ПРИБЛИЖЕННЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ СТАЦИОНАРНЫХ И НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ С ОДНОСТОРОННИМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

А. В. Горбовец, И. Д. Евзеров
Научно-исследовательский институт автоматизированных систем планирования и управления в строительстве, Киев, Украина
e-mail: yevzerov@ambernet.kiev.ua

New formulation for one-side stationary and nonstationary problems with one-side contractions is given. Using this formulation, approximate schemes are constructed, stability and error estimates are proved.

Пусть V — замкнутое подпространство гильбертова пространства H; $a_0(u,v)$, $b(u,v)$, $c(u,v)$ — симметричные ограниченные на V билинейные формы; a_0, b коэрцитивны на V, $c(u,u) \geq 0$; (f,v) — линейный функционал на H; $g_{1,i}(u)$, $g_{2,i}(u)$ — линейные ограниченные на V функционалы.

Рассмотрим

$$d_k(u,v) = \sum_{i=1}^{N_k} d_{k,i} g_{k,i}(u) g_{k,i}(v), \quad d_{k,i} > 0, \quad k = 1,2,$$

$$d(u,v) = d_1(u,v) + d_2(u,v),$$

$$a(u,v) = a_0(u,v) + d(u,v),$$

$$g_{k,i}(Su) = \begin{cases} I_{k,i}, & g_{k,i}(u) \geq G_{k,i} \\ g_{k,i}(u) - I_{k,i}, & g_{k,i}(u) < G_{k,i}, \end{cases}$$

$$G_{k,i} \in R, \quad I_{1,i} = 0, \quad I_{2,i} = G_{2,i},$$

$$d_k(Su,v) = \sum_{i=1}^{N_k} d_{k,i} g_{k,i}(Su) g_{k,i}(v),$$

$$a(u) = a(u,u), \quad b(u) = b(u,u) \quad \text{и т. д.},$$

$$||u||^2 = a(u), \quad ||u||_1^2 = b(u), \quad ||u||_0^2 = d(u).$$

Из неотрицательности d и коэрцитивности a_0 следует, что

$$||u||_0^2 \leq q||u||^2 \quad 0 < q < 1. \tag{1}$$

Из очевидного неравенства $|g_{k,i}(Su_1) - g_{k,i}(Su_2)| \leq |g_{k,i}(u_1) - g_{k,i}(u_2)|$ вытекает, что

$$|d(Su_1,v) - d(Su_2,v)| \leq ||u_1 - u_2|| \cdot ||v||_0. \tag{2}$$

Предполагается, что справедливо неравенство

$$||u||_0 \leq \sqrt{c(u)} + K||u||_1. \tag{3}$$

Стационарная задача с односторонними ограничениями формулируется следующим образом: найти $u \in V$, удовлетворяющее при $\forall v \in V$ равенству

$$a(u, v) - d(Su, v) = (f, v). \tag{4}$$

Из (2) и коэрцитивности a_0 следует неравенство

$$a(u_1 - u_2) - [d(Su_1, u_1 - u_2) - d(Su_2, u_1 - u_2)] \geq a(u_1 - u_2) - d(u_1 - u_2) \geq a_0(u) \geq K||u||^2,$$

из которого вытекает существование и единственность решения задачи (4).

Приближенная схема имеет вид

$$a(u_m, v) - d(Su_{m-1}, v) = (f, v)u_0 = 0, \quad m = 1, 2, ... \tag{5}$$

Теорема 1. *Справедлива оценка погрешности*

$$||u - u_m|| \leq q^m ||u|| \quad 0 < q < 1. \tag{6}$$

Доказательство. Из (4), (5) следует

$$a(u - u_m, v) = d(Su, v) - d_0(Su_{m-1}, v).$$

Полагая $v = u - u_m$ и пользуясь неравенствами (1), (2), получим

$$||u - u_m||^2 \leq ||u - u_m||_0 \cdot ||u - u_{m-1}||_0 \leq q||u - u_{m-1}|| \cdot ||u - u_m||,$$

откуда следует (6). Для ускорения сходимости итерационного процесса (5) может применяться метод, предложенный в [1, 2]:

$$u^* = u_{m-1} + \frac{u_m - u_{m-1}}{1 - p}, \quad p = \frac{a(u_m - u_{m-1}, u_{m-1} - u_{m-2})}{||u_{m-1} - u_{m-2}||^2}.$$

