2 - x^2).$$

Пример 5. На операторах $\langle \alpha X_1 + X_7; X_2; X_3\rangle, \alpha = \text{const}$ инвариантное решение ищем в виде

$$u = u(\xi), \quad v = v(\xi), \quad w = w(\xi), \quad q = q(\xi), \quad \theta = \theta(\xi), \quad \xi = x - \alpha t.$$

Система (1.1) перепишется в виде фактор-системы:

$$u_\xi = 0, \quad (u-\alpha)u_\xi = \theta(-q_\xi + \nu u_{\xi\xi}), \quad (u-\alpha)v_\xi + \chi v_\xi = \nu\theta v_{\xi\xi},$$

$$(u-\alpha)w_\xi + \chi w_\xi \theta_\xi = \nu\theta w_{\xi\xi} - g, \quad (u-\alpha)\theta_\xi + \chi\theta_\xi^2 = \chi\theta\theta_{\xi\xi}.$$

Следовательно, $u \equiv u_0 = \text{const}$, $q \equiv q_0 = \text{const}$. Положим $u_0 - \alpha = a_0$. Тогда

$$a_0 v_\xi + \chi v_\xi \theta_\xi = \nu\theta v_{\xi\xi}, \quad a_0 w_\xi + \chi w_\xi \theta_\xi = \nu\theta w_{\xi\xi} - g, \quad a_0\theta_\xi + \chi\theta_\xi^2 = \chi\theta\theta_{\xi\xi}. \tag{4.9}$$

Структура уравнений (4.9) аналогична уравнениям системы (4.8), уравнение на функцию $\theta(\xi)$ "отщепляется". Поэтому

$$\theta_1(\xi) = \frac{1}{C_1} + C_2 \exp\left(\frac{C_1 a_0 \xi}{\chi}\right), \quad \theta_2(\xi) = \theta_0 - \frac{a_0\xi}{\chi},$$

где C_1, C_2, $\theta_0 = \text{const}$; $C_1 \neq 0$. Для решения $\theta_2(\xi)$ легко получаем

$$v_2(\xi) = B_1\xi + B_2, \quad B_1, B_2 = \text{const},$$

$$w_2(\xi) = \frac{1}{\nu}\left\{\varepsilon_1\xi + \varepsilon_2 + \frac{g\chi^2}{a_0^2}\left(\theta_0 - \frac{a_0\xi}{\chi}\right)\left(\ln|\theta_0 - \frac{a_0\xi}{\chi}| - 1\right)\right\}.$$

Список литературы

[1] Пухначев В. В. Модель конвективного течения при пониженной гравитации // Моделирование в механике. 1992. Т. 6(23), №4. С. 47–56.

[2] Андреев В. К., Капцов О. В., Пухначев В. В., Родионов А. А. Применение теоретико-групповых методов в гидродинамике. Новосибирск: Наука, 1994. 320 с.

[3] Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 400 с.

[4] Родионов А. А. Групповой анализ уравнений микроконвекции и одного неклассического уравнения // Математическое моделирование в механике: Тр. сем. ИВМ СО РАН, Красноярск, 1999. С. 169–180. Деп. в ВИНИТИ 05.07.1999, №1999–В99.

[5] Ovsiannikov L. V. On the Optimal Systems of Subalgebras // J. Lie Grroups and Their Applications. 1994. Vol. 1, No. 2. Celal Bayar Univ. P. 18–26.

[6] Родионов А. А. Некоторые точные решения уравнений микроконвекции // Симметрия и дифференциальные уравнения: Тр. Междунар. конф. Красноярск, 2000. С. 186–189.

[7] Родионов А. А. Оптимальная система подалгебр второго порядка уравнений микроконвекции // Математическое моделирование в механике: Тр. сем. ИВМ СО РАН, Красноярск, 2000. С. 120–130. Деп. в ВИНИТИ 06.06.00, №1625–1300.

[8] Андреев В. К., Бекежанова В. Б. Об одном инвариантном решении уравнений микроконвекции // Математическое моделирование в механике: Тр. сем. ИВМ СО РАН, Красноярск, 1999. С. 34–47. Деп. в ВИНИТИ 05.07.1999, №1999-В99.

Поступила в редакцию 7 февраля 2001 г.