

ПРОСТРАНСТВЕННАЯ ЗАДАЧА О ПЕРЕНОСЕ МАСС ПРИЛИВНЫМИ ВОЛНАМИ*

Ю. М. ГРИГОРЬЕВ

Новосибирский государственный университет, Россия

А. Ф. РЕВУЖЕНКО

Институт горного дела СО РАН, Новосибирск, Россия

e-mail: revuzh@isu.nsk.su

A three-dimensional model is considered which allows one to describe an experimental result and to evaluate a mass transfer effect of a tidal wave. A quaternionic general solution of the Stokes system is obtained.

Введение

Методы исследования задач механики сплошных сред можно разбить на две большие группы. Первая — это теоретические методы, в том числе и методы, связанные с вычислительными технологиями. Вторая группа — это экспериментальные методы, которые могут быть реализованы как в лаборатории (работы по моделированию), так и в натуральных условиях. Как известно, любое полное исследование задачи должно опираться на обе группы методов. При этом экспериментальные модели должны удовлетворять определенным критериям подобия. Есть, однако, круг задач, где критерии подобия выдержать практически невозможно. В таких случаях в эксперименте можно получить только качественные результаты, а решение всех остальных проблем перенести на численные модели. Одной из таких является задача о приливном деформировании небесных тел.

Любое тело, которое находится в гравитационном поле некоторой массы, испытывает действие приливных сил. Приливные силы приводят к растяжению тела в направлении к возмущающей массе и к сжатию его в ортогональных направлениях. Если тело при этом поворачивается относительно указанных направлений, то по нему бежит приливная волна.

Движение приливной волны может приводить к направленному переносу внутренних масс тела. В работе [1] описан эффект направленного переноса масс, полученный на трехмерной экспериментальной модели в лабораторных условиях. Так как в эксперименте невозможно было выдержать критерии подобия и воспроизвести приливные силы, то был использован кинематический подход. Идея этого подхода состоит в том, что на границе образца, по форме близкого к шару, задавались скорости, имитирующие направленное движение приливной волны. Через определенное число оборотов волны образец вскрывался и исследовалось перемещение его внутренних масс. Ясно, что такой подход мог дать только качественный результат.

*Работа выполнена при частичной поддержке фондов ИНТАС — РФФИ, проект №95-0742.

© Ю. М. Григорьев, А. Ф. Ревуженко, 2000.

В [2] рассматривалось количественное описание эффекта в рамках плоской постановки. В настоящей работе делается следующий шаг — рассматривается трехмерная теоретическая модель в рамках такой же кинематической постановки, которая была реализована в эксперименте. Это позволило описать экспериментальный факт и сделать расчет эффекта при реальных высотах приливной волны.

1. Постановка задачи

Сначала сделаем ряд упрощающих предположений. Допустим, что возмущающая масса только одна и что она лежит в экваториальной плоскости исследуемого тела. Форму тела выберем в виде вытянутого эллипсоида вращения Ω с малым эксцентриситетом ε , с осью вращения x и границей S (рис. 1). Здесь ставится задача оценки только одного возможного эффекта приливного взаимодействия, а именно, направленного переноса масс приливными волнами. Поэтому все остальные факторы, которые играют существенную роль в процессе деформирования (температура, неоднородность, слоистое строение тела, фазовые переходы и т. д.), здесь учитываться не будут. Будем предполагать, что тело является однородным и линейно вязким. В кинематической постановке самогравитация и неоднородность температуры не учитываются. Поэтому конвективные течения здесь также исключены. При достаточно малых высотах приливной волны и малой скорости ее движения можно ограничиться ползущим приближением. Тогда задача сводится к решению уравнений Стокса [3]:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad \nabla p - \mu \Delta \mathbf{v} = 0, \quad \mathbf{r} \in \Omega, \quad p \in C^1(\Omega), \quad \mathbf{v} \in C^2(\Omega). \quad (1.1)$$

Здесь $p \equiv p(\mathbf{r}) \equiv p(x, y, z)$ — давление, $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ — вектор скорости, μ — динамический коэффициент вязкости.

Для моделирования приливных деформаций поставим первую краевую задачу для системы Стокса в Ω . Граничное поле скоростей принимается таким, что каждая точка на S движется горизонтально (ось z направлена вертикально вверх), причем частицы, находящиеся на одном меридиане ($\varphi = \text{const}$), все время остаются на одном меридиане, а частицы экватора ($\vartheta = \pi/2$) имеют постоянную по величине скорость v_0 . Можно показать, что тогда каждая частица с координатами ϑ, φ на S имеет горизонтальную скорость,

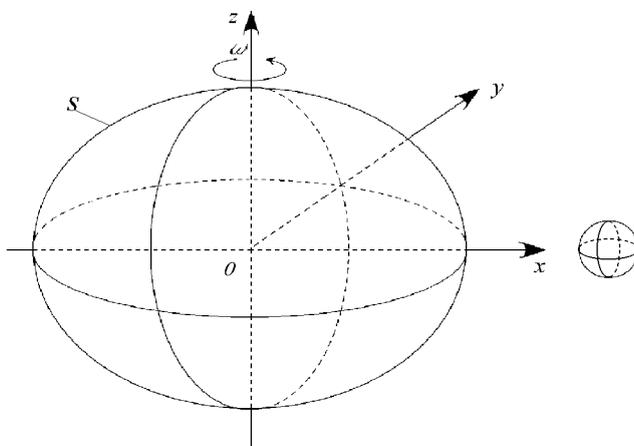


Рис. 1.

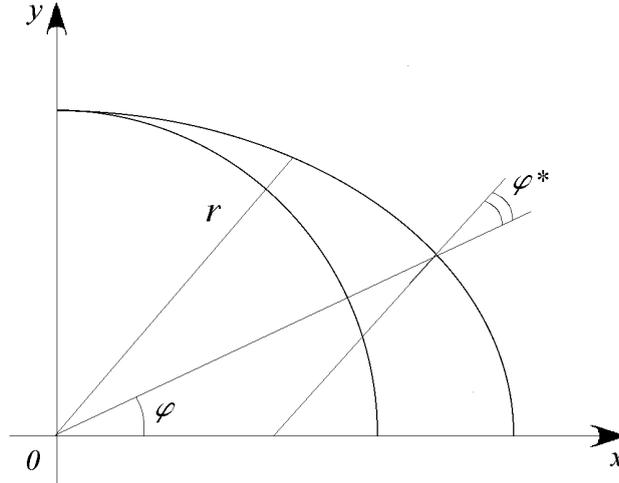


Рис. 2.

