Вычислительные технологии **Том 6, № 3, 2001**

ПОГРЕШНОСТИ ОЦЕНИВАНИЯ ПАРАМЕТРОВ ПРИЛИВНОГО ОТКЛИКА В ИМПУЛЬСНОМ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ИЗЛУЧЕНИИ ЗЕМЛИ

Г. М. Водинчар
Камчатский государственный педагогический университет
Петропавловск-Камчатский, Россия

The algorithm of the interval assessment of the harmonic component parameters with known frequencies in a noise-affected signal is described. The theoretical justification is based on the fact, that the noise component of a signal is of Poisson character. The result of the implementation of algorithm to assessing the tide's response phase in the intensiveness of electromagnetic pulsed terrestrial emission is described. It has been concluded that this method is efficient on assessing errors of pointwise estimates of the tide response phase.

В работе [1] выполнено выделение гармонических компонент, модулированных приливными волнами, из сигнала, характеризующего импульсное электромагнитное излучение Земли (ЭМИ), которое оценивается интенсивностью — числом превышающих шумовой порог импульсов в минуту. Проведено точечное оценивание фаз гармонических компонент, вопрос о погрешностях полученных значений остается открытым.

В настоящей работе предложен алгоритм интервального оценивания, позволяющий определить погрешности, допускаемые при точечном оценивании. При оценке применяется прямоугольное временное окно. В [1] для выделения различных приливных волн используются временные окна разной длительности. Выделяются только одна волна и ее высшие гармоники, остальные рассматриваются как шум. Алгоритм, предлагаемый в настоящей работе, одновременно учитывает разные приливные волны.

Предполагается, что заполняющая окно вырезка $x(n)$ является суммой детерминированного полигармонического сигнала $\sum\limits_{i=1}^{p} A_i \cos\omega_i n + B_i \sin\omega_i n$ и случайной последовательности $s(n)$. Полигармоническая составляющая образована гармониками приливного отклика. Поэтому частотами ω_i являются частоты гармоник из спектра приливного потенциала [2], выделяющихся на шумовом фоне. В интенсивности ЭМИ такими являются группы суточных и полусуточных волн [1].

Превышение электромагнитным излучением Земли шумового порога образует пуассоновский поток событий (пуассоновский процесс), значит, число регистрируемых в минуту импульсов распределено по закону Пуассона [3]. Типичными средними значениями являются от 1 до 40 импульсов в минуту. Малое среднее число импульсов не позволяет заменить пуассоновский закон его гауссовским приближением. После выделения гармонических составляющих среднее значение шума в пределах окна постоянно. Следовательно, элементы последовательности $s(n)$ являются независимыми случайными величинами, распределенными по закону Пуассона с одинаковым средним значением λ. Требуется по наблюдаемым значениям $x(n)$ и известным ω_i построить доверительные интервалы для параметров A_i и B_i. Подобная задача рассматривается в [4] в предположении нормального распределения шума. Последнее обстоятельство не позволяет непосредственно применять результаты [4] для анализа данных типа полученных в [1].

Обоснование методики. Сначала аналогично тому, как это сделано в [4], получим точечные оценки параметров A_i и B_i методом наименьших квадратов, и на основе этих оценок построим доверительные интервалы для параметров.

Положим, что целочисленное время n меняется от $-N$ до N. Обозначим $\alpha_i(n) = \cos\omega_i n - \dfrac{\sin(N+0.5)\omega_i}{(2N+1)\sin 0.5\omega_i}$ и $\beta_i(n) = \sin\omega_i n$. Тогда $x(n) = A_0 + \sum\limits_{i=1}^{p}(A_i\alpha_i(n) + B_i\beta_i(n)) + s(n)$, где $A_0 = \dfrac{1}{2N+1}\sum\limits_{i=1}^{p} A_i \dfrac{\sin(N+0.5)\omega_i}{\sin 0.5\omega_i}$. Непосредственным вычислением можно установить, что $\sum\limits_{n=-N}^{N}\alpha_i(n) = \sum\limits_{n=-N}^{N}\beta_i(n) = \sum\limits_{n=-N}^{N}\alpha_i(n)\beta_i(n) = 0$. Суммы вида $\sum\limits_{n=-N}^{N}\alpha_i(n)\beta_j(n)$ можно рассматривать как скалярные произведения $(2N+1)$-мерных векторов, поэтому будем обозначать их (α_i, β_j). Оптимальные в смысле метода наименьших квадратов оценки A_i^* и B_i^* параметров A_i и B_i соответственно являются решениями двух независимых линейных систем:

