Вычислительные технологии **Том 5, № 6, 2000**

О МОДЕЛЬНОЙ КРИВИЗНЕ СКАЧКА УПЛОТНЕНИЯ В НЕРАВНОМЕРНОМ ПОТОКЕ*

А. Л. Адрианов
Институт вычислительного моделирования СО РАН
Красноярск, Россия
e-mail: adrian@cckr.krasnoyarsk.su

Differential relations on a curvilinear shock wave are considered. On obtaining the shock wave curvature, instead of the real differential condition after the shock wave the model condition is imposed eliminating the effect of "catching up perturbations". The comparative examples of calculations based on the accurate (two dimensional equations of gas dynamics) and approximate models are given.

Введение

Дифференциальные соотношения на фронте криволинейного скачка уплотнения (СУ) рассматривались в [1, 2], причем в последней работе они записаны в удобной для решения практических задач форме. Применительно к нестационарным течениям дифференциальные соотношения на фронте криволинейной ударной волны получены в [3]. В настоящей работе рассматривается стационарное течение и на основе дифференциальных соотношений [2, 4] строится приближенная модель криволинейного скачка уплотнения, форма которого исключает влияние догоняющих возмущений за его фронтом [5]. Такая же модель была выведена автором ранее с помощью соотношений на характеристиках (течение за СУ сверхзвуковое) [6]. Результаты данной работы могут оказаться полезными при решении ряда практических задач, в которых влияние указанных возмущений незначительно и допустим переход к предложенной модели СУ.

1. Дифференциальные соотношения на криволинейном скачке уплотнения и сохраняемый "левый" комплекс на слабом разрыве

Рассмотрим двумерное стационарное движение идеального совершенного газа с образованием в поле течения криволинейного скачка уплотнения, на котором в каждой точке предполагаются выполненными локальные соотношения, связывающие газодинамические параметры по обе стороны его поверхности. Задаваясь дополнительной гладкостью течения в окрестности рассматриваемой точки на СУ и тем самым исключая локально

*Работа выполнена при финансовой поддержке Красноярского краевого фонда науки, грант №5F0037.

взаимодействие скачка со слабыми разрывами, можно путем дифференцирования соотношений вдоль фронта СУ получить дополнительные дифференциальные соотношения, которые связывают линейно предельные значения ряда частных производных от газодинамических параметров (например, вдоль линии тока) с кривизной скачка [1]. При этом предельные значения нормальных к линии тока производных исключаются при помощи дифференциальных законов плоского или осесимметричного движений газа, записанных в соответствующей (для каждой стороны СУ) системе координат. Целесообразное по ряду причин использование естественных координат в стационарном случае значительно упрощает процедуру вывода дифференциальных соотношений.

В работе [2], как и в [1], традиционно принята система естественных координат для записи дифференциальных законов сохранения по обе стороны СУ. При этом дифференциальные соотношения на скачке записываются следующим образом [2, 4]:

$$\hat{N}_j = C_j \sum_{i=1}^{5} A_{ji} N_i, \quad j = 1, 2, 3,$$

$$C_1 = \gamma \left[\sqrt{b}(J-1)\right]^{-1}, \quad C_2 = (1-\varepsilon)J\left[\sqrt{b^3}(J-1)\right]^{-1},$$

$$A_{11} = -\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\sqrt{\frac{J+\varepsilon}{(J_m+\varepsilon)^3}}\left[a_p(J_m-J)^2 - b_p(J_m-J) + c_p\right],$$

$$A_{12} = -\frac{\chi s}{1+\varepsilon}\left[a_\vartheta(J+\varepsilon)^2 + b_\vartheta(J+\varepsilon) + c_\vartheta\right],$$

$$A_{13} = \chi s\frac{2(1+\varepsilon J_m)(J+1+2\varepsilon)(J+\varepsilon)}{\gamma(J_m+\varepsilon)},$$

$$A_{14} = c(1-\varepsilon)\left\{[4(J_m-J)(J+\varepsilon) - (1-\varepsilon J)(J-1)]\sin\vartheta + \chi q(J-1)(1+\varepsilon J)\cos\vartheta\right\},$$

$$A_{15} = -\chi(1-\varepsilon)(a_w J^2 - b_w J - c_w),$$

$$A_{21} = \chi\frac{s}{J}\left[f_1 + (J_m-1)c^2 f_2\frac{1}{\gamma}\right], \quad A_{22} = -\frac{c}{J}\left[\frac{J_m+\varepsilon}{1-\varepsilon}f_1 + (J_m-J)f_2\right],$$

$$A_{23} = -2\frac{c}{J}\mu(J+\varepsilon)\left[m + (1+\varepsilon)^2 J(J_m-J)\right],$$

$$A_{24} = \chi\frac{a}{J}\left[cf_2\sin\vartheta + \gamma J\sqrt{b}(1+\varepsilon J)\sin(\vartheta+\chi\beta)\right],$$

$$A_{25} = \frac{a}{J}\left\{2m + J(1+\varepsilon)\left[(J_m-J)(J+1+2\varepsilon) - (1+\varepsilon J)(J-1)\right]\right\},$$

$$C_3 = -\sqrt{b}(1-\varepsilon)(J-1)^2\left[J(1+\varepsilon J)^2\right]^{-1},$$

$$A_{31} = \chi s\left[\frac{\mathrm{M}^2-1}{\gamma\mathrm{M}^2} + \mu\right], \quad A_{32} = -c\left(\mu\gamma\mathrm{M}^2 + q^2\right),$$

$$A_{33} = -c\left[\mu + \frac{(1+\varepsilon J)J}{(1-\varepsilon)(J-1)^2}\right], \quad A_{34} = \chi s\sin\vartheta, \quad A_{35} = q. \tag{1}$$