направленную по касательной к S и равную

$$v(\vartheta, \varphi) = v_0 \sin \vartheta \sqrt{\frac{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \varphi}{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi}}. \quad (1.2)$$

Уравнение поверхности S имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2 + z^2}{b^2} = 1,$$

или в сферических координатах

$$r = \frac{b}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi}}, \quad \varepsilon^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2}, \quad a > b. \quad (1.3)$$

Граничные условия рассматриваемой задачи в сферических координатах принимают следующий вид:

$$\begin{cases} v_r \equiv w_r = -v(\vartheta, \varphi) \sin \vartheta \sin \varphi^*, \\ v_\vartheta \equiv w_\vartheta = -v(\vartheta, \varphi) \cos \vartheta \sin \varphi^*, \\ v_\varphi \equiv w_\varphi = v(\vartheta, \varphi) \cos \varphi^*, \end{cases} \quad \mathbf{r} \in S, \quad (1.4)$$

где φ^* — угол между нормалью к граничному эллипсу и полярным радиусом к рассматриваемой точке поверхности S (рис. 2). На рис. 2 показана часть сечения эллипсоида горизонтальной плоскостью, проходящей через точку с координатами ϑ и φ на поверхности S .

Таким образом, необходимо решить первую краевую задачу для системы Стокса (1.1) с граничным полем скоростей (1.4).

2. Общие решения системы Стокса

Пусть $\Omega^* \subset \mathbb{R}^3$ — область, звездная относительно начала координат; $I^\alpha f \equiv \int_0^1 t^\alpha f(\mathbf{r}t) dt = \int_0^1 t^\alpha f(rt, \vartheta, \varphi) dt$ — оператор радиального интегрирования.

Теорема 2.1. *Общее решение системы Стокса (1.1) в Ω^* представляется в виде:*

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \mathbf{F} + \frac{R^2 - r^2}{2} \nabla I^{-1} \nabla \cdot \mathbf{F}, \\ p &= -\mu(2\nabla \cdot \mathbf{F} + I^{-1} \nabla \cdot \mathbf{F}) + \text{const}, \quad \mathbf{r} \in \Omega^*, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где $\Delta \mathbf{F} = 0$, $\mathbf{r} \in \Omega^*$; $\nabla \cdot \mathbf{F}(0) = 0$; $R = \text{const}$.

Доказательство. Пусть \mathbf{v}, p — векторное и скалярное поля, представленные в виде (2.1). Используя свойства оператора I^α (см. [4]), дифференцированием устанавливается, что функции \mathbf{v}, p удовлетворяют системе Стокса (1.1).

Пусть теперь \mathbf{v}, p — решение системы Стокса. Введем функцию ψ как решение интегрального уравнения Вольтерра 2-го рода

$$2\psi + I^{-1}\psi = \frac{1}{\mu}[p(0) - p], \quad \mathbf{r} \in \Omega^*. \quad (2.2)$$

Используя свойства оператора I^α , можно показать, что уравнение (2.2) имеет единственное решение

$$\psi = \frac{1}{2\mu} [p(0) - p - I^{-1/2}(p(0) - p)], \quad \mathbf{r} \in \Omega^*, \quad (2.3)$$

причем $\Delta \psi = 0$, $\mathbf{r} \in \Omega^*$; $\psi(0) = 0$. Введем функцию \mathbf{F}

$$\mathbf{F} = \mathbf{v} - \frac{R^2 - r^2}{2} \nabla I^{-1} \psi. \quad (2.4)$$

Теперь, дифференцируя (2.4) с использованием (2.3) и (1.1), получаем

$$\Delta \mathbf{F} = \Delta \mathbf{v} - \frac{1}{\mu} \nabla p = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{F} = \psi,$$

отсюда и из (2.3), (2.4) следует представление (2.1), где $\text{const} = p(0)$.

Теорема доказана.

Замечание 2.1. *Если выразить $\mathbf{F} = \sum_{n=2}^{\infty} \mathbf{F}_n$, где \mathbf{F}_n — однородные гармонические функции, то формула (2.1) принимает вид*

$$\mathbf{v} = \mathbf{F} + \frac{R^2 - r^2}{2} \nabla \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-1} \nabla \cdot \mathbf{F}_n,$$

совпадающий с представлением из [5] для упругих перемещений внутри шара в случае несжимаемого ($\nu = 1/2$) материала.

3. Кватернионное представление общего решения системы Стокса

Приведем необходимые предварительные сведения.

Алгебра кватернионов Q — алгебра четвертого ранга с делением над полем действительных чисел R . Каждый кватернион (т. е. элемент алгебры Q) обладает однозначной

записью $q = q_0 + iq_x + jq_y + kq_z$, где q_0, q_x, q_y, q_z — действительные числа, а i, j, k — специальные кватернионы (вместе с 1 они являются элементами базиса Q), подчиняющиеся следующим правилам умножения:

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad ij = -ji = k, \quad jk = -kj = i, \quad ki = -ik = j. \quad (3.1)$$

Элемент 1 является единицей алгебры Q . Из (3.1) следует, что алгебра Q некоммутативна. Однако алгебра Q ассоциативна, т. е. для любых $p, q, r \in Q$ справедливо $p(qr) = (pq)r$, но $pq \neq qp$. Скалярной частью кватерниона называется q_0 , а векторной — $\mathbf{q} = iq_x + jq_y + kq_z$. С помощью (3.1) можно вывести следующее правило умножения кватернионов:

$$pq = p_0q_0 - \mathbf{p} \cdot \mathbf{q} + p_0\mathbf{q} + p\mathbf{q}_0 + \mathbf{p} \times \mathbf{q},$$

где “ \cdot ”, “ \times ” означают соответственно обычные скалярное и векторное умножения векторов. Оператор Гамильтона

$$\nabla = i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z}$$

рассматривается как кватернионный. Кватернионная функция $f(\mathbf{r}) = f_0(\mathbf{r}) + \mathbf{f}(\mathbf{r}) = f_0(x, y, z) + if_x(x, y, z) + jf_y(x, y, z) + kf_z(x, y, z) \in C^1$ неполной кватернионной переменной $\mathbf{r} = ix + jy + kz$ называется (лево-)регулярной в точке \mathbf{r}_0 , если она удовлетворяет в некоторой окрестности этой точки уравнению $\nabla f = 0$, или, в эквивалентной форме,

$$\nabla \cdot \mathbf{f} = 0, \quad \nabla f_0 + \nabla \times \mathbf{f} = 0, \quad (3.2)$$

где $\nabla f_0, \nabla \cdot \mathbf{f}, \nabla \times \mathbf{f}$ — соответственно обычные градиент, дивергенция и ротор. Функция f называется (лево-)регулярной в области Ω , если она регулярна в ее каждой точке. Уравнения (3.2) эквивалентны системе уравнений в частных производных первого порядка эллиптического типа, являющейся пространственным обобщением системы Коши — Римана и называющейся системой Моисила — Теодореску. Теория регулярных кватернионных функций достаточно разработана, она находит приложения в трехмерных задачах математической физики (см. [4, 6–10]).

