МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ ОПАСНЫХ ЭКЗОГЕННЫХ И ГИДРАВЛИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ*

И. Д. Музаев, В. Г. Созанов
Северо-Осетинский государственный университет, РСО-Алания
Владикавказ, Россия

Рассматриваются: математическая модель потока лавинного характера; математическая модель процесса вторжения в заполненное водохранилище обвально-оползневого массива, потока селевого либо лавинного характера и его последствия; математическая модель процесса перегораживания потоком лавинного характера речного потока, образования завального озера-водоема и последствия его прорыва.

Известно, что материал оползневых склонов представляет собой слабо связанную горную породу, имеющую следующие физико-механические характеристики: угол внутреннего трения φ, коэффициент сцепления c, коэффициент эффективной вязкости η, порог ползучести τ_0, плотность ρ и модули упругости E и G. Эти характеристики определяются лабораторно-полевыми исследованиями. Некоторые из них представлены в виде графиков в зависимости от влажности грунта в работах [1, 2].

Очевидно, что в допредельном состоянии склон может находиться в чисто упругом деформированном состоянии. Дифференциальные уравнения равновесия в напряжениях имеют следующий вид [1, 5]:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = \rho g \sin\alpha + k_s \rho g \cos(\gamma + \alpha),$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = \rho g \cos\alpha - k_s \rho g \sin(\alpha + \gamma). \quad (1)$$

Здесь приняты следующие обозначения: σ_x и σ_y — нормальные напряжения относительно оси x и y соответственно, τ_{xy} — касательное напряжение, α — угол наклона оползневого склона к горизонту, k_s — "сейсмический коэффициент" (коэффициент сотрясения) $k_s = \dfrac{\alpha_S}{g}$, ($\alpha_s$ — сейсмическое ускорение, α — угол наклона оползневого склона к горизонту, γ — угол атаки сейсмической инерционной силы).

Пренебрегая влиянием концевых эффектов на напряженное состояние массива, можно считать, что напряжения не зависят от координаты x, и тогда выражения (1) преобразуются следующим образом:

$$\frac{d\tau_{xy}}{dy} = \rho g \sin\alpha + k_s \rho g \cos(\alpha + \gamma), \quad (2)$$

$$\frac{d\sigma_y}{dy} = \rho g \cos\alpha - k_s \rho g \sin(\alpha + \gamma). \tag{3}$$

Граничные условия для напряжения будут иметь вид

$$\tau_{xy} = 0 \quad \text{при } y = 0, \tag{4}$$

$$\sigma_y = 0 \quad \text{при } y = 0. \tag{5}$$

Интегрируя уравнения (2) и (3) с учетом граничных условий (4) и (5), получим

$$\tau_{xy} = (\rho g \sin\alpha + k_s \rho g \cos(\alpha + \gamma))y, \tag{6}$$

$$\sigma_y = (\rho g \cos\alpha - k_s \rho g \sin(\alpha + \gamma))y. \tag{7}$$

Условие допредельного состояния материала склона имеет вид [1, 5]:

$$\tau_{xy} \leq \operatorname{tg}\varphi \sigma_y + c. \tag{8}$$

Подставив выражения (6) и (7) в (8), получим

$$[\rho g \sin\alpha + k_s \rho g \cos(\alpha + \gamma)]y \leq \operatorname{tg}\varphi[\rho g \cos\alpha - k_s \rho g \sin(\alpha + \gamma)]y + c.$$

Отсюда

$$\rho g[\sin\alpha + k_s \cos(\alpha + \gamma) - \operatorname{tg}\varphi(\cos\alpha - k_s \sin(\alpha + \gamma)]y \leq c.$$

Мощность критического предельного состояния оползневого склона определится по следующей зависимости:

$$H_{kp} = \frac{c}{\rho g[\cos\alpha(\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\varphi) + k_s \cos(\alpha + \gamma)(1 + \operatorname{tg}\varphi \cdot \operatorname{tg}(\alpha + \gamma)]}.$$

Если критическая мощность больше мощности оползневой толщи склона (расстояние от свободной поверхности склона до коренных пород), то склон будет находиться в допредельном состоянии.

При выполнении условия $H_{kp} \leq H_0$ оползневой склон может перейти в запредельное состояние, т. е.

$$\tau_{xy} \geq \operatorname{tg}\varphi \sigma_y + c.$$

В результате увлажнения материала, слагающего некоторый участок склона, коэффициент сцепления и угол внутреннего трения резко уменьшаются. В подобных случаях движение материала оползневого склона приобретает характер лавинного потока. Весьма важно определить кинематические и динамические характеристики лавинообразного потока (скорость, дальность выброса, импульсное воздействие на перегораживающие сооружения и др.). Для этого в настоящее время используется математическая модель движения потока лавинного характера, представляющая собой систему дифференциальных уравнений теории мелкой воды с учетом сухого трения [7, 8]:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + V\frac{\partial V}{\partial x} = g \sin\alpha - \operatorname{tg}\varphi g \cos\alpha - \frac{k_f V^2}{2h} - g\frac{\partial h}{\partial x}, \tag{9}$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(hV) = 0, \tag{10}$$

где $h(x,t)$ — глубина движущегося потока, $v(x,t)$ — скорость потока, k_f — коэффициент гидравлического сопротивления, t — время.