Здесь

$$a = [(J_m-J)(J+\varepsilon)]^{1/2}, \quad b = a^2 + (1+\varepsilon J)^2, \quad c = [(J+\varepsilon)/(J_m+\varepsilon)]^{1/2},$$

$$q = [(J_m - J)/(J+\varepsilon)]^{1/2}, \quad s = [(J_m - J)/(J_m+\varepsilon)]^{1/2},$$
$$a_p = (1-\varepsilon)(3J_m - 4 - \varepsilon), \quad b_p = (3-2\varepsilon)J_m^2 - 2(1-\varepsilon+3\varepsilon^2)J_m - (4+6\varepsilon-3\varepsilon^2),$$
$$c_p = (J_m - 1)(1+\varepsilon J_m)(J_m+\varepsilon), \quad a_\vartheta = (1-\varepsilon)[J_m + \varepsilon - 4(1+\varepsilon)],$$
$$b_\vartheta = 2(1+\varepsilon)[(1-3\varepsilon)(J_m+\varepsilon) - 2(1-\varepsilon^2)], \quad c_\vartheta = (1+\varepsilon)^2(1-\varepsilon)(J_m+\varepsilon),$$
$$a_w = 3+\varepsilon, \quad b_w = 3J_m - 2 - 3\varepsilon, \quad c_w = (1+4\varepsilon)J_m + 1,$$
$$f_1 = mJ + 2\mu(J+\varepsilon)[m + (1+\varepsilon)^2(J_m - J)J],$$
$$f_2 = 2m - \gamma J[(1+\varepsilon J_m)(J+\varepsilon) - (1-\varepsilon^2)(J_m - J)],$$
$$m = (1+\varepsilon J)[b - (1+\varepsilon)J(1+\varepsilon J)], \quad \mu = -(1+\varepsilon J_m)[(1+\varepsilon)(J_m+\varepsilon)]^{-1},$$
$$J = \hat{p}/p = (1+\varepsilon)\mathrm{M}^2\sin^2\sigma - \varepsilon, \quad J_m = (1+\varepsilon)\mathrm{M}^2 - \varepsilon,$$
$$\varepsilon = (\gamma-1)/(\gamma+1), \quad \gamma = c_p/c_v,$$

где $N_i, \hat{N}_j$ — “неравномерности течения” в текущей точке перед и за скачком уплотнения соответственно: $N_1 = \partial \ln p/\partial s$, $N_2 = \partial\vartheta/\partial s$, $N_3 = \partial \ln p_0/\partial n$, $N_4 = \nu/y$ — поперечная кривизна СУ ($\nu = 0$ и $\nu = 1$ — плоский и осесимметричный случаи соответственно), $N_5 = d(\sigma+\vartheta)/dw = K_w$ — продольная кривизна скачка уплотнения (σ — текущий острый угол наклона СУ к вектору скорости, ϑ — угол наклона линии тока до скачка уплотнения к оси OX в декартовой, цилиндрической при $\nu = 1$, системе координат); ds, dn, dw — дифференциалы расстояний в направлениях касательной к линии тока, нормали к ней и касательной к СУ соответственно; p, p_0 — статическое и полное давления до СУ; $\hat{p}$ — статическое давление за ним; J, J_m — интенсивность скачка уплотнения и ее максимальное значение (прямой скачок, $\sigma = \pi/2$); M — число Маха. Используемые в работе обозначения некоторых газодинамических величин заимствованы из [2, 4].

Как отмечено ранее, все газодинамические параметры, включая наклон СУ, определены. Предполагаются известными производные параметров N_i в течении до скачка уплотнения. Тогда с помощью первых двух уравнений (1) можно получить то или иное аналитическое выражение для кривизны скачка K_w, в зависимости от того, какие из “неравномерностей” (или их линейных комбинаций) за скачком известны. Так, например [1], за СУ, присоединенным к твердой поверхности, известно значение $\hat{N}_2$, поскольку заранее задана форма линии тока, совпадающей с профилем данной поверхности, а за скачком, отраженным от границы затопленной струи, — значение $\hat{N}_1 = 0$ [4] и т. п.

Как следует из решения соответствующей задачи линейной алгебры [2], при вырождении скачка уплотнения ($J \to 1$) на слабом разрыве сохраняется простой комплекс из производных вдоль линии тока:

$$\left(\hat{N}_1 - \chi\Gamma(\hat{\mathrm{M}})\hat{N}_2\right)\Big|_{J=1} = \left(N_1 - \chi\Gamma(\mathrm{M})N_2\right)\big|_{J=1}, \quad \Gamma(\hat{M}) = \Gamma(\mathrm{M}) = \gamma\mathrm{M}^2/\sqrt{\mathrm{M}^2-1},$$

т. е.