Решения системы Стокса (1.1) и регулярные кватернионные функции тесно связаны [10]. Действительно, если ввести кватернионную функцию $f(\mathbf{r})$, где $f_0 = p, \mathbf{f} = \mu \nabla \times \mathbf{v}$, то из системы (1.1) следует система Моисила — Теодореску (3.2) для компонент функции f . Эффективное использование этой связи для решения краевых задач в литературе отсутствует.

Теорема 3.1. *Общее решение системы Стокса в $\Omega^* \subset \mathbb{R}^3$ выражается через две произвольные регулярные кватернионные функции в виде*

$$\mu \mathbf{v} = -\mathbf{r} \times I^1 \mathbf{f} + \nabla \left[r^2 \left(I^1 - \frac{3}{4} I^{1/2} \right) f_0 \right] + \nabla g_0, \quad p = f_0, \quad (3.3)$$

где $\Delta g_0 = 0, \mathbf{r} \in \Omega^*$, причем $\mathbf{f} = \mu \nabla \times \mathbf{v}$.

Доказательство. Для уравнения Ламе теории упругости

$$(\lambda + 2\mu) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) - \mu \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) = 0$$

В. В. Наумовым доказан пространственный аналог формулы Колосова — Мусхелишвили (см. [4, 7]) — общее представление вектора упругого перемещения \mathbf{v} в $\Omega^* \subset \mathbb{R}^3$ через две произвольные регулярные кватернионные функции f и ∇g_0 в виде

$$\mu \mathbf{u} = \mathbf{r} \times I^1 \mathbf{f} + \nabla \left\{ r^2 \left[\frac{3\lambda + 7\mu}{4(\lambda + 2\mu)} I^{1/2} - I^1 \right] f_0 \right\} + \nabla g_0,$$

причем $(\lambda + 2\mu)\nabla \cdot \mathbf{u} = f_0$, $-\mu\nabla \times \mathbf{u} = \mathbf{f}$. Функция g_0 — гармоническая и ее градиент ∇g_0 является чисто векторной регулярной кватернионной функцией. Система Стокса получается из уравнения Ламе в предельном случае несжимаемого упругого тела при $\nu = 1/2$. Предельным переходом $\nu \rightarrow 1/2$, с учетом того, что при этом $\lambda\nabla \cdot \mathbf{u} \rightarrow -p$, получаем нужное представление (3.3).

Теорема доказана.

Аналогичным предельным переходом из соответствующей теоремы [7] получается следующий результат.

Теорема 3.2. *Общее решение системы Стокса в $\Omega^* \subset \mathbb{R}^3$ выражается через три произвольные гармонические функции f_0, ψ_0, g_0 в виде*

$$\mathbf{v} = -\mathbf{r}I^0 f_0 + \nabla \left[r^2 \left(I^0 - \frac{3}{4}I^{1/2} \right) f_0 \right] + \mathbf{r} \times (\nabla \psi_0) + \nabla g_0, \quad p = \frac{1}{\mu} f_0, \quad \mathbf{r} \in \Omega^*. \quad (3.4)$$

Замечание 3.1. *Представление (3.4) является следствием кватернионного представления (3.3).*

Рассмотрим первую краевую задачу для системы Стокса (1.1) в шаре U радиуса R при заданных скоростях на сфере S :

$$v_k(R, \vartheta, \varphi) = w_k(\vartheta, \varphi) \in C^1(S), \quad k = r, \vartheta, \varphi. \quad (3.5)$$

С помощью представления (3.4) аналогично [4] доказывается теорема.

Теорема 3.3. *Решение первой краевой задачи (1.1)+(3.5) для системы Стокса при выполнении условия разрешимости*

$$\oint_S w_r dS = 0$$

представляется в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \frac{\mathbf{r}}{R} F + \frac{R^2 - r^2}{2R} \nabla(1 + 3I^{-1})F + \mathbf{r} \times \nabla I^0 V + R \nabla I^0 W, \\ p &= -\frac{1}{\mu R} \left(5 + 2r \frac{\partial}{\partial r} + 3I^{-1} \right) F + \text{const}, \end{aligned} \quad (3.6)$$

где $F = G - V + I^0 V$, а G, V, W — решения следующих гармонических задач Дирихле и Неймана:

$$\begin{cases} \Delta G = 0, & r < R, \\ G = w_r, & r = R, \\ \Delta V = 0, & r < R, \\ \frac{\partial V}{\partial r} = \frac{1}{R \sin \vartheta} \left[\frac{\partial w_\vartheta}{\partial \varphi} - \frac{\partial(w_\varphi \sin \vartheta)}{\partial \vartheta} \right], & r = R, \\ \Delta W = 0, & r < R, \\ \frac{\partial W}{\partial r} = -\frac{1}{R \sin \vartheta} \left[\frac{\partial(w_\vartheta \sin \vartheta)}{\partial \vartheta} + \frac{\partial w_\varphi}{\partial \varphi} \right], & r = R. \end{cases}$$

Замечание 3.2. *С помощью представления (3.4) решения всех остальных основных краевых задач для системы Стокса аналогичным образом выражаются через решения независимых гармонических задач.*

4. Решение исходной задачи (способ а)