Нестационарная задача с односторонними ограничениями: найти $u = u(t) \in V$, удовлетворяющее при $t \in [0, T]$ и $\forall v \in V$ равенству

$$b(u'', v) + c(u', v) + a(u, v) - d(Su, v) = (f(t), v), \tag{7}$$

а также начальным условиям $u(0) = u'(0) = 0$. Из (1) – (3) следует неравенство

$$\int_0^t \Big\{ b(u_1'' - u_2'', u_1' - u_2') + c(u_1' - u_2', u_1' - u_2') + a(u_1 - u_2, u_1' - u_2') -$$

$$- [d(Su_1, u_1' - u_2') - d(Su_2, u_1' - u_2')] \Big\} ds \geq \frac{1}{2} [b(u_1' - u_2') + a(u_1 - u_2)] +$$

$$+ \int_0^t [c(u_1' - u_2') - ||u_1 - u_2||_0 \cdot ||u_1' - u_2'||] ds \geq$$

$$\geq \frac{1}{2}\left[b(u_1'-u_2')+a(u_1-u_2)\right]-K\int\limits_0^t[a(u_1-u_2)+b(u_1'-u_2')]ds,$$

из которого методами [3] доказывается существование и единственность решения задачи (7). В стандартных обозначениях $t_m = m\Theta$, $u_m = u(t_m)$, $\alpha_m u = 2^{-1}(u_{m+1}+u_{m-1})$, $\delta_m u = \Theta^{-1}(u_{m+1}-u_m)$, $\beta_m u = 2^{-1}(\delta_m u + \delta_{m-1}u)$, $\gamma_m u = \Theta^{-1}(\delta_m u - \delta_{m-1}u)$ запишем разностную схему второго порядка аппроксимации:

$$b(\gamma_m u, v)+c(\beta_m u, v)+a(\alpha_m u, v)-d(Su_m, v) = (f_m, v), \quad m = 0, 1, ..., M, \quad u_0 = u_{-1} = 0. \tag{8}$$

Теорема 2. *Для схемы (6) справедливо неравенство устойчивости*

$$||\delta_m u||_1 + ||u_m|| \leq K. \tag{9}$$

Доказательство. Полагая в (8) $v = \Theta\beta_m u$ и пользуясь очевидными равенствами

$$b(\gamma_m u, \beta_m u) = (2\Theta)^{-1}\left[b(\delta_m u) - b(\delta_{m-1}u)\right], \quad a(\alpha_m u, \beta_m u) = (4\Theta)^{-1}\left[a(u_{m+1}) - a(u_{m-1})\right],$$

получим

$$b(\delta_m u) + 2^{-1}\left[a(u_{m+1}) + a(u_m)\right] + 2\Theta\sum_{i=0}^{m} c(\beta_i u) = 2\Theta\sum_{i=0}^{m}\left[(f_i, \beta_i u) + d(Su_i, \beta_i u)\right].$$

Применим (1)–(3). Тогда

$$b(\delta_m u) + a(u_{m+1}) \leq K\Theta\left[\sum_{k=0}^{m-1}(b(\beta_k u) + a(u_k)) + a(u_k)\right].$$

Из дискретного варианта леммы Гронуолла [4] следует (9). Из устойчивости стандартно вытекает оценка погрешности

$$||u' - \delta_m u||_1 + ||u - u_m|| \leq K\Theta^2.$$

Вычислительным преимуществом предложенных приближенных схем является то, что правые части уравнений не зависят от номера итерации или шага по времени.

Список литературы

[1] Красносельский М. А. и др. Приближенное решение операторных уравнений. М.: Наука, 1969.

[2] Люстерник Л. А. Замечания к численному решению краевых задач уравнения Лапласа и вычислению собственных значений методом сеток // Тр. Мат. ин-та АН СССР. 1947. Т. 20.

[3] Дюво Г., Лионс Ж.-Л. Неравенства в механике и физике. М.: Наука, 1980.

[4] Гловински Р., Лионс Ж.-Л., Тремольер Р. Численное исследование вариационных неравенств. М.: Мир, 1979.

Поступила в редакцию 18 июня 1999 г.
в переработанном виде — 23 ноября 1999 г.