$$[(N_1 - \chi\Gamma(\mathrm{M})N_2)\,|_{J=1}] = 0, \tag{2}$$

где выражение в квадратных скобках означает разрыв соответствующей величины на скачке уплотнения; $\chi = \pm 1$ — показатель направления СУ. Другими словами, этот “левый” (по причине знака перед χ) комплекс является инвариантным на слабом разрыве. Выразив производные

$$N_2 = \frac{-1}{\gamma\mathrm{M}^2}\frac{\partial \ln p}{\partial n}, \quad \hat{N}_2 = \frac{-1}{\gamma\hat{\mathrm{M}}^2}\frac{\partial \ln \hat{p}}{\partial \hat{n}} \tag{3}$$

из соответствующих (перед и за скачком уплотнения) уравнений импульса в проекции на нормаль к линии тока и подставив соотношения (3) в (2), перепишем последнее равенство в привычных терминах:

$$\frac{1}{\hat{p}}\left(\hat{p}_{\hat{s}}+\hat{m}^{\chi}\hat{p}_{\hat{n}}\right)=\frac{1}{p}(p_s+m^{\chi}p_n), \quad \hat{m}^{\chi}=\frac{\chi}{\sqrt{\hat{\mathrm{M}}^2-1}}, \quad m^{\chi}=\frac{\chi}{\sqrt{\mathrm{M}^2-1}}.$$

С учетом $\hat{p}=p,\ \hat{\mathrm{M}}=\mathrm{M},\ \hat{s}=s,\ \hat{n}=n$ на слабом разрыве окончательно имеем

$$\left(\hat{p}_s+m^{\chi}\hat{p}_n\right)|_{J=1}=(p_s+m^{\chi}p_n)|_{J=1}. \tag{4}$$

Выражение (4) означает равенство с точностью до сомножителя полных производных от давления по обе стороны поверхности слабого разрыва. Существенно, что коэффициент $m^{\chi}=\chi\mathrm{tg}\alpha_{\mathrm{M}}$, где $\alpha_{\mathrm{M}}=\arcsin(1/\mathrm{M})$ — угол Маха, и, следовательно, m^{χ} в каждой точке слабого разрыва совпадает с наклоном характеристики того же семейства, что и сам разрыв.

К сожалению, линейная комбинация в виде рассмотренного “левого” комплекса $\hat{N}_1-\chi\Gamma(\hat{\mathrm{M}})\hat{N}_2$ малопригодна для задания производной за СУ: разрешимость этого комплекса относительно “неравномерностей” $\hat{N}_1, \hat{N}_2$ при $J\to 1$ затруднительна, и в пределе получающаяся система двух линейных уравнений, как правило, несовместна. Как следствие, задача расчета кривизны скачка уплотнения через дифференциальные соотношения (первые два уравнения (1)) плохо обусловлена. Здесь следует напомнить, что в предельном случае ($J=1$) для определения кривизны слабого разрыва вообще отсутствует необходимость в задании каких-либо из производных за таким разрывом [2, 4].

2. “Правый” комплекс. Вывод исключающих условий

Рассмотрим противоположный описанному выше “правый” комплекс $\hat{N}_1+\chi\Gamma(\hat{\mathrm{M}})\hat{N}_2$ за скачком уплотнения. Приравняв его нулю

$$\hat{N}_1+\chi\Gamma(\hat{\mathrm{M}})\hat{N}_2=0, \tag{5}$$

где

$$\Gamma(\hat{\mathrm{M}})=\gamma\hat{\mathrm{M}}^2\,/\,\sqrt{\hat{\mathrm{M}}^2-1},$$

получим (совместно с дифференциальными соотношениями (1)) уже хорошо обусловленное уравнение для определения кривизны скачка уплотнения в широком диапазоне интенсивностей $J\in(1,J_s)$ (J_s — звуковая интенсивность СУ). Учитывая, что $\hat{N}_2$ представимо в виде (3), перепишем уравнение (5) следующим образом:

$$\hat{p}_{\hat{s}}+\hat{m}^{-\chi}\hat{p}_{\hat{n}}=0, \tag{6}$$

где

$$\hat{m}^{-\chi}=\frac{-\chi}{\sqrt{\hat{\mathrm{M}}^2-1}}=-\chi\mathrm{tg}(\hat{\alpha}_{\mathrm{M}}).$$

Видно, что коэффициент $\hat{m}^{-\chi}$ фиксирует в координатах $\hat{s}$, $\hat{n}$ за скачком уплотнения наклон характеристики противоположного ему семейства. Таким образом, выражение (6), означает равенство нулю полной производной от давления в указанном направлении или локальную для точек на задней поверхности СУ изобаричность этого направления.

Докажем, что данная дифференциальная модель течения за скачком уплотнения и соответствующая ей модельная кривизна скачка равносильны предположению об отсутствии догоняющих возмущений за его фронтом. Для этого используем соотношения на характеристиках, как это сделано в работе [7], где такой подход применялся к выводу аналогичных условий для одномерного нестационарного случая. Запишем соотношения на характеристиках за СУ, принадлежащих противоположным ($\pm\chi$) семействам, в декартовых (цилиндрических — в осесимметричном случае, $\nu = 1$) координатах, взяв в качестве зависимых переменных $\hat{\vartheta}, \hat{p}$:

$$d\vartheta \pm \chi \frac{\mathrm{ctg}\alpha}{\rho W^2} dp \pm \chi \frac{\nu}{y} \frac{\sin\vartheta \sin\alpha}{\cos(\vartheta \pm \chi\alpha)} dx = 0,$$
$$dy = \mathrm{tg}(\vartheta \pm \chi\alpha) dx, \quad \alpha \equiv \hat{\alpha}_{\text{м}}.\ ^{1} \tag{7}$$