Используя полученные выше общие решения, решим задачу (1.1)+(1.4) в области Ω методом малого параметра. В качестве малого параметра введем $\lambda = \varepsilon^2/2$. Следуя [11], разложим (1.2) – (1.4) в ряды по степеням λ :

$$\begin{aligned}
 v(\vartheta, \varphi) &= v_0 \sin \vartheta (1 - \lambda \cos^2 \vartheta \cos^2 \varphi + \dots); \\
 r &= r_0 + \lambda \bar{r}, \quad \bar{r} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n r_{n+1}, \quad r_0 = a, \quad r_1 = r_0 (\sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi - 1), \quad \dots; \\
 w_r &= v_0 \sin^2 \vartheta [\lambda S_1 + \lambda^2 (S_2 - S_1 \cos^2 \vartheta \sin \vartheta) + \dots] \equiv \lambda v_r^{(1)} + \lambda^2 v_r^{(2)} + \dots, \\
 w_\vartheta &= v_0 \cos \vartheta \sin \vartheta [\lambda S_1 + \lambda^2 (S_2 - S_1 \cos^2 \vartheta \sin \vartheta) + \dots] \equiv \lambda v_\vartheta^{(1)} + \lambda^2 v_\vartheta^{(2)} + \dots, \\
 w_\varphi &= v_0 \sin \vartheta [1 - \lambda^2 (C_2 + \dots) + \dots] \equiv v_\varphi^{(0)} + \lambda^2 v_\varphi^{(2)} + \dots, \\
 S_1 &= \sin 2\varphi, \quad S_2 = 4 \cos^3 \varphi \sin \varphi, \dots, C_1 = 0, \quad C_2 = -\frac{1}{2} \sin^2 2\varphi, \dots
 \end{aligned}$$

Решение задачи ищется в виде

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \mathbf{v}^{(n)}(\mathbf{r}).$$

В (1.4) в ряд по малому параметру λ разлагаются и левые и правые части, затем приравниваются множители при одинаковых степенях λ . Ограничимся первым порядком приближения. Для поправок $\mathbf{v}^{(n)}$ получаются задачи для системы Стокса внутри сферы Σ радиуса r_0 со следующими граничными условиями при $r = r_0$:

$$v_r^{(0)} = v_\vartheta^{(0)} = 0, \quad v_\varphi^{(0)} = v_0 \sin \vartheta, \quad (4.1)$$

$$\begin{cases}
 v_r^{(1)} = v_r^{(0)} + \lambda \left[v_r^{(1)} + \frac{\partial v_r^{(0)}}{\partial r} r_1 \right], \\
 v_\vartheta^{(1)} = v_\vartheta^{(0)} + \lambda \left[v_\vartheta^{(1)} + \frac{\partial v_\vartheta^{(0)}}{\partial r} r_1 \right], \\
 v_\varphi^{(1)} = v_\varphi^{(0)} + \lambda \left[v_\varphi^{(1)} + \frac{\partial v_\varphi^{(0)}}{\partial r} r_1 \right].
 \end{cases} \quad (4.2)$$

Для нулевой поправки $\mathbf{v}^{(0)}$ получилась задача о вращении шара как жесткого целого, решение которой имеет вид

$$v_r^{(0)} = v_\vartheta^{(0)} = 0, \quad v_\varphi^{(0)} = v_0 \frac{r}{r_0} \sin \vartheta, \quad \text{или} \quad v_x^{(0)} = -y, \quad v_y^{(0)} = x, \quad v_z^{(0)} = 0. \quad (4.3)$$

С учетом (4.3) запишем граничные при $r = r_0$ условия для первой поправки (далее верхний индекс (1) для краткости не пишем)

$$\begin{cases}
 v_r = -v_0 \sin^2 \vartheta \sin 2\varphi, \\
 v_\vartheta = -v_0 \sin \vartheta \cos \vartheta \sin 2\varphi, \\
 v_\varphi = \frac{1}{2} v_0 \sin \vartheta (1 - \cos 2\varphi),
 \end{cases} \quad (4.4)$$

Положим $v_0 = r_0 = 1$ и запишем (5.4) в декартовых координатах

$$\begin{cases} v_x = -\frac{5}{4}y - \frac{1}{4}\sin\vartheta\sin 3\varphi, \\ v_y = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}\sin\vartheta\cos 3\varphi, \\ v_z = 0, \end{cases} \quad r = 1. \quad (4.5)$$

Согласно теореме 1, решение задачи (4.5) имеет вид (2.2), где компоненты вектора \mathbf{F} являются решениями задач Дирихле, причем $F_z = 0$:

$$\begin{cases} \Delta F_x = 0, & r < 1, \\ F_x = -\frac{5}{4}y - \frac{1}{4}\sin\vartheta\sin 3\varphi, & r = 1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta F_y = 0, & r < 1, \\ F_y = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}\sin\vartheta\cos 3\varphi, & r = 1. \end{cases}$$

Решения этих задач имеют вид

$$\begin{aligned} F_x &= -\frac{5}{4}y + \psi(r, \vartheta)\sin 3\varphi, \\ F_y &= -\frac{1}{4}x - \psi(r, \vartheta)\cos 3\varphi, \\ \psi(r, \vartheta) &= \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4k+3}{k(k+1)(k+2)(4k^2-1)(2k+3)} r^{2k+1} P_{2k+1}^3(\cos\vartheta), \end{aligned} \quad (4.6)$$

здесь $P_n^m(\cos\vartheta)$ — присоединенные функции Лежандра 1-го рода [12]. Отсюда найдем

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = -\frac{1}{2}\sin 2\varphi \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4k+3}{k(k+1)(4k^2-1)} r^{2k} P_{2k}^2(\cos\vartheta). \quad (4.7)$$

Подставляя (4.6) и (4.7) в (2.1), получим выражение для $\mathbf{v}^{(1)}$.

Окончательные выражения для компонент вектора скоростей в исходной задаче в первом приближении имеют вид

$$\begin{aligned} v_x &= -y + \lambda \left\{ -\frac{5}{4}y + (3x^2y - y^3)\psi_1 + (1-r^2)[y\psi_2 + (y^3 - 3x^2y)\psi_3] \right\}, \\ v_y &= x + \lambda \left\{ -\frac{1}{4}x + (3xy^2 - x^3)\psi_1 + (1-r^2)[x\psi_2 + (x^3 - 3xy^2)\psi_3] \right\}, \\ v_z &= \lambda(1-r^2)xy\psi_4, \end{aligned} \quad (4.8)$$

