Вычислительные технологии **Том 5, № 4, 2000**

О ПРЕОБРАЗОВАНИИ ВЫРОЖДЕННЫХ СИСТЕМ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА ВОЛЬТЕРРА

М. В. Булатов
Институт динамики систем и теории управления СО РАН
Иркутск, Россия
e-mail: root@icc.ccsoan.irkutsk.su

A class of systems of Volterra-type integral equations is investigated with the singular matrix at the unknown. A scheme for the construction of a linear differential operator whose application to the input equation yields the system of the second kind is suggested. A similar operator for the systems of integral and differential equations with the singular matrix at the highest derivative is constructed. A new formula for calculating the index of a sheaf of matrices is obtained.

1. Постановка задачи

Рассмотрим систему интегральных уравнений

$$Ax(t) + \int\limits_0^t K(t-\tau)x(\tau)d\tau = f(t), \quad t \in [0,1], \tag{1}$$

где A — $(n \times n)$-матрица, причем $\det A = 0$, $K(u)$ — $(n \times n)$-матрица с вещественно-аналитическими коэффициентами, $f(t)$ — достаточно гладкая известная n-мерная вектор-функция, $x(t)$ — непрерывная искомая n-мерная вектор-функция.

Если $A = 0$, то в силу того, что элементы матрицы $K(u)$ — вещественно-аналитические функции, найдется хотя бы одно значение i такое, что $K^{(i)}(0) \neq 0$. Дифференцируя такую задачу $i+1$ раз и полагая $K^{(i)}(0) = A$, получим уравнение вида (1).

В дальнейшем будем предполагать, что задача (1) имеет хотя бы одно решение.

Поясним вышесказанное на примере следующей системы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x(t) + \int\limits_0^t \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & d(t-\tau) \end{pmatrix} x(\tau)d\tau = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix}, \tag{2}$$

где d — скаляр, $t \in [0,1]$. При любых $f_1, f_2 \in C^1$ таких, что $f_2(0) = 0$, $f_1(0) = f_2'(0)$ система имеет единственное решение

$$x_1(t) = f_2'(t) - d * (f_1(t) - f_2'(t))/(1-d),$$
$$x_2(t) = (f_1'(t) - (f_2''(t))/(1-d).$$

Если же $d = 1$, то любая пара $x_1 = v(t)$, $x_2 = f_1' - v'$, где $v(t)$ — произвольная функция из C^1 такая, что $v(0) = f_1(0) = 0$, является решением системы (2) тогда и только тогда, когда $f_1(0) = 0$, $f_1(t) \equiv f_2'(t)$.

Существует несколько подходов к исследованию вопроса о единственности решения системы (1).

В частности, используя интегральное преобразование Лапласа [1] для системы (1), можно перейти от исходной задачи к системе линейных уравнений в пространстве изображений. Далее можно решить вопрос о существовании и единственности решения полученной системы.

Напомним [1], что изображением функции $g(t)$ по Лапласу называется функция комплексной переменной $G(p)$, $p = \alpha + \beta i$, определяемая равенством

$$G(p) = \int_0^\infty g(t)\exp(-pt)dt. \tag{3}$$

Действуя преобразованием Лапласа на равенство (2), получим, что в пространстве изображений данный пример (2) будет иметь вид

$$\begin{pmatrix} 1 & p^{-1} \\ p^{-1} & dp^{-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1(p) \\ X_2(p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \end{pmatrix},$$

где $X_1(p)$, $X_2(p)$, $F_1(p)$, $F_2(p)$ — изображения $x_1(t)$, $x_2(t)$, $f_1(t)$, $f_2(t)$ соответственно. Легко заметить,что данная система будет иметь единственное решение для любого $p \neq 0$ тогда и только тогда, когда $d \neq 1$.

Отметим, что для преобразования Лапласа необходимо точно вычислять ряд интегралов, что является весьма затруднительной задачей.

Другие преобразования, позволяющие проводить исследования единственности решения задачи (1), предложены в [2]. Эти преобразования предназначены для более широкого класса задач и их непосредственное применение к уравнению (1) нецелесообразно из-за технических сложностей.