Здесь и далее с целью упрощения записи иногда будем опускать символ «^» для обозначения величин за СУ. Соотношение (7) только для догоняющей (того же семейства χ) основной характеристики скачка уплотнения в полных производных запишется так:

$$\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial x} + \mathrm{tg}(\vartheta + \chi\alpha)\frac{\partial\vartheta}{\partial y}\right) + \chi \frac{\mathrm{ctg}\alpha}{\rho W^2}\left(\frac{\partial p}{\partial x} + \mathrm{tg}(\vartheta + \chi\alpha)\frac{\partial p}{\partial y}\right) + \chi \frac{\nu}{y} \frac{\sin\vartheta \sin\alpha}{\cos(\vartheta + \chi\alpha)} = 0. \tag{8}$$

Согласно [7], данное соотношение выполняется на самом скачке. Тогда

$$\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial x} + \mathrm{tg}(\vartheta + \chi\sigma)\frac{\partial\vartheta}{\partial y}\right) + \chi \frac{\mathrm{ctg}\alpha}{\rho W^2}\left(\frac{\partial p}{\partial x} + \mathrm{tg}(\vartheta + \chi\sigma)\frac{\partial p}{\partial y}\right) + \chi \frac{\nu}{y} \frac{\sin\vartheta \sin\sigma}{\cos(\vartheta + \chi\sigma)} = 0, \tag{9}$$

где $\sigma \equiv \hat{\sigma}$ — текущий острый угол между вектором скорости за скачком уплотнения и касательной к нему в данной точке. Существенно, что уравнение (9) описывает краевой эффект догоняющего вдоль характеристики возмущения распространением этого возмущения вдоль самого СУ. Несмотря на то, что наклоны $\mathrm{tg}(\hat{\vartheta} + \chi\hat{\alpha})$ и $\mathrm{tg}(\hat{\vartheta} + \chi\hat{\sigma})$ мало отличаются друг от друга, переход от (8) к уравнению (9) должен быть формально обоснован. Получим условия, при которых уравнения (8) и (9) совпадают и, следовательно, краевой эффект исключается [7]. Применяя несложные тригонометрические преобразования к разности уравнений (9) и (8), запишем

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial y} + \chi \frac{\mathrm{ctg}\alpha}{\rho W^2}\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\nu}{y}\sin\vartheta\cos\vartheta = 0$$

или с учетом

$$\frac{\mathrm{ctg}\alpha}{\rho W^2} = \frac{\sqrt{\mathrm{M}^2 - 1}}{\gamma \mathrm{M}^2}\frac{1}{p} = \frac{1}{\Gamma(\mathrm{M})}\frac{1}{p}$$

окончательно получим

$$\frac{\partial \ln p}{\partial y} + \chi\Gamma(\mathrm{M})\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial y} + \frac{\nu}{y}\sin\vartheta\cos\vartheta\right) = 0. \tag{10}$$

Несложно показать, что левые части уравнений (10) и (5) совпадают, поскольку для $\hat{N}_1$, $\hat{N}_2$ в декартовой (цилиндрической при $\nu = 1$) системе координат имеют место соотношения

[1]Переменные ρ и W имеют смысл плотности и скорости соответственно. *Ред.*

$$\hat{N}_1 = \left[\frac{\partial \ln \hat{p}}{\partial y}\sin\hat{\vartheta} + \left(\frac{\partial \hat{\vartheta}}{\partial y} + \frac{\nu}{y}\sin\hat{\vartheta}\cos\hat{\vartheta}\right)\gamma\hat{\mathrm{M}}^2\cos\hat{\vartheta}\right]\Delta^{-1},$$

$$\hat{N}_2 = \left[\frac{\partial \ln \hat{p}}{\partial y}\,\frac{\hat{\mathrm{M}}^2 - 1}{\gamma\hat{\mathrm{M}}^2}\cos\hat{\vartheta} + \left(\frac{\partial \hat{\vartheta}}{\partial y} + \frac{\nu}{y}\sin\hat{\vartheta}\cos\hat{\vartheta}\right)\sin\hat{\vartheta}\right]\Delta^{-1},$$

$$\Delta = 1 - \left(\hat{\mathrm{M}}\cos\hat{\vartheta}\right)^2.$$

Аналогично для получения уравнения (6) непосредственно из (10) производную $\partial\hat{\vartheta}/\partial y$ в (10) необходимо выразить через производные $\partial \ln \hat{p}/\partial x$, $\partial \ln \hat{p}/\partial y$ из основных уравнений движения. Тогда, опустив несложные математические выкладки, окончательно имеем

$$\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y}\left(\frac{\cos(\vartheta + \chi\alpha)\sin(\vartheta - \chi\alpha)}{\cos(\vartheta + \alpha)\cos(\vartheta - \alpha)}\right) = 0. \tag{11}$$

Здесь множитель в круглых скобках для случаев $\chi = \pm 1$ равен $\mathrm{tg}(\hat{\vartheta} \mp \hat{\alpha})$. Следовательно, уравнение (11) представляет собой декартов аналог условия (6), т. е. это условие, как и (5), является исключающим.