$$\sum_{j=1}^{p}(\alpha_i, \alpha_j)A_j^* = (\alpha_i, x), \quad i = 1, 2, \ldots, p, \tag{1}$$

$$\sum_{j=1}^{p}(\beta_i, \beta_j)B_j^* = (\beta_i, x), \quad i = 1, 2, \ldots, p. \tag{2}$$

Введем в рассмотрение $p \times p$ матрицы $D^A = \|(\alpha_i, \alpha_j)\|$ и $D^B = \|(\beta_i, \beta_j)\|$. Тогда $A_i^* = \sum\limits_{j=1}^{p}\hat{d}_{ij}^A(\alpha_j, x)$ и $B_i^* = \sum\limits_{j=1}^{p}\hat{d}_{ij}^B(\beta_j, x)$, где через $\hat{d}_{ij}^A$ и $\hat{d}_{ij}^B$ обозначены соответственно элементы матриц, обратных матрицам D^A и D^B. Для получения интервальных оценок A_i и B_i рассмотрим случайные величины $A_i - A_i^*$ и $B_i - B_i^*$. Умножив почленно равенство $x(n) = A_0 + \sum\limits_{j=1}^{p}(A_j\alpha_j(n) + B_j\beta_j(n)) + s(n)$ на $\alpha_i(n)$ и просуммировав по n от $-N$ до N, получим $(\alpha_i, x) = \sum\limits_{j=1}^{p}(\alpha_i, \alpha_j)A_j + (\alpha_i, s)$. С учетом выражения для (α_i, x) из системы (1) величины $A_i - A_i^*$ являются решениями системы

$$\sum_{j=1}^{p}(\alpha_i, \alpha_j)(A_j - A_j^*) = -(\alpha_i, s), \quad i = 1, \ldots, p.$$

Тогда $A_i - A_i^* = -\sum\limits_{j=1}^{p}\hat{d}_{ij}^A(\alpha_j, s)$. Аналогично можно установить, что $B_i - B_i^* = -\sum\limits_{j=1}^{p}\hat{d}_{ij}^B(\beta_j, s)$.

Рассмотрим последовательность $\alpha_i(n)s(n)$ и покажем, что она удовлетворяет условиям Ляпунова [5]. Предварительно заметим, что, специализируя формулу для центрального момента k-го порядка распределения Пуассона $\mu_k = \lambda\sum\limits_{l=0}^{k-2}C_{k-1}^{l}\mu_l$ (см., например [3], с. 114) на случай $k=3$, получим, что $\mu_3=\lambda$. Тогда непосредственным вычислением можно установить, что $\sum\limits_{n=-N}^{N} M\left(\alpha_i(n)s(n)-M(\alpha_i(n)s(n))\right)^3 = \lambda\left(\frac{\sin(3N+1.5)\omega_i}{4\sin 1.5\omega_i}-\frac{3\sin(N+0.5)\omega_i}{4\sin 0.5\omega_i}-\right.$ $\left.-\frac{3\sin(N+0.5)\omega_i\sin(2N+1)\omega_i}{2(2N+1)\sin 0.5\omega_i\sin\omega_i}+\frac{2\sin^3(N+0.5)\omega_i}{(2N+1)^2\sin^3 0.5\omega_i}\right)$. Видно, что каждое слагаемое во втором множителе при $N\to\infty$ либо ограничено, либо бесконечно мало. Тогда в целом все выражение ограничено. Величина