Начальные условия имеют вид

$$h(x,t) = h_0(x) \quad \text{при } t = 0,$$

$x = l_0(t)$ — координата "хвоста" потока лавинного характера, $x = l(t)$ — координата переднего фронта потока лавинного характера. На хвосте можно поставить следующее граничное условие:

$$x = l_0(t) = \text{const}, \quad h(x,t) = 0. \tag{11}$$

На фронте потока обычно ставятся два граничных условия:

$$\big(V\big(l(t),t\big) - \Theta(t)\big)h\big(l(t),t\big) = -\Theta(t)H_0(l(t)), \tag{12}$$

$$\big(V^0(l(t),t\big) - \Theta)^2 h(l(t),t - \Theta^2 H_0(l(t)) = g\left(\frac{H_0^2(l(t))}{2} - \frac{h^2(l(t),t)}{2}\right), \tag{13}$$

где $H_0(x)$ — мощность рыхлого материала склона перед фронтом.

В соотношениях (12) и (13) учитывается присоединение материала с переднего фронта к потоку лавинного характера только через проскальзывания слоев потока. Эти граничные условия приемлемы для расчета прерывной волны в чистой воде. В этом случае имеет место проскальзывание фронта прерывной волны над речным потоком. Из соотношений (12) и (13) можно определить скорость фронта прерывной волны

$$\Theta = U_2 \pm \sqrt{\frac{gh(l(t),t)\left(h_1(l(t),t) + H_0(l(t))\right)}{2H_0(l(t))}},$$

где U_2 — скорость речного потока перед фронтом прерывной волны. Простое арифметическое суммирование скоростей указывает на факт проскальзывания слоев.

В одномерной модели теории мелкой воды вертикальная составляющая скорости движения учитывается лишь на свободной поверхности потока через производную глубины по времени. В связи с этим можно заключить, что в существующей математической модели теории мелкой воды, т. е. в дифференциальных уравнениях (9) и (10) и в граничных условиях (12) и (13), никак не учитывается процесс захвата материала фронтом потока. В потоках лавинного характера этот процесс представляется основным и его исключение из рассмотрения ведет, очевидно, к существенным искажениям реальной картины.

Таким образом, можно сделать вывод, что существующая математическая модель (9)–(13) непосредственно не применяется для описания движения потока лавинного характера.

Легко можно заметить, что этот характерный процесс лавинообразного потока учитывается в следующей математической модели:

$$\frac{\partial(Vh)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(V^2 h) = gh\sin\alpha - \operatorname{tg}\varphi gh\cos\alpha - gh\frac{\partial h}{\partial x} - k_f\frac{V^2}{2}, \tag{14}$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hV)}{\partial x} = \begin{cases} \Theta H_0(l(t))/\varepsilon & \text{при} \quad l(t) - \varepsilon \le x \le l(t), \\ 0 & \text{при} \quad 0 \le x \le l(t) - \varepsilon, \end{cases} \tag{15}$$

начальные условия при $t = 0$

$$h(x,t) = H_0(x), \quad 0 \le x \le l(0), \tag{16}$$

$$\text{при } x = 0, \quad h(x,t) = 0, \tag{17}$$

$$\text{при } x = l(t), \quad h(x,t) = 0. \tag{18}$$

В отличие от существующей модели (9)–(13) в модели (14–18) процесс захвата фронтом материала склона учитывается через дифференциальные уравнения неразрывности . Интенсивность захвата материала $\Theta H_0(l(t))/\varepsilon$ увязывается со скоростью фронта потока. Объем захваченного материала в единицу времени рассредоточен на некоторой длине ε:

$$l(t) - \varepsilon \le x \le l(t), \quad \Theta = \frac{dl}{dt}.$$

Численные расчеты по предложенной модели позволяют установить кинематические и динамические характеристики потока лавинного характера, а также прогнозировать возможное перегораживание речного потока лавинообразным потоком и возможное образование завального озера-водоема, а также последствия его прорыва.

Для случая выброса лавинообразной массы в долину реки используется двумерная (плановая) математическая модель

$$\oint_{\Gamma} \varphi\, dx\, dy + \psi\, dy\, dt + R\, dx\, dt = \int_{E} \Pi\, dx\, dy\, dt,$$

где φ, ψ, θ и Π — матрицы, имеющие следующий вид:

$$\varphi = \begin{pmatrix} q_x \\ q_y \\ z_s \end{pmatrix}, \quad \psi = \begin{pmatrix} q_x V_x + g\dfrac{h^2}{2} \\ q_y V_x \\ q_x \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} q_x V_x \\ q_y V_y + g\dfrac{h^2}{2} \\ q_y \end{pmatrix}, \quad \Pi = -\begin{pmatrix} \tau_x + gh\dfrac{\partial z_g}{\partial x} \\ \tau_y + gh\dfrac{\partial z_g}{\partial y} \\ -q^* \end{pmatrix},$$