3. Задача о взаимодействии скачка уплотнения с тонким вихревым слоем

Условие (5) с помощью (3) запишем следующим образом:

$$\left(\frac{d \ln \hat{p}}{d\hat{\vartheta}}\right)_{\hat{S}} = -\chi\Gamma(\hat{\mathrm{M}}), \tag{12}$$

где индекс $\hat{S}$ означает, что производная берется вдоль линии тока за скачком уплотнения.

Рассмотрим задачу о падении фронта косого скачка уплотнения на тонкий сдвиговый или пограничный слои только в сверхзвуковой его части (рис. 1, *а*). Тонкий слой на момент взаимодействия его с СУ считаем сформировавшимся, поэтому локально (в зоне взаимодействия) влиянием вязких сил пренебрегаем. Последнее обстоятельство позволяет рассматривать данную задачу как модельную задачу о рефракции СУ в тонком вихревом слое в рамках общей математической модели идеального совершенного газа.

Считая течение в тонком вихревом слое изэнтальпийным ($H = \mathrm{const}$, H — полная энтальпия), текущие параметры перед скачком уплотнения определим по заданному непрерывному профилю числа Маха и известным параметрам внешнего (на бесконечности) равномерного набегающего потока. Давление и угол наклона линии тока в тонком слое, не возмущенном кривизной поверхности стенки и падением скачка уплотнения, всюду перед ним считаем постоянными ($\partial p/\partial n = \partial\vartheta/\partial n = 0$).

При известной текущей интенсивности скачка уплотнения J в любой точке слоя процесс его проникновения в тонкий вихревой слой можно отобразить на плоскость поляр (рис. 1, *б*), для чего удобно представить этот непрерывный процесс дискретным [1, 4, 8]. При этом используются координаты $\Lambda = \ln(J)$, где β — угол преломления вектора скорости на СУ. Поляры *1* и *2* соответствуют двум соседним линиям тока в невозмущенном течении с бесконечно малым различием (в силу непрерывности заданного профиля) чисел

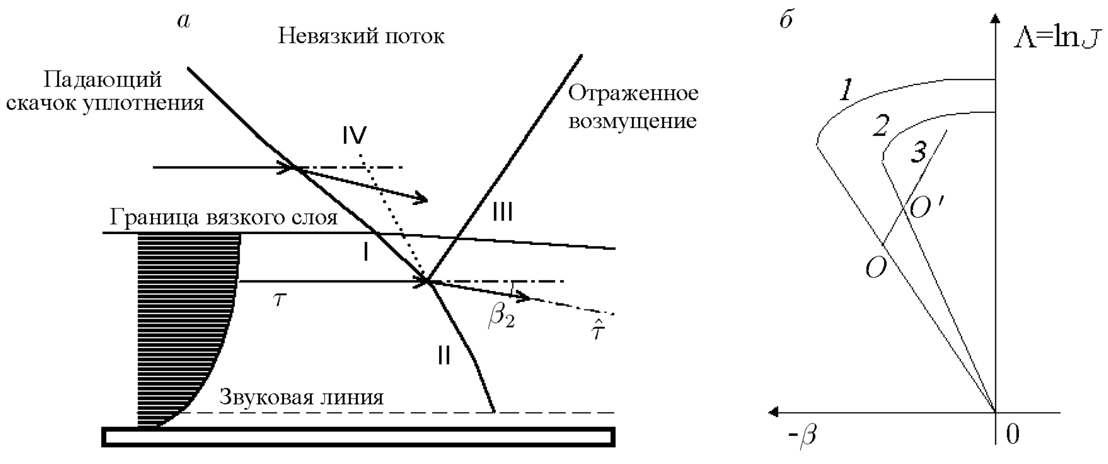

Рис. 1. Схема взаимодействия скачка уплотнения с тонким вихревым слоем в невязкой постановке в физической плоскости (*а*) и в плоскости поляр *1–3* (*б*).

Маха, а поляра *3* отвечает линии тока за падающим скачком (число Маха $\hat{\mathrm{M}}$). Заметим, что коэффициент $\Gamma(\hat{\mathrm{M}})$ в выражениях (5) и (12) представляет собой модуль наклона поляры *3* в начале системы координат ($\beta_3 = \Lambda_3 = 0$).

Классическая схема взаимодействия СУ с тангенциальным разрывом τ предполагает, что все три структурных составляющих этого взаимодействия в физической плоскости являются газодинамическими разрывами (отметим, что центрированную волну разрежения в центральной точке условно можно отнести к газодинамическим разрывам) [2, 4, 8, 9]. Кроме того, интенсивности всех трех упомянутых разрывов ($J_2 = J_1 J_3$) в этой точке должны удовлетворять условию $\Lambda_2 = \Lambda_1 + \Lambda_3$. Это условие и условие на углы $\beta_2 = \beta_1 + \beta_3$ образуют известные условия на тангенциальном разрыве $\hat{\tau}$, который, как и отраженный разрыв, является вырожденным в частной задаче проникновения скачка уплотнения в тонкий вихревой слой.

Представив давление $\hat{p}$ и угол наклона $\hat{\vartheta}$ в соотношении (12) как $\hat{p} = pJ$ и $\hat{\vartheta} = \vartheta + \beta$, а также учитывая постоянство p и ϑ, перепишем его в виде

$$(d\Lambda/d\beta)_{\hat{S}} = -\chi\Gamma(\hat{\mathrm{M}}). \tag{13}$$

Оно означает, что переход с поляры *1* на поляру *2* должен происходить по траектории поляры *3* противоположного семейства, точнее, по ее линейному представлению.