где

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4k+3}{k(k+1)(k+2)(4k^2-1)(2k+3)} \frac{r^{2k-2}}{\sin^3\vartheta} P_{2k+1}^3(\cos\vartheta), \\ \psi_2 &= \frac{1}{8}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4k+3}{k^2(2k+1)} \frac{r^{2k-2}}{\sin\vartheta} P_{2k-1}^1(\cos\vartheta), \end{aligned}$$

$$\psi_3 = \frac{1}{16} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{4k+3}{k^2(k+1)(4k^2-1)} \frac{r^{2k-4}}{\sin^3 \vartheta} P_{2k-1}^3(\cos \vartheta),$$

$$\psi_4 = -\frac{1}{2} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{4k+3}{k^2(4k^2-1)} \frac{r^{2k-4}}{\sin^2 \vartheta} P_{2k-1}^2(\cos \vartheta).$$

5. Результаты расчетов

Определим теперь поле перемещений материальных частиц. Для этого необходимо решить задачу Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = v_x(x(t), y(t), z(t)), & t > 0, \\ \frac{dy(t)}{dt} = v_y(x(t), y(t), z(t)), \\ \frac{dz(t)}{dt} = v_z(x(t), y(t), z(t)), \\ x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0, \quad z(0) = z_0. \end{cases} \quad (5.1)$$

В силу свойств функций Лежандра для (4.8) на экваториальной плоскости имеем точное равенство $v_z(x, y, 0) = 0$. Результаты численных решений задачи (5.1) с полями скоростей (4.8) показывают, что все частицы двигаются по замкнутым траекториям на плоскостях, параллельных экваториальной плоскости ($\vartheta = \pi/2$). Траектории частиц на экваториальной плоскости приведены на рис. 3, $\varepsilon = 0.8$, $\lambda = 0.32$. Положения частиц, в момент времени $t = 0$ находившихся на больших полуосях $y = 0$ сечений на разных высотах $z = h$, приведены на рис. 4, $\varepsilon = 0.5$, $\lambda = 0.125$. При этих расчетах в рядах достаточно удерживать по 20 слагаемых. Все расчеты и графические построения выполнены с помощью компьютерной системы символьной математики Mathematica 3.0.

Обратимся теперь к экспериментальным данным. На рис. 5–7, взятых из [1], показаны положения маркерных точек при разных уровнях заполнения тела вязкой жидкостью. Сравним эти результаты с расчетом. Сделаем замечания о системе координат наблюдателя. В эксперименте деформируемое тело закреплялось с помощью гибких тяг А и В (см. рис. 5), а вращение статора осуществлялось против часовой стрелки. Следовательно, фотографии на рис. 5–7 сделаны с точки зрения наблюдателя, находящегося на Южном полюсе планеты. Поэтому перенос маркерных точек против часовой стрелки соответствует западному дрейфу внутренних масс. В расчете система координат соответствует положению наблюдателя выше деформируемого тела со стороны Северного полюса (с точки зрения этого наблюдателя конфигурация внешней формы тела не меняется). Поэтому перенос частиц на рис. 3–4 по часовой стрелке соответствует западному дрейфу масс.

Полученные численные результаты полностью соответствуют эксперименту: траектории частиц являются замкнутыми, обращение происходит вокруг одного центра, но периоды обращения для различных точек различны (эффект дифференциального вращения). Полученная численно картина близка к экспериментальной. Для Земли радиус равен $R = 6370$ км.; пусть h — высота приливной волны, λ — соответствующий h малый параметр, $\lambda = \varepsilon^2/2$, $\varepsilon^2 = 1 - b^2/a^2$, $a = R + h$, $b = R - h$; v — скорость западного дрейфа. Приведем значения скорости западного дрейфа для разных значений приливной волны.

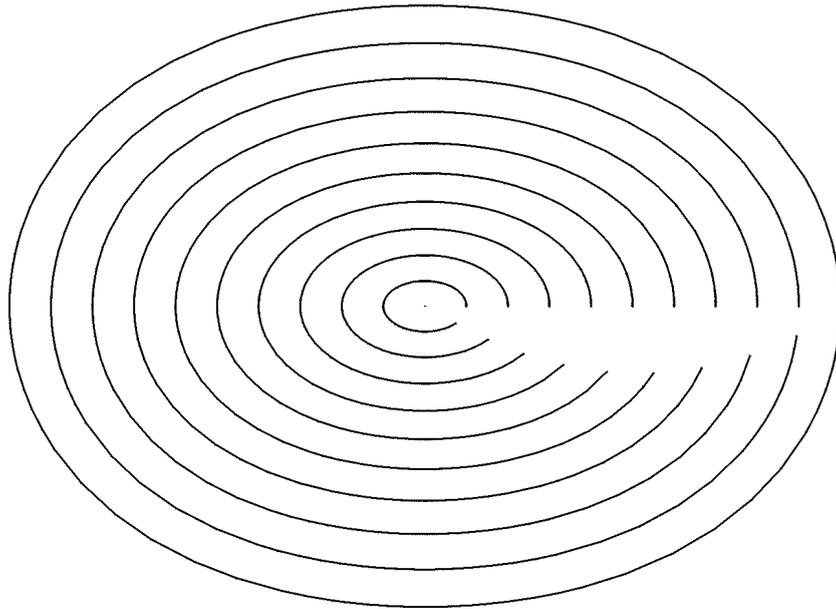


Рис. 3. Траектории частиц на экваториальной плоскости после одного оборота внешней частицы, $\varepsilon = 0.8$, $\lambda = 0.32$.

- $h = 1500$ м, $\lambda = 0.00047$, $v = 1664$ м/год;
- $h = 100$ м, $\lambda = 0.0000314$, $v = 7.4$ м/год;
- $h = 10$ м, $\lambda = 3.14 \cdot 10^{-6}$, $v = 0.074$ м/год;
- $h = 0.5$ м, $\lambda = 1.57 \cdot 10^{-7}$, $v = 0.2 \cdot 10^{-3}$ м/год;

Ниже приведено решение, построенное способом (б) и аналитически показано его совпадение с решением, полученным способом (а).

Для дополнительной проверки вычислительного алгоритма способа (а) также была рассчитана задача в плоской постановке, при этом результаты совпали с полученными ранее другим способом [2].