здесь q_x, q_y — составляющие удельного расхода по осям x и y, τ_x и τ_y — составляющие вектора касательных напряжений на дне, z_s и z_g — отметки свободной поверхности и дна соответственно, q^* — объем горного материала, который присоединяется к основному потоку в единицу времени:

$$q^*(x,y) = \frac{H_0}{\varepsilon}\sqrt{\Theta_x^2 + \Theta_y^2}[1(x - l_1 - \varepsilon) - 1(x - l_1 + \varepsilon)] \cdot [1(y - l_2 - \varepsilon) - 1(y - l_2 + \varepsilon)],$$

$$\Theta_x = \frac{dl_x}{dt}, \quad \Theta_y = \frac{dl_y}{dt},$$

$x = l_1(t)$, $y = l_2(t)$ — уравнения в параметрической форме линии фронта потока лавинного характера.

В случае вторжения потока лавинного характера в заполненное горное водохранилище образуются поверхностные гравитационные волны, которые могут вызвать большие разрушения и катастрофический паводок в нижнем бьефе. Математическая модель волнообразования имеет следующий вид [9]. Предположим, что часть пространства, ограниченная условиями $0 \le x \le L$, $0 \le y \le B$, $-H \le z \le 0$, представляет собой водохранилище озерного типа; L — длина, B — ширина, H — глубина водохранилища. Плоскость $z = 0$ — свободная поверхность воды, $z = -H$ — дно водохранилища. Рассмотрим волновое движение воды, вызванное тем, что с участка борта $y = 0$, $x_0 - a \le x \le x_0 + a$, $-h \le z \le 0$ в промежуток времени $0 \le t \le t_0$ в водохранилище вторгается поток лавинного характера.

Потенциал скорости $\varphi(x, y, z, t)$ должен удовлетворять дифференциальному уравнению Лапласа и начальным и граничным условиям:

$$\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \text{ при } t = 0, \quad z = 0,$$

$$\left.\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right|_{x=L} = 0,$$

$$\left.\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right|_{y=0} = V(x, z, t), \quad \left.\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right|_{y=B} = 0,$$

$$\left.\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right|_{z=-H} = 0, \quad \left.\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + g\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)\right|_{z=0} = 0.$$

Поставленная начально-краевая задача типа Коши—Пуассона решается методом интегральных преобразований Лапласа и Фурье.

При наличии водохранилища узкоканьонного типа математическая модель изменяется и принимает следующий вид [9]. Потенциал средней по ширине водоема скорости $\varphi(x, z, t)$ должен удовлетворять дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{1}{B}\frac{\partial B}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{1}{B}\frac{\partial B}{\partial z}\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{1}{B}V(x, z, t) \tag{19}$$

и начальным и граничным условиям

$$\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \text{ при } z = 0 \text{ и } t = 0,$$

$$\left.\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right|_{x=L} = 0,$$

$$\left.\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right|_{z=-H} = 0, \quad \left.\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + g\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)\right|_{z=0} = 0.$$

В отличие от классической теории волн малой амплитуды потенциал скорости вместо дифференциального уравнения Лапласа должен удовлетворять дифференциальному уравнению (19), в котором учитывается непризматическое очертание водоема.

Поставленная начально-краевая задача решается методом интегральных преобразований Лапласа и Фурье при изменении ширины по экспоненциальной зависимости.

Здесь же отметим, что по этой модели получена формула для фазовой скорости гравитационной волны в непризматическом водоеме, которая представляет собой обобщение классической формулы для фазовой скорости волны в призматическом водоеме [9].

Список литературы

[1] Маслов Н. Н. *Механика грунтов в практике строительства (оползни и борьба с ними).* Стройиздат, М., 1977.

[2] Маслов Н. Н. *Основы инженерной геологии и механика грунтов.* Высшая школа, М., 1982.

[3] Цытович Н. А. *Механика грунтов.* Высшая школа, М., 1979.

[4] Соколовский В. В. *Теория пластичности.* Высшая школа, М., 1969.

[5] Соколовский В. В. *Статика сыпучей среды.* Физматгиз, М., 1954.

[6] Музаев И. Д. О динамике оползневых участков бортов горных водохранилищ. *Сборник научных трудов ГрузНИИЭГС. Исследование по вопросам гидравлики сооружений и водного хозяйства.* М., 1984, 53–57.

[7] Григорян С. С. Математическое моделирование горных обвалов и оползней больших объемов. *Инженерная геология.* №6, 1983, 61–71.

[8] Григорян С. С. *О механике формирования и обрушении отвалов горной массы.* НТО №1724, Институт механики МГУ, 1975.

[9] Кусраев А. Г., Музаев И. Д., Созанов В. Г. Математическое моделирование некоторых задач волновой гидродинамики применительно к горным водоемам. В *“Вычислительные технологии”*, ИВТ СО РАН, Новосибирск, **4**, №11, 1995, 164–168.

Поступила в редакцию 15 сентября 1995 г.