4. Рефракционная кривизна скачка уплотнения. Усеченная модель течения за скачком

Модель (5) не учитывает догоняющие основной скачок возмущения (пунктирная линия на рис. 1, *а*). При этом весь процесс описывается минимальным количеством элементов I – III.

Подобный процесс для акустических или электромагнитных волновых фронтов, несмотря на их различную физическую природу, обычно называют рефракцией. Применительно к скачкам уплотнения (ударным волнам), взаимодействующим с тангенциальным (контактным) разрывом, этот термин использовался, например, в [2, 4, 9]. Таким образом, для задач с непрерывным профилем параметров в слое локальное дискретное представление процесса проникновения в него СУ (рис. 1, *а*; без догоняющего возмущения IV) можно называть возможной рефракционной моделью.

Вернемся к исходному (общему) случаю, не связанному обязательно с проникновением скачка уплотнения в тонкий вихревой слой. Следуя приведенным выше рассуждениям, кривизну СУ, определенную через соотношения (1), (5), назовем рефракционной кривизной скачка K_{ref}. Такая кривизна СУ является лишь модельной и не учитывает краевой эффект за скачком уплотнения в виде догоняющего возмущения. Очевидно, что если в реальном течении упомянутые возмущения невелики, то и значение K_{ref} должно мало отличаться от полной кривизны скачка уплотнения K_w (формула (1), см. также экспликацию к ней), которая соответствует объемлющей модели идеального газа без каких-либо ограничений течения за СУ. Очевидно, что в последнем случае нельзя ограничиться локальным дискретным представлением взаимодействия (рис. 1, *а*) в виде жесткой трехэлементной схемы. При отображении движения на плоскость поляр необходимо допустить, что линия $O - O'$ (рис. 1, *б*) может не принадлежать семейству поляр (ударной поляры или поляры разрежения), и, следовательно, догоняющее возмущение может иметь место. Известно, что решение ряда задач [4, 10], например задачи внешнего обтекания, с помощью метода характеристик при построении фронта СУ основано на учете догоняющего возмущения.

Рассматривая уравнение (6) как линейную комбинацию ограниченных производных $\hat{p}_s, \hat{p}_n$ с весами 1, $\hat{m}^{-\chi}$ соответственно и учитывая, что

$$\lim_{\hat{\mathrm{M}} \to 1+0} \hat{m}^{-\chi} = \infty,$$

можно сделать вывод — при $\hat{\mathrm{M}} \to 1{+}0$ фактически “работает” усеченная модель, в которой $\partial\hat{p}/\partial\hat{n} = 0$. Заметим, что это условие имеет иной смысл, нежели внешне схожее с ним условие, широко применяемое в погранслойных течениях, таких, например, как течение до СУ, описанное выше. Указанное условие выполняется лишь в точках задней поверхности скачка, каждая из которых характеризуется своим положением линии тока, а следовательно, и нормали к ней. Кроме того, производные $\partial\hat{p}/\partial\hat{s}$ в таких точках не связаны интегралом Бернулли для внешней линии тока, как это имеет место в математических моделях погранслойных течений, а вычисляются непосредственно через дифференциальные соотношения (1).

Модельная кривизна СУ в случае применения усеченной модели (см. формулу (3)) определяется из второго соотношения системы уравнений (1).

5. Особенности вычислительного алгоритма

При конструировании численных алгоритмов знание модельной кривизны скачка уплотнения в любой расчетной точке позволяет повторным интегрированием вдоль его фронта (вниз по течению) определить новые наклон и координату последнего. Затем необходимо вычислить новые текущие газодинамические параметры перед ним, включая производные. Это легко сделать, если невозмущенное течение перед СУ задано аналитически либо, как в тонком вихревом слое, оно имеет известные постоянные или автомодельные (постоянство в некоторых координатах) профили. Затем снова рассчитывается кривизна и т. д. В общем случае необходимо совместно интегрировать уравнения в области перед фронтом СУ с уравнениями самого фронта. Очевидно, что шаг численного интегрирования может быть сделан сколь угодно малым.

Таким образом, в случае вырожденного течения перед СУ, как в рассмотренном выше тонком вихревом слое, задача проникновения скачка в слой сводится к задаче Коши для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка со сложной правой частью. При этом в качестве начальных условий используются известные координаты и наклон скачка уплотнения на внешней границе тонкого вихревого слоя, отделяющей последний от "невязкого потока" (рис. 1, *а*).

6. Результаты расчетов

Результаты вычислительных экспериментов для осесимметричного тонкого вихревого слоя, выполненных как по вышеописанным моделям, так и с использованием численного метода характеристик на основе полной двумерной математической модели (системы уравнений газовой динамики), представлены на рис. 2. В рамках полной модели для выявления различия в поведении СУ варьировались граничные условия, задаваемые на внешней линии тока (границе вязкого слоя, см. рис. 1, *а*). Как уже отмечалось в п. **3**, текущие газодинамические параметры перед скачком уплотнения в невозмущенной части слоя могут быть определены по заданному непрерывному профилю числа Маха и известным параметрам равномерного внешнего набегающего невязкого потока (рис. 2, кривые *5*). Профиль числа Маха в тонком вихревом слое во всех расчетах задавался в виде кубического полинома с непрерывным переходом по 1-й и 2-й производным от параметров невязкого потока (помечены индексом ∞). В расчетах вычислительные координаты x (вдоль оси симметрии) и y (поперек слоя) обезразмерены толщиной самого слоя, так что он в точке падения СУ имеет единичную толщину. Значения безразмерных газодинамических параметров внешнего потока и параметров на оси, совместно определяющие рассчитываемый невозмущенный тонкий вихревой слой, следующие: $\mathrm{M}_\infty = 2.5$; $\rho_\infty = 1$; $W_\infty = 1$; $\vartheta_\infty = 0$ при $y = 1$ и $\mathrm{M}_{y=0} = 1.01$; $\vartheta_{y=0} = 0$ при $y = 0$. Энтальпия, давление и полная энтальпия определялись из соотношений