В монографии [3] предложен метод редукции исходной задачи (1) к системе интегральных уравнений второго рода. Для осуществления такой редукции необходимо исследовать "l-расширенную систему" размером $(ln \times (l+1)n)$.

В данной работе предложена совокупность достаточно простых условий единственности решения задачи (1), при выполнении которых предлагается преобразование исходной задачи к системе интегральных уравнений второго рода

$$x(t) + \int_0^t \bar{K}(t-\tau)x(\tau)d\tau = \bar{f}(t), \quad t \in [0,1], \tag{4}$$

где $\bar{K}(u)$ — вещественно-аналитическая $(n \times n)$-матрица, $\bar{f}(t)$ — непрерывная вектор-функция. Уравнение (4) имеет единственное решение [1].

2. Свойства полуобратных матриц и $\boldsymbol{\lambda}$-матриц

Определение 1 [4]. *Матрица, обозначаемая в дальнейшем как A^-, называется полуобратной к матрице A, если она удовлетворяет матричному уравнению*

$$AA^-A = A.$$

Для квадратной и невырожденной матрицы полуобратная матрица совпадает с обратной. Если матрица A — произвольная, то для нее существует полуобратная матрица A^-, определяемая, в общем случае, неединственным способом [4].

Одной из полуобратных матриц к матрице A является псевдообратная матрица, обозначаемая в дальнейшем как A^+. В отличие от полуобратной матрицы, псевдообратная матрица определена единственным образом. Существует несколько эквивалентных определений псевдообратной матрицы. Приведем некоторые из них.

Определение 2 [5]. *Матрица A^+ называется псевдообратной к матрице A, если она удовлетворяет уравнениям Пенроуза:*

$$AA^+A = A,$$

$$A^+AA^+ = A^+,$$
$$(AA^+)^\top = AA^+,$$
$$(A^+A)^\top = A^+A.$$

Определение 3 [6]. *Псевдообратной матрицей A^+ к матрице A называется наилучшее приближенное решение (по методу наименьших квадратов) матричного уравнения*

$$AX = E.$$

В работе [5] описан ряд конструктивных алгоритмов вычисления псевдообратных матриц A^+ и приведена обширная библиография по данному вопросу.

Лемма 1 [4]. *Система линейных уравнений $By = c$ имеет решение тогда и только тогда, когда выполнено условие*
$$(E - BB^-)c = 0.$$

Лемма 2 [7]. *Пусть $(n \times n)$-матрица A имеет ранг r, а неособенная $(n \times n)$-матрица P такова, что PA имеет блочный вид*

$$PA = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где $(A_1 \quad A_2)$ — $(r \times n)$-матрица и $\operatorname{rank}\,(A_1 \quad A_2) = r$. *Тогда матрица $P(E - AA^-)P^{-1}$ имеет блочный вид*
$$P(E - AA^-)P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & S \\ 0 & E_{n-r} \end{pmatrix}.$$

Здесь и всюду в дальнейшем изложении через E_s будем обозначать единичную матрицу размерности s.

Определение 4 [8]. *λ-матрицей степени k называется матрица вида*

$$A(\lambda) = \lambda^k A_0 + \lambda^{k-1} A_1 + \cdots + A_k,$$

где A_0, A_1, …, A_k — постоянные матрицы одинаковых размеров, λ — скаляр, $A_0 \neq 0$.

Определение 5. *Матрица $A(\lambda)$ называется регулярной, если* $\det A(\lambda) \neq 0$.

Определение 6 [3]. *Пучок $(n \times n)$-матриц $\lambda A + B$ имеет простую структуру, если*

$$\deg\det\,(\lambda A + B) = \operatorname{rank} A.$$

Лемма 3. *Пучок матриц $\lambda(E - AA^-) + E$ имеет простую структуру.*

Доказательство. Пусть $\operatorname{rank} A = r$, тогда, в силу леммы 2, $\operatorname{rank}\,(E - AA^-) = n - r$ и степень многочлена

$$\det\left(\lambda(E - AA^-) + E\right) = \det\left(\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & E_{n-r} \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 & S \\ 0 & E_{n-r} \end{pmatrix}\right)$$

также равна $n - r$.

