ЧИСЛЕННАЯ МОДЕЛЬ ДИНАМИКИ ВНУТРЕННИХ ВОЛН, ГЕНЕРИРУЕМЫХ ЦИЛИНДРОМ ПЕРЕМЕННОГО РАДИУСА В ЛИНЕЙНО СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ СРЕДЕ*†

А. В. Фомина
Новокузнецкий государственный педагогический институт, Россия

Е. А. Шелякова
Кемеровский государственный университет, Россия

Рассматривается плоское нестационарное течение, генерируемое пульсирующим горизонтальным круговым цилиндром в невязкой несжимаемой линейно стратифицированной жидкости. Построена численная модель этого течения. Приведены результаты тестовых расчетов.

1. Постановка задачи

Для описания течения привлекаются уравнения Эйлера в приближении Буссинеска. После введения функции тока ψ и завихренности ω эти уравнения записываются в виде

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=\omega, \tag{1}$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial t}+u\frac{\partial\omega}{\partial x}+v\frac{\partial\omega}{\partial y}=\frac{g}{\rho_0}\frac{\partial\rho}{\partial x}, \tag{2}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+u\frac{\partial\rho}{\partial x}+v\frac{\partial\rho}{\partial y}=0. \tag{3}$$

Здесь $u=\partial\psi/\partial y$, $v=-\partial\psi/\partial x$ — горизонтальная и вертикальная компоненты скорости, g — ускорение силы тяжести, ρ — плотность жидкости, система координат введена таким образом, что ось y направлена вертикально вверх, против силы тяжести. Задача сводится к отысканию функций ψ, ω, ρ в области с переменной границей: $t\in[0,t_1]$; $x,y\in\Omega_t$; $t_1>0$, $\Omega_t=\{x,y: x\geq 0,\ y\geq 0,\ x^2+y^2\geq q(t)\}$, $q(t)=r_0-A\cos(\omega_f t)$.

В качестве начальных условий ставились следующие:

$$\psi=\omega=0,\quad \rho=\rho_s(y),\quad t=0,\quad x,y\in\Omega_0. \tag{4}$$

†Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты №95-01-00910, №95-01-01339.

Из соображений симметрии решение отыскивалось в первом квадранте плоскости $X0Y$. Граничные условия полагались следующими:

$$\omega = \frac{\partial \psi}{\partial r} = 0, \quad r^2 = x^2 + y^2 \to \infty, \quad t \geq 0,$$

$$\rho = \rho_s(y), \quad r^2 \to \infty, \quad t \geq 0.$$

$$\rho = \rho_0, \quad \omega = 0, \quad \psi = 0, \quad y = 0, \quad x \geq q(t), \quad t \geq 0,$$

$$\psi = \theta q(t) \frac{dq(t)}{dt}, \quad x^2 + y^2 = q^2(t), \quad t \geq 0,$$

$$\psi = \frac{\pi}{2} q(t) \frac{dq(t)}{dt}, \quad \omega = 0, \quad x = 0, y \geq q(t), \quad t \geq 0, \tag{5}$$

где $\theta = \arctan(y/x)$; $\rho_0 = \rho_s(0)$, $\rho_s = \rho_s(y)$, — плотность невозмущенной жидкости.

Для построения численного алгоритма решения задачи осуществлялся двойной переход в новые системы координат:

$$t' = t, \quad r^2 = x^2 + y^2, \quad \theta = \arctan(y/x), \tag{6}$$

$$t'' = t', \quad r' = \varphi_1(t', r, \theta), \quad \theta' = \varphi_2(t', \theta). \tag{7}$$

2. Численный алгоритм

Алгоритм решения задачи сводится к последовательному интегрированию преобразованных уравнений (1)–(3) на каждом временном слое. Уравнение (1) при этом интегрировалось с применением итерационной схемы стабилизирующей поправки [1]. При интегрировании уравнений (2), (3) использовался метод расщепления [1]