$$h_\infty = W_\infty^2/[(\gamma-1)\mathrm{M}_\infty^2], \quad p_\infty = p_{y=0} = \rho_\infty h_\infty(\gamma-1)/\gamma, \quad H_\infty = h_\infty + W_\infty^2/2.$$

Текущая энтальпия внутри слоя рассчитывалась по известному профилю числа Маха ($\mathrm{M} = \mathrm{M}(y)$, $y \in (0, 1]$):

$$h = H_\infty \Big/ \left[1 + \frac{\gamma-1}{2}\mathrm{M}^2\right], \quad p = p_\infty = p_{y=0} = \mathrm{const}, \quad \vartheta = \vartheta_\infty = \vartheta_{y=0} = 0.$$

Во всех расчетах падающий скачок уплотнения имел 25 %-ю (от звуковой) начальную интенсивность J_∞ , которая определялась как $J_\infty = J_S^{t/100}$, $t = 1, 2, \ldots, 25$. Для расчетов использовались следующие математические модели:

1) рефракционная модель взаимодействия скачка уплотнения с тонким вихревым слоем (кривизна во всех точках СУ определялась по соотношениям (1), (5));

2) усеченная модель ($\partial\hat{p}/\partial\hat{n} = 0$) — кривизна во всех точках скачка вычислялась по второму соотношению (1), $\hat{N}_2 = 0$;

3) полная двумерная модель — вариант сеточного метода характеристик с выделением СУ [4] с граничным условием $\hat{N}_2 = 0$ на внешней линии тока, что соответствует затеканию тонкого вихревого слоя в конический сужающийся канал;

4) то же, с граничным условием $\hat{N}_1 = 0$ на внешней линии тока, что отвечает струйному характеру течения (перерасширенная струя, истекающая в затопленное пространство).