6. Решение исходной задачи (способ б)

Решение задачи (4.4) в шаре согласно теореме 3.3 имеет вид (3.6), причем для гармонических функций получаются следующие задачи Дирихле и Неймана:

$$\begin{cases} \Delta G = 0, & r < 1, \\ G = -\sin^2 \vartheta \sin 2\varphi, & r = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} \Delta V = 0, & r < 1, \\ \frac{\partial V}{\partial r} = -\cos \vartheta - \cos \vartheta \cos 2\varphi, & r = 1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta W = 0, & r < 1, \\ \frac{\partial W}{\partial r} = -3 \sin^2 \vartheta \sin 2\varphi + \sin 2\varphi, & r = 1, \end{cases}$$

решения которых имеют вид

$$G = -2xy,$$

$$V = -\frac{1}{2} \cos 2\varphi \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4k+3}{k(k+1)(2k+1)^2(2k+3)} r^{2k+1} P_{2k+1}^2(\cos \vartheta), \quad (6.1)$$

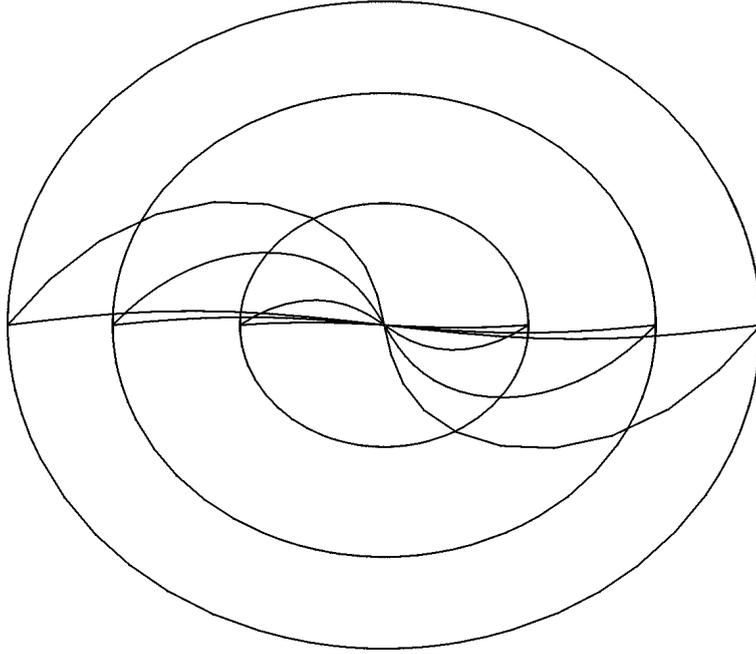


Рис. 4. Положение частиц, находившихся в начальный момент времени на больших полуосях на экваториальной плоскости, на высотах $h = 0.6$ и $h = 0.8$ после одного оборота и 10 оборотов, $\varepsilon = 0.5$, $\lambda = 0.125$.

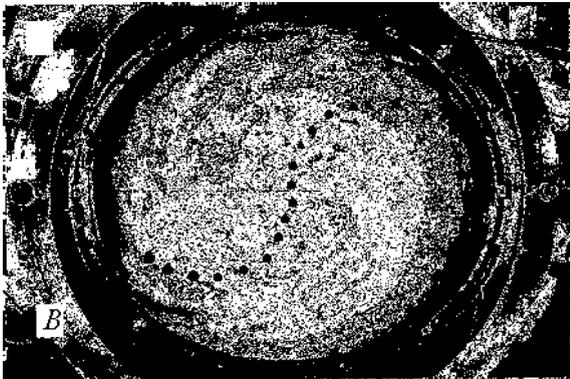


Рис. 5.

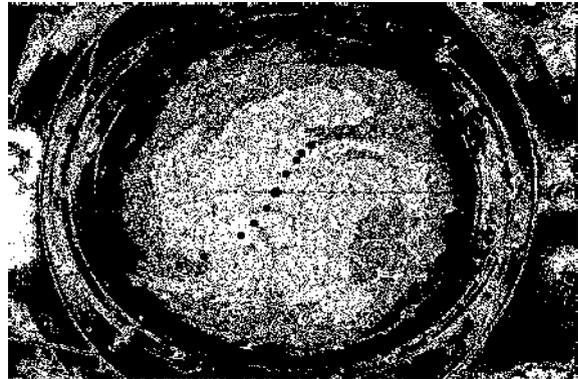


Рис. 6.

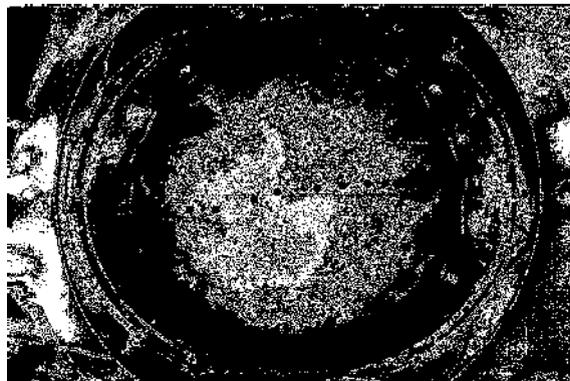


Рис. 7.

$$W = -3xy + \frac{1}{4} \sin 2\varphi \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4k+1}{k^2(k+1)(4k^2-1)} r^{2k} P_{2k}^2(\cos \vartheta). \quad (6.2)$$

Функция F выражается в виде

$$F = -\frac{1}{2} \sin 2\varphi \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4k+1}{k(k+1)(2k+1)(4k^2-1)} r^{2k} P_{2k}^2(\cos \vartheta). \quad (6.3)$$

Подставляя (6.1)–(6.3) в (3.6), найдем выражения для $\mathbf{v}^{(1)}$. В итоге компоненты вектора скорости исходной задачи в первом приближении имеют вид:

$$\begin{aligned} v_x &= -y + \lambda \left\{ -\frac{3}{2}y - x^2y\omega_1 + y(y^2 - x^2)\omega_2 + yz\omega_3 + (3x^2y - y^3)z\omega_4 - y\omega_5 + \right. \\ &\quad \left. + (3x^2y - y^3)\omega_6 + (1 - r^2)[y\omega_7 + (y^3 - 3x^2y)\omega_8] \right\}, \\ v_y &= x + \lambda \left\{ -\frac{1}{2}x - xy^2\omega_1 + x(x^2 - y^2)\omega_2 + xz\omega_3 + (3xy^2 - x^3)z\omega_4 - x\omega_5 + \right. \\ &\quad \left. + (3xy^2 - x^3)\omega_6 + (1 - r^2)[x\omega_7 + (x^3 - 3xy^2)\omega_8] \right\}, \\ v_z &= \lambda xy[-z\omega_1 + (r^2 - 1)\omega_9 + \omega_{10} + \omega_{11}], \end{aligned} \quad (6.4)$$