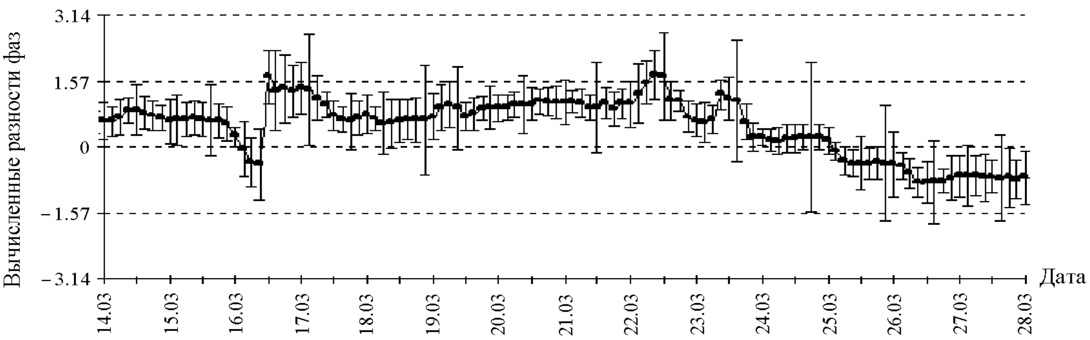
$$B_N=\sum_{n=-N}^{N} D(\alpha_i(n)s(n))=\lambda\left(N+0.5+\frac{\sin(2N+1)\omega_i}{2\sin\omega_i}-\frac{2\sin^2(N+0.5)\omega_i}{(2N+1)\sin^2 0.5\omega_i}\right)\to\infty$$

при $N\to\infty$. Значит, $\lim\limits_{N\to\infty}\{\sum\limits_{n=-N}^{N} M\left(\alpha_i(n)s(n)-M(\alpha_i(n)s(n))\right)^3\}/B_N^{3/2}=0$, и условия Ляпунова выполняются. Выполнение условий Ляпунова для последовательности $\beta_i(n)s(n)$ непосредственно следует из соотношения $\sum\limits_{n=-N}^{N} M\left(\beta_i(n)s(n)-M(\beta_i(n)s(n))\right)^3=0$.

Таким образом, в соответствии с центральной предельной теоремой случайные величины $\sum\limits_{n=-N}^{N}\alpha_i(n)s(n)$ и $\sum\limits_{n=-N}^{N}\beta_i(n)s(n)$ распределены асимптотически нормально. При определении параметров A_i и B_i в сигнале используются временные окна длительностью 40 000 отсчетов и более, поэтому можно с большой степенью точности считать величины $\sum\limits_{n=-N}^{N}\alpha_i(n)s(n)$ и $\sum\limits_{n=-N}^{N}\beta_i(n)s(n)$ распределенными нормально. Тогда и величины $A_i-A_i^*$ и $B_i-B_i^*$, являющиеся их линейными комбинациями, тоже распределены по нормальному закону. Математическое ожидание и дисперсия величины $A_i-A_i^*$ определяются выражениями $M(A_i-A_i^*)=-\sum\limits_{j=1}^{p}\hat{d}_{ij}^{A}\lambda\sum\limits_{n=-N}^{N}\alpha_j(n)=0$ и $D(A_i-A_i^*)=\lambda\sum\limits_{n=-N}^{N}\left(\sum\limits_{j=1}^{p}\hat{d}_{ij}^{A}\alpha_j(n)\right)^2$, в чем можно убедиться непосредственным вычислением. Аналогично $M(B_i-B_i^*)=0$ и $D(B_i-B_i^*)=\lambda\sum\limits_{n=-N}^{N}\left(\sum\limits_{j=1}^{p}\hat{d}_{ij}^{B}\beta_j(n)\right)^2$. Таким образом, $A_i-A_i^*$ и $B_i-B_i^*$ — центрированные нормальные величины со стандартными отклонениями $\sigma_A=\sqrt{\lambda\sum\limits_{n=-N}^{N}\left(\sum\limits_{j=1}^{p}\hat{d}_{ij}^{A}\alpha_j(n)\right)^2}$ и $\sigma_B=\sqrt{\lambda\sum\limits_{n=-N}^{N}\left(\sum\limits_{j=1}^{p}\hat{d}_{ij}^{B}\beta_j(n)\right)^2}$. Обозначим через A_0^* величину $\frac{1}{2N+1}\sum\limits_{i=1}^{p}A_i^*\frac{\sin(N+0.5)\omega_i}{\sin 0.5\omega_i}$. Можно проверить, что $M\left(\frac{1}{2N+1}\sum\limits_{n=-N}^{N}x(n)-A_0^*\right)=\lambda$, следовательно, несмещенной оценкой параметра λ будет $\frac{1}{2N+1}\sum\limits_{n=-N}^{N}x(n)-A_0^*$. Для построения доверительных интервалов выберем доверительную вероятность γ. Тогда с вероятностью γ параметры A_i и B_i лежат соответственно в интервалах $[A_i^*-z_\gamma\sigma_A;\ A_i^*+z_\gamma\sigma_A]$ и $[B_i^*-z_\gamma\sigma_B;\ B_i^*+z_\gamma\sigma_B]$, где z_γ определяется с помощью функции Лапласа $\Phi(z)$ из условия $2\Phi(z_\gamma)=\gamma$ [3]. Большое число используемых отсчетов позволяет использовать функцию Лапласа, несмотря на то, что среднеквадратические отклонения точно неизвестны и вычисляются с помощью оцениваемого параметра λ.