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \omega}{\partial t''} + A \dfrac{\partial \omega}{\partial r'} = F, \\ \dfrac{\partial \omega}{\partial t''} + B \dfrac{\partial \omega}{\partial \theta'} = 0; \end{cases} \tag{8}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t''} + A_1 \dfrac{\partial \rho}{\partial r'} = 0, \\ \dfrac{\partial \rho}{\partial t''} + B_1 \dfrac{\partial \rho}{\partial \theta'} = 0, \end{cases} \tag{9}$$

где A, B, A_1, B_1 — коэффициенты в уравнениях при производных $\partial\omega/\partial r'$, $\partial\omega/\partial\theta'$, $\partial\rho/\partial r'$, $\partial\rho/\partial\theta'$; F — правая часть уравнения (2). Система уравнений (8) аппроксимируется с применением мажорантной разностной схемы [1]:

$$\frac{\omega_{i,j}^{n+1/2} - \omega_{i,j}^{n}}{\tau} + A_{i,j} \begin{cases} \dfrac{\omega_{i,j}^{n+1/2} - \omega_{i-1,j}^{n+1/2}}{h_1'}, \ A_{i,j} > 0 \\ \dfrac{\omega_{i+1,j}^{n+1/2} - \omega_{i,j}^{n+1/2}}{h_1'}, \ A_{i,j} < 0 \end{cases} = F_{i,j},$$

$$\frac{\omega_{i,j}^{n+1} - \omega_{i,j}^{n+1/2}}{\tau} + B_{i,j} \begin{cases} \dfrac{\omega_{i,j}^{n+1} - \omega_{i,j-1}^{n+1}}{h_2'}, \ B_{i,j} > 0 \\ \dfrac{\omega_{i,j+1}^{n+1} - \omega_{i,j}^{n+1}}{h_2'}, \ B_{i,j} < 0 \end{cases} = 0.$$

Здесь τ, h_1', h_2' — параметры конечно-разностного алгоритма: шаги сетки по времени и переменным r', θ' соответственно. Разностная аппроксимация для системы уравнений (9) выбиралась аналогичной. Алгоритм строился так, что для отыскания функции тока в правой части уравнения (1) использовались значения завихренности с нижнего временного слоя. Система уравнений (1) – (3) нелинейна. В связи с этим рассматривалась также версия алгоритма с итерациями по нелинейности. Численные эксперименты показали возможность использования более простого в реализации безытерационного подхода. Рассмотренный алгоритм имеет первый порядок аппроксимации по пространственным и временной переменным. С целью повышения порядка аппроксимации по пространственным переменным предполагается рассмотрение модификации алгоритма, основанной на идее метода предиктор—корректор [1].

Конечно-разностная сетка в переменных t', r', θ' выбиралась равномерной (с параметрами τ, h_1', h_2'). Ей соответствовала неравномерная подвижная сетка в исходной системе координат. При численном решении задачи краевые условия для ψ, ω, ρ (или $\rho_1 = \rho - \rho_s$) из бесконечности сносились на окружность достаточно большого радиуса $r = R$. Наряду с условиями (5) при $r = R$ ставилось открытое граничное условие [2] для ψ:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t''} + \frac{1}{r_{r'}} \frac{\partial \psi}{\partial r'} (c - r_{t''}) = 0. \tag{10}$$

Для этого уравнения использовалась конечно-разностная аппроксимация

$$\frac{\psi_{i,j}^{n+1} - \psi_{i,j}^{n}}{\tau} + \frac{1}{\left(r_{r'}^{h}\right)_{i,j}^{n+1}} \left[c_{i,j} - \left(r_{t''}^{h}\right)_{i,j}^{n+1}\right] \frac{\psi_{i,j}^{n} - \psi_{i-1,j}^{n}}{h_1'} = 0. \tag{11}$$