где

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4k+1}{k(k+1)(2k+1)(4k^2-1)} \frac{r^{2k-2}}{\sin^2 \vartheta} P_{2k}^2(\cos \vartheta), \\ \omega_2 &= \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4k+3}{k(k+1)^2(2k+1)^2} \frac{r^{2k-2}}{\sin^2 \vartheta} P_{2k}^2(\cos \vartheta), \\ \omega_3 &= \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4k+3}{k(k+1)(2k+1)^2} \frac{r^{2k-1}}{\sin \vartheta} P_{2k}^1(\cos \vartheta), \\ \omega_4 &= \frac{1}{8} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{4k+3}{k(k+1)^2(2k+1)^2(2k+3)} \frac{r^{2k-3}}{\sin^3 \vartheta} P_{2k}^3(\cos \vartheta), \\ \omega_5 &= \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4k+1}{k^2(4k^2-1)} \frac{r^{2k-2}}{\sin \vartheta} P_{2k-1}^1(\cos \vartheta), \\ \omega_6 &= \frac{1}{8} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{4k+1}{k^2(k+1)(2k+1)(4k^2-1)} \frac{r^{2k-4}}{\sin^3 \vartheta} P_{2k-1}^3(\cos \vartheta), \\ \omega_7 &= \frac{1}{8} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(4k+1)(2k+3)}{k^2(4k^2-1)} \frac{r^{2k-2}}{\sin \vartheta} P_{2k-1}^1(\cos \vartheta), \\ \omega_8 &= \frac{1}{16} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(4k+1)(2k+3)}{k^2(k+1)(2k+1)(4k^2-1)} \frac{r^{2k-4}}{\sin^3 \vartheta} P_{2k-1}^3(\cos \vartheta), \\ \omega_9 &= \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(4k+1)(2k+3)}{k^2(k+1)(2k+1)(4k^2-1)} \frac{r^{2k-3}}{\sin^2 \vartheta} P_{2k-1}^2(\cos \vartheta), \\ \omega_{10} &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4k+3}{k(k+1)^2(2k+1)^2(2k+3)} \frac{r^{2k-1}}{\sin^2 \vartheta} P_{2k+1}^2(\cos \vartheta), \end{aligned}$$

$$\omega_{11} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{4k+1}{k^2(2k+1)(4k^2-1)} \frac{r^{2k-3}}{\sin^2 \vartheta} P_{2k-1}^2(\cos \vartheta).$$

Покажем, что решения (4.8) и (6.4) совпадают. Например, запишем выражение для v_z из последнего решения в виде

$$\begin{aligned} v_z = \lambda \frac{1}{2} \sin 2\varphi \left[- \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4k+1}{k(k+1)(2k+1)(4k^2-1)} r^{2k+1} \cos \vartheta P_{2k}^2(\cos \vartheta) - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{4k+1}{k^2(4k^2-1)} r^{2k-1} P_{2k-1}^2(\cos \vartheta) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(4k+1)(2k+3)}{k^2(2k+1)^2(4k^2-1)} r^{2k+1} P_{2k-1}^2(\cos \vartheta) + \right. \\ \left. + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{4k-1}{(k-1)k^2(2k+1)(2k-1)^2} r^{2k-1} P_{2k-1}^2(\cos \vartheta) \right]. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Здесь объединены ω_9 и ω_{11} , а в ω_{10} индекс суммирования k заменен на $k-1$. В (6.5) преобразуем первую сумму, пользуясь рекуррентным соотношением

$$x P_{2k}^2(x) = \frac{1}{4k+1} [(2k-1) P_{2k+1}^2(x) + 2(k+1) P_{2k-1}^2(x)].$$

При суммировании членов, содержащих множитель $P_{2k+1}^2(\cos \vartheta)$, перейдем от k к новому индексу $k-1$, тогда все суммы (в (6.5)) будут иметь общий множитель $P_{2k-1}^2(\cos \vartheta)$. После приведения подобных членов будем иметь выражение

$$v_z = \frac{1}{4} \lambda \sin 2\varphi (r^2 - 1) \sum_{k=2}^{\infty} \frac{4k+3}{k^2(4k^2-1)} r^{2k-1} P_{2k-1}^2(\cos \vartheta),$$

совпадающее с соответствующим выражением из решения (4.8). Аналогично показывается совпадение остальных компонентов.

На экваториальной плоскости при $\vartheta = \pi/2$ поля скоростей (4.8) и (6.4) имеют вид

$$v_z = 0,$$

$$\begin{aligned} v_x &= -y + \lambda \left[-\frac{17}{8}y + \frac{11}{32}x^2y + \frac{41}{32}y^3 + x^2y\gamma_1 + y^3\gamma_2 \right], \\ v_y &= x + \lambda \left[-\frac{9}{8}x + \frac{11}{32}xy^2 + \frac{41}{32}x^3 + xy^2\gamma_1 + x^3\gamma_2 \right], \end{aligned}$$

где

$$\gamma_1 = \frac{1}{16} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k r^{2k} (2k-1)!!}{k(k+1)^2(k+2)^2(k+3)(2k-2)!!} (33 + 245k + 352k^2 + 184k^3 + 32k^4),$$

$$\gamma_2 = \frac{3}{16} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k r^{2k} (2k-1)!!}{k(k+1)^2(k+2)^2(k+3)(2k-2)!!} (41 + 71k + 42k^2 + 8k^3).$$

Замечание. Поле скоростей (4.8), полученное в первом приближении, при малых значениях параметра $\lambda = \varepsilon^2/2$, который по построению может принимать значения от 0 до 0.5, хорошо описывает исходную задачу. При значениях λ , близких к 0.5, это поле скоростей, очевидно, уже будет далеко от приближения исходной задачи. Однако, по построению, поле скоростей (4.8) является решением системы Стокса при любом значении $\lambda = \text{const}$, которое при $\lambda > 0.9$ дает очень интересное пространственное поле скоростей. А именно, при $r < 1$ частицы будут также описывать замкнутые эллипсоподобные траектории, но вблизи экваториальной плоскости образуются два отдельных симметричных объемных вихря, которые исчезают на высоте, примерно равной 0.6. На рис. 8 показаны эти траектории при $\lambda = 0.95$ на экваториальной плоскости. Интересно сопоставить это с экспериментальными данными, полученными при моделировании приливной волны большой высоты [13]. Эксперименты показывают, что при большой высоте в материале формируется течение с двумя вихрями (рис. 9, сухой песок). Эта картина близка к расчетной, хотя и относится к другому материалу.

