Вычислительные технологии **Том 5, № 3, 2000**

ПОСТРОЕНИЕ СХЕМ ДЛЯ МНОГОМЕРНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА

А. В. Паничкин
Омский филиал Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН
Россия
e-mail: panich@iitam.omsk.net.ru

One of the possible methods for constructing a finite-difference scheme for N-dimensional convective-diffusion equation of transfer resulting in the improved accuracy is considered.

Первоначально строится схема с первым порядком аппроксимации интегральным методом для многомерного случая на расчетной ячейке с трехточечным шаблоном в каждом пространственном направлении (схема подобна известной схеме [1], разработанной для одномерного уравнения). При этом схема обладает равномерной сходимостью относительно малого параметра при старшей производной с первым порядком по h (шаг по сетке). Далее на основе схемы первого порядка точности проводится построение схемы более высокого порядка точности с применением разложения по пространственным координатам (в пределах шагов сетки) для многомерного случая и с частичным устранением возникающей дополнительной аппроксимационной вязкости [2].

Проведенные численные расчеты по переносу вещества (концентрации) в двумерной прямоугольной области на основе разработанной схемы показали существенное повышение точности решений по сравнению с применением схем [1, 3] обычным методом пространственного расщепления. Проведено сравнение результатов с другим методом (см. [4]). Алгоритм для разработанной схемы является более удобным в применении, требует на порядок меньше вычислительной памяти и меньше затрачиваемого времени на проведение расчетов и позволяет использовать средней измельченности сетки для достижения удовлетворительной точности.

1. Воспользуемся попеременным интегрированием при построении конечно-разностных схем для дифференциального уравнения переноса в частных производных.

Рассмотрим уравнение переноса в виде

$$p\frac{\delta U}{\delta x} + r\frac{\delta U}{\delta y} + e\left(\frac{\delta^2 U}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 U}{\delta y^2}\right) = g(x,y), \tag{1}$$

где $e > 0$, p, r — кусочно-постоянные (или далее будут кусочно-линейные) функции, $g(x,y)$ — кусочно-линейная функция ($g(x,y) = g_0 + g_1(x - x_0) + g_2(y - y_0)$).

С целью построения конечно-разностной схемы интегральным методом на ячейке размером $2h_x \times 2h_y$ $(x_3 < x < x_2, y_3 < y < y_2)$ с центром в узле (x_1, y_1) будем рассматривать задачу Дирихле:

$$U(x_3, y) = A_3(y), \quad U(x_2, y) = A_2(y), \quad y_3 < y < y_2,$$
$$U(x, y_3) = B_3(x), \quad U(x, y_2) = B_2(x), \quad x_3 < x < x_2. \tag{2}$$

Область $w = [x_3, x_2] \times [y_3, y_2]$ будет рассматриваться как расчетный элемент для более общей области определения W (области расчета). Для упорядоченных элементов области в случае регулярной сетки будем применять следующую индексацию: $w_{ij} = [x_{i-1}, x_{i+1}] \times [y_{j-1}, y_{j+1}]$, $h_x = (x_{i+1} - x_{i-1})/2$, $h_y = (y_{j+1} - y_{j-1})/2$. При фиксированном y рассмотрим уравнение (1) в виде

$$eU_{xx} + pU_x = [g - eU_{yy} - rU_y]$$

или

$$U_{xx} + p/eU_x = [g/e - U_{yy} - r/eU_y] = [g/e - f_2] =$$
$$= [\hat{g}/e + \hat{g}x/e(x - x1) - \hat{f}_2 - \hat{f}_{2x}(x - x1)] + o(h_x^2/e) \tag{3}$$

на интервале $[x_3, x_2]$, где функции осреднены и заменены кусочно-линейными функциями с приближением $o(h_x^2/e)$ при постоянных коэффициентах $\hat{g}$, $\hat{g}_x$, $\hat{f}_2$, $\hat{f}_{2x}$.

Аналогично рассмотрим уравнение (1) при фиксированном x:

$$eU_{yy} + rU_y = [g - eU_{xx} - pU_x]$$

или

$$U_{yy} + r/eU_y = [g/e - U_{xx} - p/eU_x] = [g/e - f_1] =$$
$$= [\hat{g}/e + \hat{g}_y/e(y - y_1) - \hat{f}_1 - \hat{f}_{1y}(y - y_1)] + o(h_y^2/e) \tag{4}$$

на интервале $[y_3, y_2]$, где функции осреднены и заменены кусочно-линейными функциями с приближением $o(h_y^2/e)$ при постоянных коэффициентах $\hat{g}$, $\hat{g}_x$, $\hat{f}_1$, $\hat{f}_{1y}$.