Определение 7. *Будем говорить, что λ-матрица*

$$A(\lambda) = \sum_{i=0}^{k} \lambda^{k-i} A_i, \quad A_0 \neq 0,$$

обладает доминантным свойством (ДС), если

$$\deg\det A(\lambda) \geq k \operatorname{rank} A_0.$$

Здесь и всюду в дальнейшем $\deg(.)$ означает показатель степени многочлена (.).

Например, матрица

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

не обладает этим свойством, а матрица

$$\begin{pmatrix} \lambda^2 & \lambda \\ \lambda & d \end{pmatrix}$$

при $d \neq 1$ — обладает.

Приведем без доказательств некоторые свойства λ-матриц.

Свойство 1. *Если $A(\lambda)$ — регулярная матрица, не обладающая ДС, то существует целое положительное число m такое, что матрица $\lambda^m A(\lambda)$ обладает ДС.*

Свойство 2. *Если матрица $A(\lambda)$ обладает ДС, то и матрица $(E+\lambda(E-A_0A_0^-))A(\lambda)$ также обладает ДС.*

Образуем цепочку матриц по рекуррентному соотношению

$$A^{(i)}(\lambda) = \left(E + \lambda\left(E - A_0^{(i-1)} A_0^{(i-1)-}\right)\right) A^{(i-1)}(\lambda), \tag{5}$$

где

$$A_0^{(0)} = A_0, \quad A^{(0)}(\lambda) = A(\lambda),$$

а верхний индекс у матриц A означает номер итерации.

В дальнейшем изложении важную роль играет следующий результат.

Теорема 1. *Пусть матрица $A(\lambda) = \sum_{i=0}^{k} \lambda^{k-i} A_i$ обладает ДС и* $\operatorname{rank} A_0 = r \leq n$. *Тогда у матрицы $A^{(k)}(\lambda)$, определенной по рекуррентной формуле (5),* $\det A_0^{(k)} \neq 0$.

Доказательство. Пусть $\deg\det A(\lambda) = kr + S \geq kr$. Тогда, в силу леммы 3, справедливо

$$\deg\det A^{(1)}(\lambda) = kr + S + n - r \geq k(r + s_1),$$

где $r + s_1 = \operatorname{rank} A_0^{(1)}$.

Продолжая эту цепочку неравенств, получим

$$\deg\det A^{(i)}(\lambda) = kr + S + n - r + n - (r + s_1) + \cdots + n - (r + s_1 + s_2 + \cdots + s_{i-1}) \geq$$
$$\geq k(r + s_1 + s_2 + \cdots + s_i), \tag{6}$$

где $r + s_1 + s_2 + \cdots + s_i = \operatorname{rank} A_0^{(i)}$.

Вычитая из i-го неравенства $(i-1)$-е, имеем

$$s_i \leq (n - (s_1 + s_2 + \cdots + s_{i-1}))/k \leq (n-r)/k. \tag{7}$$

Подставляя в правую часть неравенства (6) значения $i = k$ и $s_i \leq (n-r)/k$, получим

$$\deg \det A^{(k)}(\lambda) \geq = k(r + s_1 + s_2 + \cdots + s_k) \geq kn. \tag{8}$$

Так как $A^{(k)}(\lambda) = \sum_{i=0}^{k} \lambda^{k-i} A_i^{(k)}$, то из оценки (8) вытекает, что $\det A_0^{(k)} \neq 0$.

Теорема доказана.

Приведем еще один вспомогательный результат, который непосредственно вытекает из монографии [6].

Лемма 4. *Задача*

$$Bx'(t) + x(t) = 0, \quad x(0) = 0, \quad t \in [0,1],$$

где B — постоянная $(n \times n)$-матрица, имеет только тривиальное решение.

3. Редукция вырожденных систем

Ниже дано описание редукции ряда интегро-дифференциальных систем с вырожденной матрицей перед старшей производной к системам уравнений, разрешенным относительно старшей производной.

Введем обозначения

$$A_0 = A, \quad A_i = K^{(i-1)}(0), \quad i = 1, 2, \ldots, k, \tag{9}$$

где A и $K(u)$ — те же матрицы, что и в исходном уравнении (1).