В (11) индексы i, j принимают значения, соответствующие приграничным и граничным узлам $(N_1 - 1, j)$, (N_1, j), $j = 2, \ldots, N_2 - 1$; N_1, N_2 — число узлов сетки по переменным r', θ'; $\left(r_{t''}^{h}\right)_{i,j}^{n+1} = \left(r_{i,j}^{n+1} - r_{i,j}^{n}\right)/\tau$; $\left(r_{r'}^{h}\right)_{i,j}^{n+1}$ — сеточный аналог производной $\partial r/\partial r'$ на $(n+1)$-м слое по времени. На основе аппроксимации (11) уравнения (10) в приграничных узлах для момента времени $t = t^n$ определялась характерная скорость переноса возмущений и с использованием стандартной процедуры [2] конструировалось краевое условие типа (10). Краевые условия для ρ_1, ω при этом ставились исходя из аппроксимации линеаризованного аналога уравнений (2) – (3).

3. Результаты численных экспериментов

Численная модель тестировалась путем решения задачи в однородной жидкости. В этом случае имеется точное решение

$$\psi = \theta q \frac{dq}{dt}, \quad \omega = 0. \tag{12}$$

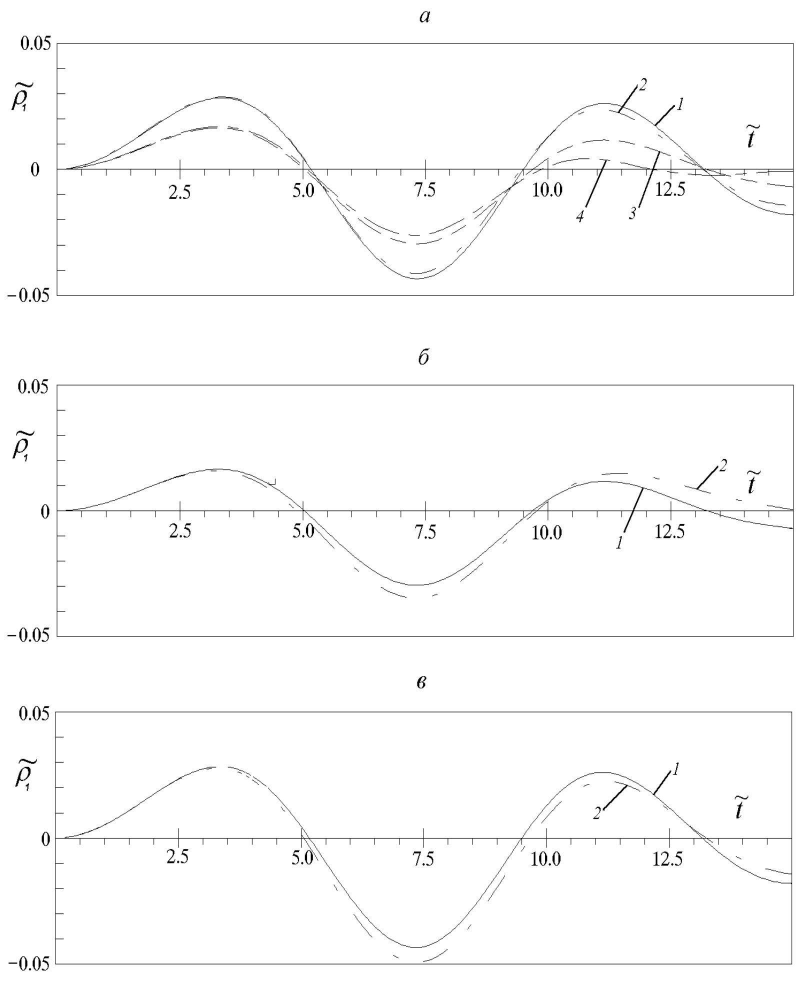

Рис. 1.

Результаты расчетов, полученные с применением равномерных и неравномерных сеток демонстрируют сходимость сеточных решений к точному с порядком $O(h^2)$.

Ниже приводятся результаты численных экспериментов, направленных на анализ свойств алгоритма расчета в полной постановке.