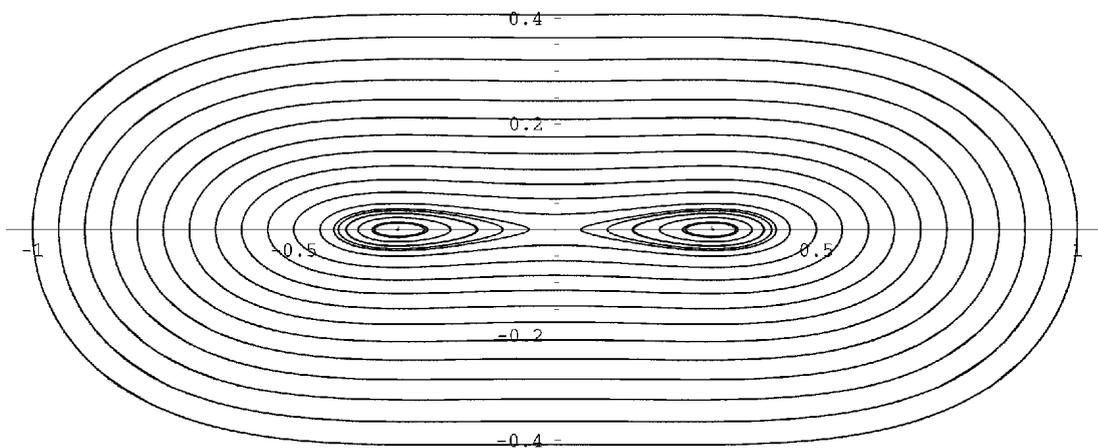


Рис. 8. Траектории частиц на экваториальной плоскости для поля скоростей (5.8) при $\lambda = 0.95$.

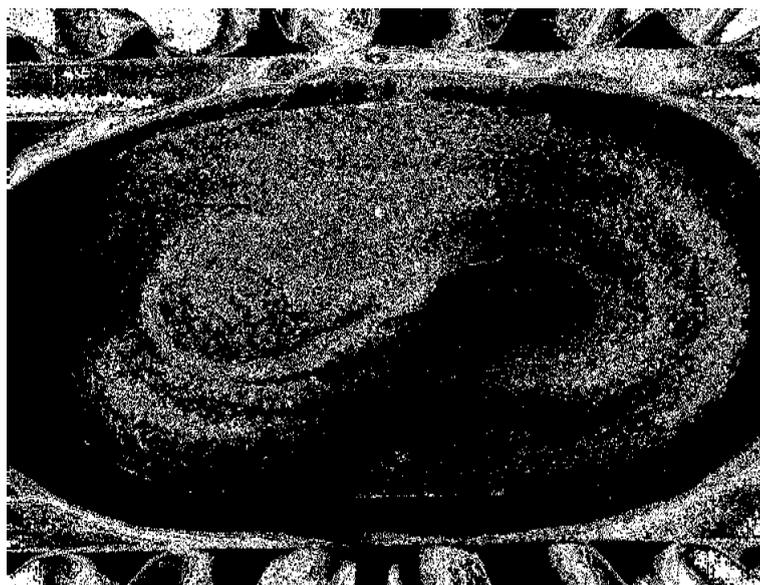


Рис. 9.

Представляет большой интерес расчет с использованием трехмерных моделей, подобных изложенной в данной работе, но учитывающих наличие жесткого ядра. Введение такого ядра в экспериментальную модель приводит при некоторых сочетаниях параметров к его восточному дрейфу [14]. Ряд результатов наблюдений за распространением сейсмических волн указывает на подобный дрейф ядра Земли и в натуральных условиях [15].

Список литературы

- [1] БОБРЯКОВ А. П., РЕВУЖЕНКО А. Ф., ШЕМЯКИН Е. И. Приливное деформирование планет: опыт экспериментального моделирования. *Геотектоника*, №6, 1991, 21–35.
- [2] РЕВУЖЕНКО А. Ф. О приливном механизме переноса масс. *Изв. АН СССР. Физика Земли*, №6, 1991, 13–20.
- [3] ЛОЙЦЯНСКИЙ Л. Г. *Механика жидкости и газа*. Наука, М., 1987.
- [4] НАУМОВ В. В. Решение двух основных задач о равновесии упругого шара в замкнутой форме. *Динамика сплошной среды*, **78**, 1986, 96–107.
- [5] ЛУРЬЕ А. И. *Пространственные задачи теории упругости*. Гостехиздат, М., 1955.
- [6] БИЦАДЗЕ А. В. *Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка*. Наука, М., 1966.
- [7] ГРИГОРЬЕВ Ю. М. Решение одной задачи для упругого шара в замкнутой форме. *Динамика сплошной среды*, **71**, 1985, 50–54.
- [8] ГРИГОРЬЕВ Ю. М., НАУМОВ В. В. Аппроксимационные теоремы для системы Моисила — Теодореску. *Сибирский математический журнал*, **25**, №5, 1984, 9–19.
- [9] GURLEBECK K., SPROBIG W. *Quaternionic Analysis and Elliptic Boundary Value Problems*. Berlin, Akademie-Verlag, 1989.
- [10] VORONJEC K. Sur l'application de quaternions monogenes dans l'ecoulement a potentiels de tourbillons. *Publ. de l'inst. Math. Nouv. Ser.*, **7(21)**, 1967.
- [11] ИВЛЕВ Д. Д., ЕРШОВ Л. В. *Метод возмущений в теории упругопластического тела*. Наука, М., 1978.
- [12] ГОБСОН Е. В. *Теория сферических и сфероидальных функций*. ИЛ, М., 1952.
- [13] РЕВУЖЕНКО А. Ф., БОБРЯКОВ А. П., КОСЫХ В. П. О течении сыпучей среды с возможным неограниченным скольжением по поверхностям локализации. *Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых*. №3, 1997, 37–42.
- [14] РЕВУЖЕНКО А. Ф., КОСЫХ В. П., БОБРЯКОВ А. П. О локализованном пластическом течении геосреды вокруг жесткого включения. *Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых*. №6, 1998, 27–34.
- [15] ОВЧИННИКОВ В. М., АДУШКИН В. В., АН В. А. О скорости относительного вращения внутреннего ядра Земли. *Докл. РАН*, **362**, №5, 1998, 683–686.

Поступила в редакцию 9 ноября 1999 г.