При интегрировании уравнения (3) на интервалах $[x_3, x]$, $[x, x_2]$ в точке x введем для U дополнительное граничное условие $U_{0x}(x)$ для производной по , которое потом исключим с нахождением решения U на интервале $[x_3, x_2]$ при фиксированном y. Аналогично найдем решение U на интервале $[y_3, y_2]$ при фиксированном x. Далее воспользуемся тем, что справедливо уравнение в осредненных величинах на элементе расчетной области w:

$$\hat{f}_1 + \hat{f}_2 = \hat{g}/e + o(h_x) + o(h_y), \tag{5}$$

$$\hat{f}_1 + \hat{f}_{1x}(x - x1) + \hat{f}_{1y}(y - y1) + \hat{f}_2 + \hat{f}_{2x}(x - x1) + \hat{f}_{2y}(y - y1) =$$
$$= \hat{g}/e + \hat{g}_x/e(x - x1) + \hat{g}_y/e(y - y1) + o(h_x^2 + h_y^2 + h_x h_y). \tag{6}$$

Нетрудно убедиться, что уравнение (6) аппроксимирует уравнение

$$f_1 + f_2 = g/e \tag{7}$$

(эквивалентное уравнению (1)) со вторым порядком точности по h_x и h_y, если для величин $\hat{f}_1$, $\hat{f}_{1x}$, $\hat{f}_{1y}$, $\hat{f}_2$, $\hat{f}_{2x}$, $\hat{f}_{2y}$, $\hat{g}$, $\hat{g}_x$, $\hat{g}_y$ взять значения соответствующих функций в точке

(x_1, y_1). После совмещения решений для уравнений (3) и (4) путем исключения $\hat{f}_1$ и $\hat{f}_2$ по (6) получится уравнение для $U(x,y)$, которое при $x = x_1$ и $y = y_1$ будет представлять двумерную конечно-разностную схему, содержащую неизвестные коэффициенты $\hat{f}_{1x}$, $\hat{f}_{1y}$, $\hat{f}_{2x}$, $\hat{f}_{2y}$. Если при этом указанные коэффициенты найти с точностью $o(h_x) + o(h_y)$ и подставить в решение $U_2(x,y)$ как решение приближенной задачи, то, поскольку они имеют множители порядка h_x или h_y, это решение сохранит второй порядок точности по h_x и h_y. Но в данном случае в знаменателе есть параметр e, который может быть малой величиной и от которого необходимо избавиться, если возможно, для равномерности оценок решения относительно этого параметра. Чтобы неизвестные коэффициенты имели точность $o(h_x) + o(h_y)$, достаточно их получить из решения $U_1(x,y)$, имеющего первый порядок точности по h_x, h_y (без зависимости от малого параметра e).

Построим такое решение $U_1(x,y)$ на основе усеченных уравнений (3), (4) и приближенного уравнения (5). Вместо (3) и (4) рассмотрим уравнения с приближением $o(h_x/e) + o(h_x/e)$:

$$U_{xx} + p/eU_x = [g/e - f_2] + o(h_x/e), \tag{8}$$

$$U_{yy} + r/eU_y = [g/e - f_1] + o(h_y/e). \tag{9}$$

Проинтегрируем уравнение (8) на интервале $[x_3, x_0]$. После замены $U_x = V$ с граничным условием $V(x_0, y_0) = U_{0x}(x_0, y_0)$ (8) имеет вид (при этом y зафиксируем в точке y_0 из интервала $[y_3, y_2]$):

$$V_x + p/eV = [g/e - f_2], \tag{10}$$

$$V(x, y_0) = \exp\left(-\int_{x_0}^{x}\left(\frac{p}{e}\right)dx\right)\left[U_{0x}(x_0) + \int_{x_0}^{x}\left(\frac{\bar{g}}{e} - \bar{f}_2\right)\exp\left(\int_{x_0}^{x}\left(\frac{p}{e}\right)dt\right)dx\right]. \tag{11}$$

Далее интегрируем (10) от граничного условия $U_0(x_0)$ на интервале $[x_0, x]$. Изменим порядок интегрирования в (11) (от x до x_0):

$$V(x, y_0) = \exp\left(\int_{x}^{x_0}\left(\frac{p}{e}\right)dx\right)\left[U_{0x}(x_0) - \int_{x}^{x_0}\left(\frac{\bar{g}}{e} - \bar{f}_2\right)\exp\left(-\int_{x}^{x_0}\left(\frac{p}{e}\right)dt\right)dx\right]. \tag{12}$$