Первая серия численных экспериментов была выполнена с целью демонстрации роли краевого условия для ψ при $r = R$. Величина $\tilde{R} = R/r_0$ полагалась равной 27.6; $N_1 = 29$; $N_2 = 41$. На рис. 1, *а* приведены графики функции $\tilde{\rho}_1(\tilde{t}, 0, \tilde{y}) = \rho_1(\tilde{t}, 0, \tilde{y})/ar_0\rho_0$, $a = -(1/\rho_0)d\rho_s/dy$; $\tilde{t} = t \cdot \omega_f$, $\tilde{y} = y/r_0$. Кривые *1*, *2* соответствуют $\tilde{y} = 6$; кривые *3*, *4* — $\tilde{y} = 10$. Кривые *1*, *3* получены при использовании аппроксимации условия Неймана для функции тока; *2*, *4* — условия (11). Можно видеть, что для $\tilde{y} = 10$ при больших значениях $\tilde{t}$ имеются расхождения. Рис. 1, *б*, *в* демонстрируют роль величины R при фиксированном краевом условии (двухточечной аппроксимации условия Неймана для ψ). Кривые *1* на рис. 1, *б*, *в* получены для $\tilde{R} = 27.6$; кривые *2* — для $\tilde{R} = 17$. Здесь $\tilde{y} = 6$. Во всех случаях краевые условия для ω, ρ_1 ставились исходя из линеаризованных уравнений для этих величин.

Рис. 2 иллюстрирует роль величин N_1, N_2 (числа разбиений по переменным r', θ'). Они выполнены для $N_1 = 41$, $N_2 = 29$. Рис. 2, *а* получен с применением условия Неймана; рис. 2, *б* — условия (11). Кривые *1*, *3* на этих рисунках соответствуют $N_1 = 41$, $N_2 = 29$;

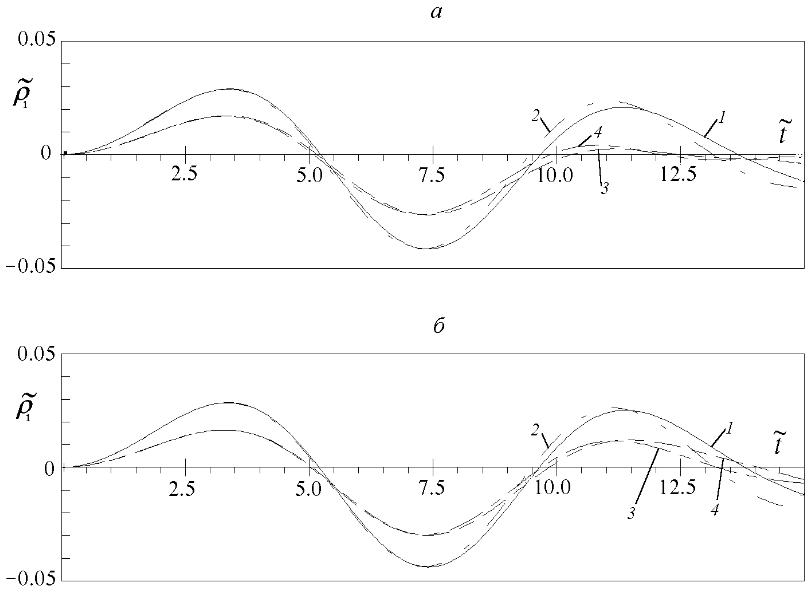
а
0.05
0
−0.05
2.5
5.0
7.5
10.0
12.5
1
2
3
4
б
0.05
0
−0.05
2.5
5.0
7.5
10.0
12.5
1
2
3
4

Рис. 2.