Образуем цепочку уравнений

$$A^{(i)} x(t) + \int_0^t K_i(t-\tau) x(\tau) d\tau = f_i(t), \quad t \in [0,1], \tag{10}$$

где

$$A^{(i)} = A^{(i-1)} + (E - A^{(i-1)} A^{(i-1)-}) K_{i-1}(0),$$
$$K_i(u) = K_{i-1}(u) + (E - A^{(i-1)} A^{(i-1)-}) K'_{i-1}(u),$$
$$f_i(t) = f_{i-1}(t) + (E - A^{(i-1)} A^{(i-1)-}) f'_{i-1}(t),$$
$$A_0 = A, \quad K_0(u) = K(u), \quad f_0(t) = f(t).$$

Теорема 2. *Пусть:*

1) для уравнения (1) существует k такое, что матрица $A(\lambda)$ обладает ДС, где A_i вычислены по формуле (9);

2) $(E - A^{(i)} A^{(i)-}) f_i(0) = 0$, $i = 0, 1, \ldots, k$;

3) элементы $K(t-\tau)$, $f(t)$ принадлежат классу C^k.

Тогда :

1) система (1) имеет единственное решение из класса C;

2) исходная задача (1) эквивалентна любой из систем (10);

3) у системы (10) при $i = k$ $\det A^{(k)} \neq 0$.

Доказательство. Полагая в уравнениях (10) $t = 0$, получим системы линейных алгебраических уравнений

$$A^i x(0) = f_i(0),$$

разрешимость которых следует из первого условия теоремы и леммы 1.

Покажем, что решение $(i-1)$-й системы (10) является решением i-й системы и наоборот. Для этого достаточно заметить, что i-я система (10) является суперпозицией оператора $\left(E + \left(E - A^{(i-1)}A^{(i-1)-}\right)\dfrac{d}{dt}\right)$ и предыдущей, $(i-1)$-й системы.

В силу леммы 4 задачи

$$\left(E + \left(E - A^{(i-1)}A^{(i-1)-}\right)\frac{d}{dt}\right)x(t), \quad x(0) = 0, \quad t \in [0, 1],$$

имеют только тривиальные решения, следовательно, решение $(i-1)$-й системы (10) является решением и i-й системы.

Докажем теперь, что решение исходной задачи единственно. Заменяя в теореме 1 скаляр λ на оператор дифференцирования $\dfrac{d}{dt}$, в силу второго условия теоремы получим

$$\det\, A^k \neq 0,$$

следовательно, система (10), при $i = k$ является системой второго рода, которая при непрерывных $K_k(t-\tau)$, $f_k(t)$ имеет единственное непрерывное решение [1]. Непрерывность элементов $K_k(t-\tau)$, $f_k(t)$ следует из третьего условия теоремы.

Теорема доказана.

Отметим, что для однородной системы (1) достаточным условием существования только тривиального решения является условие 1 теоремы 2 [9].

Для систем вида

$$A(t)x(t) + \int_0^t K(t, \tau)x(\tau)d\tau = f(t), \quad t \in [0, 1] \tag{1a}$$

справедлива теорема.

Теорема 3 [10]. *Пусть для задачи (1a) выполнены условия*:

1) $A(t), K(t, \tau), f(t) \in C^2$;

2) $\deg\det(\lambda A(t) + K(t, t)) = \operatorname{rank} A(t) = r = \text{const}$;

3) $(E - A(0)A^-(0))f(0) = 0$.

Тогда данная задача имеет единственное непрерывное решение и, действуя на систему (1a) оператором $\left(E + (E - A(t)A^-(t))\dfrac{d}{dt}\right)$, *получим систему интегральных уравнений*

$$A_1(t)x(t) + \int_0^t K_1(t, \tau)x(\tau)d\tau = f_1(t), \quad t \in [0, 1],$$

с невырожденной $t \in [0, 1]$ *матрицей* $A_1(t)$.