Интегрируя, получаем:

$$\begin{aligned} V(x, y_0) &= \exp\left(\frac{p}{e}(x_0 - x)\right)\left[U_{0x}(x_0) - \int_{x}^{x_0}(\hat{g}/e - \hat{f}_2)\exp\left(\frac{p}{e}(x_0 - x)\right)\right] = \\ &= \exp\left(\frac{p}{e}(x_0 - x)\right)\left[U_{0x}(x_0) - \frac{e}{p}(\hat{g}/e - \hat{f}_2)\left(1 - \exp\left(-\frac{p}{e}(x_0 - x)\right)\right)\right]. \end{aligned} \tag{13}$$

Проинтегрируем теперь уравнение $U_x = V$ на интервале $[x_3, x]$ от граничного условия $U(x_3, y_0) = A_3(y_0)$ $(U(x_3) = A_3)$:

$$\begin{aligned} U(x, y_0) &= A_3 + \int_{x_3}^{x} V\,dx = A_3 + (-\frac{e}{p})U_{0x}(x_0)\left[\exp\left(\frac{p}{e}(x_0 - x)\right) - \exp\left(\frac{p}{e}(x_0 - x_3)\right)\right] + \\ &+ \frac{e^2}{p^2}\left[\exp\left(\frac{p}{e}(x_0 - x)\right) - \exp\left(\frac{p}{e}(x_0 - x_3)\right) + (x - x_3)p/e\right]\left[\frac{\bar{g}}{e} - \bar{f}_2\right]. \end{aligned} \tag{14}$$

Аналогично после интегрирования на интервале $[x_0, x_2]$ с граничными условиями $U_0(x_0)$ и $U(x_2, y_0) = A_2(y_0)$ $(U(x_2) = A_2)$ получаем:

$$\begin{aligned} U(x, y_0) &= A_2 - \int_{x}^{x_2} V\,dx = A_2 - (-\frac{e}{p})U_{0x}(x_0)\left[\exp\left(-\frac{p}{e}(x_2 - x_0)\right) - \exp\left(-\frac{p}{e}(x - x_0)\right)\right] - \\ &- \frac{e^2}{p^2}\left[\exp\left(-\frac{p}{e}(x_2 - x_0)\right) - \exp\left(-\frac{p}{e}(x - x_0)\right) + (x_2 - x)p/e\right]\left[\frac{\bar{g}}{e} - \bar{f}_2\right]. \end{aligned} \tag{15}$$

Вследствие того, что x_0 — произвольная точка на интервале $[x_3, x_2]$, совместим точку $_0$ с точкой , которая тоже произвольна и пробегает значения интервала $[x_3, x_2]$. После этого решения (14), (15) примут вид:

$$U(x,y_0) = A_3 - \frac{e}{p}U_{0x}(x)\left[1 - \exp\left(\frac{p}{e}(x-x_3)\right)\right] + \\ + \frac{e^2}{p^2}\left[1 - \exp\left(\frac{p}{e}(x-x_3)\right) + (x-x_3)p/e\right]\left[\frac{\bar g}{e} - \bar f_2\right], \tag{16}$$

$$U(x,y_0) = A_2 + \frac{e}{p}U_{0x}(x)\left[\exp\left(-\frac{p}{e}(x_2-x)\right) - 1\right] - \\ - \frac{e^2}{p^2}\left[\exp\left(-\frac{p}{e}(x_2-x)\right) - 1 + (x_2-x)p/e\right]\left[\frac{\bar g}{e} - \bar f_2\right]. \tag{17}$$

Исключая $U_0(x, y_0)$ из (16) и (17), приходим к соотношению

$$\frac{U(x,y_0) - A_2 + \dfrac{p^2}{e^2}\left[(x_2-x)p/e + \exp\left(-\dfrac{p}{e}(x_2-x)\right) - 1\right]\left[\dfrac{\bar g}{e} - \bar f_2\right]}{\dfrac{e}{p}\left[\exp\left(-\dfrac{p}{e}(x_2-x)\right) - 1\right]} = \\ = \frac{U(x,y_0) - A_3 - \dfrac{p^2}{e^2}\left[(x-x_3)p/e - \exp\left(\dfrac{p}{e}(x-x_3)\right) + 1\right]\left[\dfrac{\bar g}{e} - \bar f_2\right]}{\dfrac{e}{p}\left[\exp\left(\dfrac{p}{e}(x-x_3)\right) - 1\right]}, \tag{18}$$