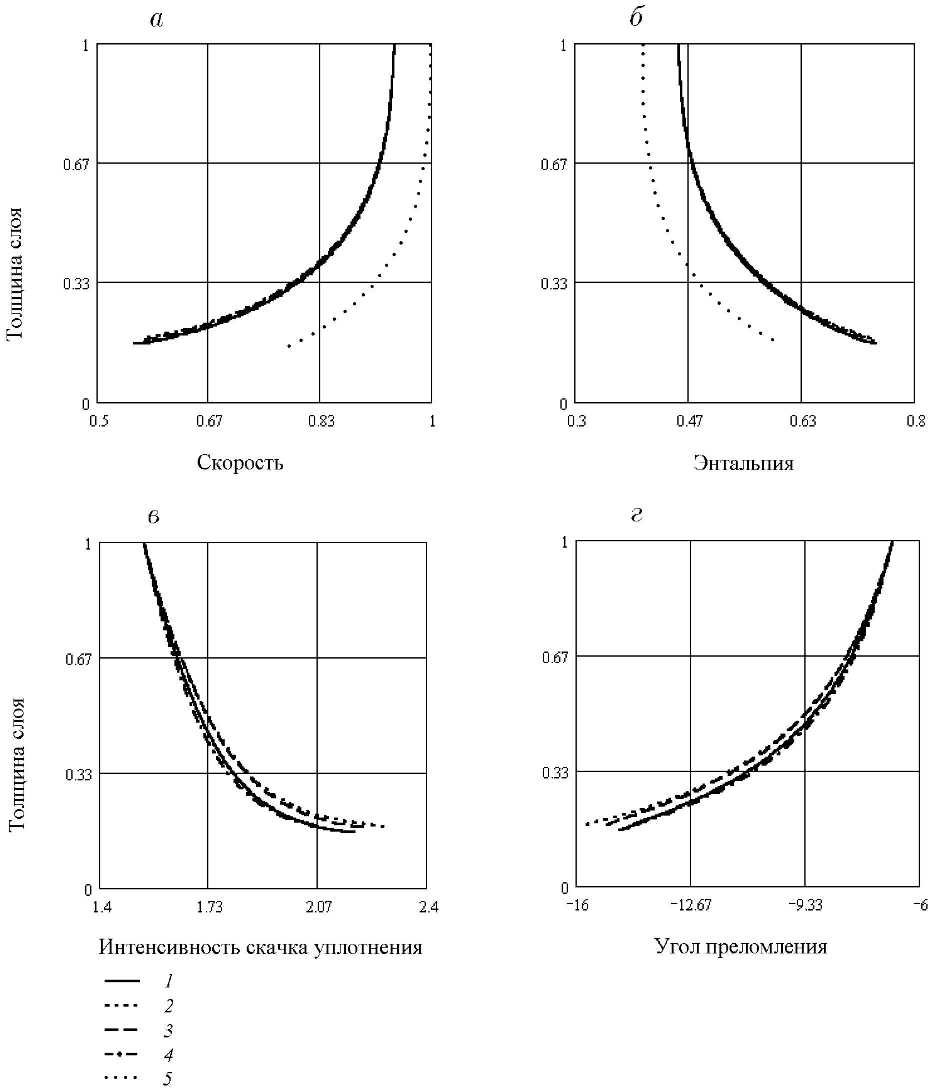

Рис. 2. Распределение параметров по толщине тонкого вихревого слоя вдоль задней поверхности скачка уплотнения. *1* — рефракционная модель; *2* — усеченная модель; *3* — полная двумерная модель (граничное условие — прямолинейная линия тока за скачком); *4* — то же (граничное условие — постоянство давления вдоль линии тока за скачком); *5* — в невозмущенном тонком вихревом слое перед скачком уплотнения.

При численной реализации всех математических моделей пространственный шаг расчетной сетки полагался равным не более 0.005, что в сочетании с использованием разностных схем второго порядка аппроксимации обеспечивало достаточную точность вычислений. Расчет останавливался при достижении скачком уплотнения звуковой интенсивности.

В результатах, полученных с помощью указанных моделей, заметного различия не наблюдалось: оно имеет место только в профилях скорости и энтальпии до скачка уплотнения (кривые *5*, расположенные отдельно от других) и за ним (остальные кривые) (рис. 2, *а, б*). На рис. 2, *в, г* различие в профилях параметров уже заметно. Все кривые лежат в достаточно узком (максимальная относительная ошибка 10 %) коридоре величины, однако наиболее близкими оказываются первая и четвертая, вторая и третья модели, что можно объяснить близостью (или совпадением) условий за СУ (приближенные модели 1, 2) граничным условиям при расчете течения методом характеристик на основе полной двумерной модели. Наиболее далекими оказываются вторая и четвертая модели — они и определяют разброс величин. На графиках также заметен универсальный характер рефракционной модели: соответствующие кривые располагаются внутри коридора величины, ближе к его середине. Следует напомнить, что только рефракционная модель исключает влияние догоняющих возмущений.

Заключение

Все вышеприведенные результаты, связанные с использованием приближенных моделей проникновения скачка уплотнения в неравномерный поток, в том числе подтверждающие их малое различие с точной (полной) моделью, и сравнительные расчеты для тонкого вихревого слоя в дальнейшем могут являться основой для выбора модели взаимодействия СУ с неравномерным потоком. Предполагаемое упрощение позволяет в ряде случаев свести исходную начально-краевую задачу к задаче Коши для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка, решение которого определяет геометрию фронта проникающего в неравномерный поток СУ, значения параметров и производных за ним.

Таким образом, при исключении краевого эффекта описанию подлежит только ближайшая, интересующая исследователя окрестность скачка, что и обеспечивает значительное снижение объема вычислительных затрат. В случае, когда необходимо продолжить расчет проникновения скачка в ту или иную среду, не зная краевых условий за ним, предложенная в работе рефракционная модель оказывается вполне пригодной. В [7] применительно к одномерному нестационарному случаю построена приближенная модель распространения ударной волны, подобная рефракционной модели скачка уплотнения в стационарном течении, и утверждается, что она достаточно точно описывает происходящий процесс, если ударная волна увеличивает свою интенсивность по мере ее продвижения (сходящиеся волны). Рассмотренная в настоящей работе задача о проникновении СУ в тонкий вихревой слой вполне укладывается в эти рамки, так как интенсивность проникающего в слой скачка постоянно увеличивается.

Список литературы

[1] Бай Ши-и. Введение в теорию течения сжимаемой жидкости. М.: Изд-во иностр. лит., 1962.

[2] Усков В. Н. Интерференция стационарных газодинамических разрывов // Сверхзвуковые газовые струи: Сб. ст. Новосибирск: Наука, 1983. С. 22–46.

[3] Русанов В. В. Производные газодинамических функций за искривленной ударной волной. М.: Ин-т прикл. мат. им. М.В. Келдыша, 1973 (Препр. / АН СССР; №18).

[4] Адрианов А. Л., Старых А. Л., Усков В. Н. Интерференция стационарных газодинамических разрывов. Новосибирск: Наука, 1995.

[5] Адрианов А. Л. Об одной модели течения за криволинейным скачком уплотнения: Тр. семин. “Мат. моделирование в механике”. Красноярск, 1997. Деп. в ВИНИТИ 07.11.1997, №3357, В-97.

[6] Адрианов А. Л. Об одной модели течения за криволинейным скачком уплотнения. Ч. 2. / Под ред. В. К. Андреева: Тр. семин. “Мат. моделирование в механике”. Красноярск, 1999. Деп. в ВИНИТИ 24.06.1999, №1999, В-99. С. 5–11.

[7] Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977.

[8] Баженова Т. В., Гвоздева Л. Г. Нестационарные взаимодействия ударных волн. М.: Наука, 1977.

[9] Полачек Х., Зигер Р. И. Взаимодействие ударных волн // Основы газовой динамики / Под ред. Г. Эммонса. М.: Изд-во иностр. лит., 1963. С. 446–489.

[10] Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М.: Наука, 1968.

Поступила в редакцию 23 ноября 1999 г.,
в переработанном виде — 26 июня 2000 г.