Рассмотрим систему интегро-дифференциальных уравнений

$$B_0 x^{(p)}(t) + B_1 x^{(p-1)}(t) + \cdots + B_p x(t) + \int_0^t D(t-\tau)x(\tau)d\tau = g(t), \tag{11}$$

$$x^{(j)}(0) = a_j, \quad j = 0, 1, \ldots, p-1, \tag{12}$$

где $B_j - (n \times n)$ — постоянные матрицы, $t \in [0,1]$, $D(u)$ и $g(t)$ — достаточно гладкая матрица и вектор-функция соответственно,

$$\operatorname{rank} B_0 = r < n.$$

Рассмотрим матрицу

$$B(\lambda) = \sum_{i=0}^{k} \lambda^{k-i} B_i, \tag{13}$$

где матрицы B_i, $i = 0, 1, \ldots, p$ те же, что и в (11), а $B_{p+j} = D(j-1)(0)$, $j = 1, 2, \ldots, k-p$.

Подействуем на систему (11) оператором

$$P_k = \prod_{i=1}^{k} \left(E + \frac{d}{dt} \left(E - B_0^{(k-i)} B_0^{(k-i)-} \right) \right), \tag{14}$$

где

$$B_0^{(j)} = B_0^{(j-1)} + (E - B_0^{(j-1)} B_0^{(j-1)-}) B_1^{(j-1)}, \quad B_0^{(0)} = B_0, \quad j = \overline{1, k-1}.$$

В силу определения 1 получим систему

$$\sum_{i=0}^{p} B_i^{(k)} x^{(p-i)}(t) + \int_0^t \bar{D}(t-\tau) x(\tau) d\tau = \bar{g}(t), \quad t \in [0,1]. \tag{15}$$

Теорема 4. *Пусть при некотором значении k матрица $B(\lambda)$, определенная по формуле (13), обладает ДС. Тогда у системы (15)* $\det B_0^{(k)} \neq 0$.

Доказательство данной теоремы аналогично доказательству теоремы 2 и поэтому не приводится.

Определение 8. *Минимальное значение k, при котором матрица $B(\lambda)$, определяемая по формуле (13), обладает ДС, назовем индексом неразрешенности системы (11).*

Рассмотрим частный случай системы (11), а именно:

$$\sum_{i=0}^{p} B_i x^{(p-i)}(t) = q(t), \quad t \in [0,1]. \tag{16}$$

Если при k таком, что $1 \leq k \leq p$ матрица $B(\lambda) = \sum_{i=0}^{k} \lambda^{k-i} B_i$ обладает ДС, то, действуя на систему (16) оператором

$$P_k = \prod_{i=1}^{k} \left(E + \frac{d}{dt} \left(E - B_0^{(k-i)} B_0^{(k-i)-} \right) \right),$$

получим систему

$$\sum_{i=0}^{p} B_i^{(k)} x^{(p-i)}(t) = q_k(t), \quad t \in [0,1], \tag{17}$$

с невырожденной матрицей перед старшей производной.

Здесь

$$B_j^{(i)} = B_j^{(i-1)} + \left(E - B_0^{(i-1)} B_0^{(i-1)-} \right) B_{(j+1)}^{(i-1)}, \quad B_j^{(0)} = B_j, \quad j = \overline{0, p}, \quad i = \overline{1, k}.$$

Приведем значение k для случая, когда $B(\lambda)$ не обладает ДС, но $\det B(\lambda) \neq 0$.

Опуская рассуждения, получим

$$k = \begin{cases} (np-s)/(n-r), & \text{если } np-s \text{ кратно } n-r, \\ [(np-s)/(n-r)]+1, & \text{в противном случае,} \end{cases} \tag{18}$$

где $[\cdot]$ — целая часть числа, $s = \deg\det B\,(\lambda)$, $r = \operatorname{rank} B_0$.

Отметим, что при изучении систем первого порядка вида (16) важную роль играет индекс пучка $\lambda B_0 + B_1$, т. е. минимальное целое неотрицательное число k, при котором справедливо равенство [4]:

$$\operatorname{rank}\left((\lambda B_0 + B_1)^{-1} B_0\right)^{k+1} = \operatorname{rank}\left((\lambda B_0 + B_1)^{-1} B_0\right)^{k}.$$

Формула (18) дает другой, более простой, способ вычисления индекса пучка $\lambda B_0 + B_1$, а именно

$$k = \begin{cases} (n-s)/(n-r) & n-s \text{ кратно } n-r, \\ [(n-s)/(n-r)]+1 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где $s = \deg\det(\lambda B_0 + B_1)$, $r = \operatorname{rank} B_0$.