Апробирование методики. Апробирование предложенной методики проводилось на реальном ряде данных интенсивности ЭМИ за три года, предоставленном В. К. Павлюковым. Определялись разности между теоретически рассчитанными фазами приливных волн и фазами гармоник, выделенными из сигнала. Программа для вычисления теоретических фаз волн приливных потенциалов была составлена и предоставлена А. Н. Кролевцом.

Доверительные интервалы для выделенных значений начальных фаз φ_i строились следующим образом: составлялись четыре возможные комбинации границ интервалов для A_i и B_i, затем из получаемых для каждой комбинации значений начальных фаз выбирались наименьшее и наибольшее в качестве границ доверительного интервала для φ_i. При выделении гармоник в сигнале использовалось временное окно длительностью 40 279 отсчетов. Определение фаз проводилось с шагом 180 отсчетов (3 часа). На рисунке представлена диаграмма вычисленных разностей фаз для приливной волны O_1 [2] в период с 14.03.2000 по 28.03.2000. Доверительные интервалы считались при доверительной вероятности $\gamma = 90\,\%$. Величины построенных доверительных интервалов дают погрешность точечного оценивания разностей фаз.



Выводы

1. Разработан алгоритм методики интервального оценивания параметров гармонических компонент на фоне пуассоновского шума и проведено его теоретическое обоснование.

2. Апробирование алгоритма на реальных данных показало, что его можно применять для нахождения погрешностей точечного оценивания фазы приливного отклика в ЭМИ.

Автор выражает признательность А. Н. Кролевцу за постановку задачи.

Список литературы

[1] Кролевец А. Н., Павлюков В. К. Приливной отклик импульсного электромагнитного излучения и краткосрочный прогноз сильных землетрясений // Проблемы сейсмичности Дальнего Востока / Под ред. А. В. Викулина. Петропавловск-Камчатский, 2000. С. 171–181.

[2] Мельхиор П. Земные приливы. М., 1968. 244 с.

[3] Справочник по теории вероятностей и математической статистике / В. С. Королюк и др. М.: Наука, 1985.

[4] Серебренников М. Г., Первозванский А. А. Выявление скрытых периодичностей. М.: Наука, 1965.

[5] Ширяев А. Н. Вероятность. М., 1989.

Поступила в редакцию 19 июля 2000 г.,
в переработанном виде — 19 февраля 2001 г.