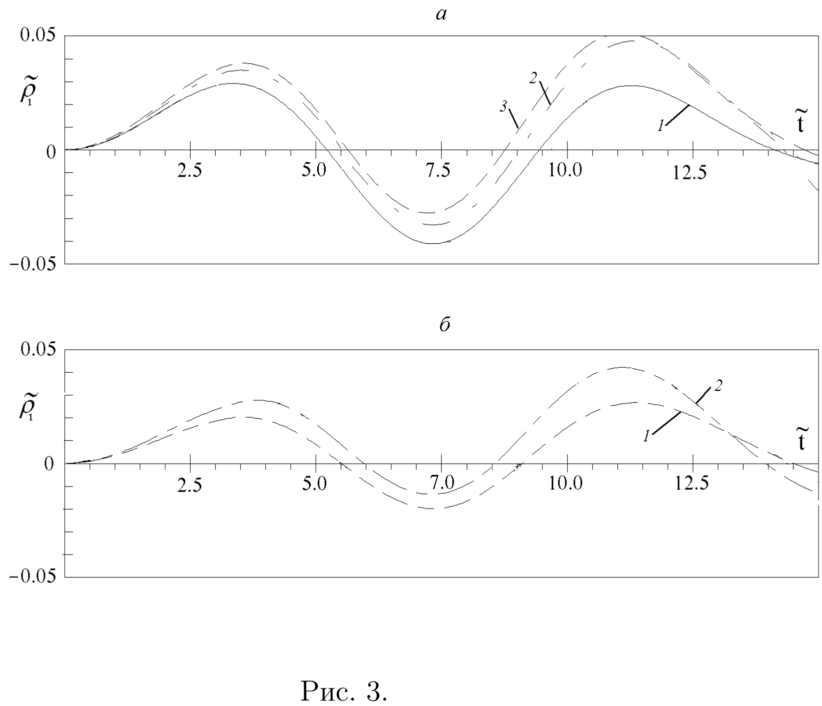
а
0.05
0
−0.05
2.5
5.0
7.5
10.0
12.5
1
2
3
б
0.05
0
−0.05
2.5
5.0
7.0
10.0
12.5
1
2

Рис. 3.

кривые *2*, *4* — $N_1 = 29$, $N_2 = 41$; $\tilde{y} = 6$; $\tilde{R} = 27.6$. Результаты расчетов с применением различных сеток достаточно близки.

Наконец, рис. 3 демонстрирует роль величины R. Кривые *1–3* на рис. 3, *а* соответствуют значениям $\tilde{R}$, равным 27.6, 50.0, 100.0; $\tilde{y} = 6$. Кривые *1*, *2* на рис. 3, *б* получены для $\tilde{R} = 50.0$; 100.0. Результаты расчетов, к сожалению, демонстрируют существенную роль параметра R. В качестве краевого условия использовалось условие Неймана.

Ряд расчетов выполнялся на последовательности значений $\tilde{\tau} = 0.05$, 0.1. Основные расчеты выполнены с $\tilde{\tau} = 0.05$. Увеличение $\tilde{\tau}$ в 2 раза ($\tilde{\tau} = 0.1$) привело к отклонениям не более 5 % в равномерной норме.

4. Заключение

Построена численная модель волновых движений, генерируемых цилиндром переменного радиуса в линейно-стратифицированной среде. Выполнена серия численных экспериментов, направленных на ее тестирование. Дальнейшее уточнение алгоритма путем привлечения аппроксимаций более высокого порядка и асимптотик для постановки краевых условий, а также сопоставление с результатами экспериментального и асимптотического анализа [3, 4] представляет задачу ближайших исследований.

Авторы благодарят Г. Г. Черных за постановку задачи и помощь в работе.

Список литературы

[1] Яненко Н. Н. *Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики.* Наука, Новосибирск, 1967.

[2] Orlanski I. A simple boundary condition for unbounded hyperbolic flows. *J. Comput. Phys.*, **21**, №3, 1976, 251–269.

[3] Беляев В. С. Экспериментальное исследование волновых и конвективных течений в стратифицированной жидкости. *Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук.* ИПМех АН СССР, М., 1984.

[4] Городцов В. А. Порождение и динамика малых возмущений в стратифицированных жидкостях. *Дис. ... докт. физ.-мат. наук.* ИПМех РАН, М., 1996.

Поступила в редакцию 24 апреля 1996 г.