В заключение для иллюстрации приведем преобразование системы (2) к системе интегральных уравнений второго рода.

1) Вычисляем индекс неразрешенности системы (2).

Матрица

$$\lambda A + K(0) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

не обладает ДС, а матрица

$$\lambda^2 A + \lambda K(0) + K'(0) = \begin{pmatrix} \lambda^2 & \lambda \\ \lambda & d \end{pmatrix}$$

при $d \neq 0$ обладает ($\deg\det A(\lambda) = 2$).

Итак, индекс неразрешенности системы (2) равен 2 , т. е. применяя преобразования (10), для данного примера после двух шагов получим систему второго рода. Здесь в качестве полуобратной матрицы A^- взята A^+-псевдообратная матрица.

2) Преобразуем систему.

Шаг 1.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E - AA^+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Проверяем условие 2 теоремы 2 ($(E - AA^+)f(0) = 0$). Получим $f_2(0) = 0$.

Таким образом, после первого шага получим систему:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x(t) + \int\limits_0^t \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & d + d(t-\tau) \end{pmatrix} x(\tau)d\tau = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) + f_2'(t) \end{pmatrix},$$

$$f_2(0) = 0, \quad t \in [0,1].$$

Шаг 2.

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E - AA^+ = \begin{pmatrix} 0.5 & -0.5 \\ -0.5 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

Проверяем условие 2 теоремы 2 ($(E - AA^{(1)+})(f_1(0)\ f_2(0) + f_2'(0))^{\mathrm{T}} = 0$). С учетом того, что $f_2(0) = 0$, получим $f_1(0) = f_2'(0)$.

Итак, после второго шага получим систему с невырожденной матрицей перед $x(t)$:

$$\begin{pmatrix} 1/2 & (1-d)/2 \\ 3/2 & (d-1)/2 \end{pmatrix} x(t) + \int\limits_0^t \begin{pmatrix} 0 & 1 - d/2 \\ 1 & 3d/2 + d(t-\tau) \end{pmatrix} x(\tau)d\tau =$$

$$= \begin{pmatrix} f_1(t) + (f_1'(t) - 0.5(f_2''(t) + f_2'(t))) \\ f_2(t) + f_2'(t) + 0.5(f_2''(t) + f_2'(t) - f_1'(t)) \end{pmatrix},$$

$$f_2(0) = 0, f_1(0) = f_2'(0), \quad t \in [0, 1].$$

Непосредственной проверкой легко убедиться, что решение данной системы и решение системы (2) равны.

Список литературы

[1] Краснов М. Л. Интегральные уравнения. Наука, М., 1975.

[2] Сидоров А. Н. А-присоединенные множества линейных операторов и их приложения к дифференциальным уравнениям. *Методы оптимизации и исследование операций.* СЭИ СО АН СССР, Иркутск, 1984, 169–184.

[3] Чистяков В. Ф. *Алгебро-дифференциальные операторы с конечномерным ядром.* Наука, Новосибирск, 1996.

[4] Бояринцев Ю. Е. *Регулярные и сингулярные системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений.* Наука, Новосибирск, 1980.

[5] Ваарман О. *Обобщенные обратные отображения.* Валгус, Таллинн, 1988.

[6] Гантмахер Ф. Р. *Теория матриц.* Наука, М., 1966.

[7] Булатов М. В. О преобразовании алгебро-дифференциальных систем. *Журн. вычисл. мат. и мат. физики*, **34**, №3, 1994, 360–372.

[8] Курош А. Г. *Курс высшей алгебры.* Наука, М., 1975.

[9] Булатов М. В. О тривиальном решении вырожденных систем интегральных уравнений. *Тез. докл. 10 Байкальской школы семинара “Методы оптимизации и их приложения”.* СЭИ СО РАН, Иркутск, 1995.

[10] Булатов М. В. О вырожденных системах интегральных уравнений типа Вольтерра. Интегральные уравнения и краевые задачи математической физики. *Тр. Всесоюз. конф.* Ч. 2. Владивосток, 1992, 18–22.

Поступила в редакцию 25 февраля 1997 г.,
в переработанном виде 11 февраля 2000 г.