из которого выделяем решение:

$$U(x,y_0) = \left[A_2\left[\exp\left(\frac{p}{e}(x-x_3)\right) - 1\right] - A_3\left[\exp\left(-\frac{p}{e}(x_2-x)\right) - 1\right] - \right. \\ - \frac{p^2}{e^2}\left\{\left[\exp\left(\frac{p}{e}(x-x_3)\right) - 1\right] \times \left[(x_2-x)p/e + \exp\left(-\frac{p}{e}(x_2-x)\right) - 1\right] + \right. \\ \left. \left. + \left[\exp\left(-\frac{p}{e}(x_2-x)\right) - 1\right] \times \left[(x-x_3)p/e - \exp\left(\frac{p}{e}(x-x_3)\right) + 1\right]\right\}\left[\frac{\bar g}{e} - \bar f_2\right]\right]/ \\ /\left(\exp\left(\frac{p}{e}(x-x_3)\right) - \exp\left(-\frac{p}{e}(x_2-x)\right)\right). \tag{19}$$

Если ввести обозначения $P_2(x) = 1 - \exp(-p/e(x_2 - x))$ и $P_3(x) = \exp(-p/e(x - x_3)) - 1$, то выражение (19) примет вид:

$$U(x,y_0) = \left[A_2(y_0)P_3(x) + A_3P_2(x) + \frac{e^2}{p^2}\{P_3(x)[P_2(x) - (x_2-x)p/e] + \right. \\ \left. + P_2(x)[(x-x_3)p/e - P_3(x)]\} \times \left[\frac{\bar g}{e} - \bar f_2 + o(h/e)\right]\right]/[P_2(x) + P_3(x)]. \tag{20}$$

Аналогично после интегрирования (9) на интервале $[y_3, y_2]$ при фиксированном $x = x_0$ получаем решение в виде:

$$U(x_0,y) = \left[B_2R_3(y) + B_3R_2(y) + \frac{e^2}{r^2}\{R_3(y)[R_2(y) - (y_2-y)r/e] + \right. \\ \left. + R_2(y)[(y-y_3)r/e - R_3(y)]\} \times \left[\frac{\bar g}{e} - \bar f_1 + o(h/e)\right]\right]/[R_2(x) + R_3(x)], \tag{21}$$

где $R_2(y) = 1 - \exp(-r/e(y_2 - y))$ и $R_3(y) = \exp(-r/e(y - y_3)) - 1$.

Рассматривая решения (20), (21) в произвольной точке (x, y) ячейки w и используя приближенное уравнение (5) для исключения $\hat{f}_1$, $\hat{f}_2$ из (20) и (21), получим следующее приближенное решение $U(x, y)$ на элементе области решения w:

$$U(x,y) = [(A_2P_3 + A_3P_2)p/Q_1 + (B_2R_3 + B_3R_2)r/Q_2 + \bar{g} + o(h)]Q_1Q_2/$$
$$/[Q_1(R_2 + R_3)r + Q_2(P_2 + P_3)p], \qquad (22)$$

где $Q_1(x) = P_2(x - x_3) - P_3(x_2 - x)$, $Q_2(y) = R_2(y - y_3) - R_3(y_2 - y)$, $(x, y) < [x_3, x_2] \times [y_3, y_2]$. Из (22) можно получить конечно-разностную схему порядка (h) без зависимости от малого параметра e. Для этого точку решения (x, y) достаточно рассмотреть в узле (x_1, y_1).

На основе приближенного уравнения (6), используя, например, (22) для определения неизвестных первых производных, можно получить аналогичное решение с повышенным порядком точности:

$$U(x,y) = \{[(A_2P_3 + A_3P_2)p + g_1/2(P_2((x - x_1)^2 - (x_3 - x_1)^2) + P_3((x - x_1)^2 - (x_2 - x_1)^2))]/Q_1 +$$
$$+[(B_2R_3 + B_3R_2)r + g_2/2(R_2((y - y_1)^2 - (y_3 - y_1)^2) + R_3((y - y_1)^2 - (y_2 - y_1)^2))]/Q_2 +$$
$$+\bar{g} + ef_{2x}(x - x_1) + ef_{1y}(y - y_1) - eg_1/p - eg_2/r + o(h^2)\}, \qquad (23)$$

где $g_1 = g_x - ef_{2x}$, $g_1 = g_x - ef_{1y}$. Чтобы применить полученное выражение (23) на расчетных ячейках с равномерным шагом в качестве конечно-разностной схемы, достаточно заменить (x, y) на (x_1, y_1) и применить аппроксимацию для неизвестных величин f_{1y}, f_{2x}, влияние которых пропорционально коэффициенту диффузии e, который рассматривается достаточно малой величиной. Поэтому данное влияние на решение в целом будет в какой-то мере ассимтотическим по e.

2. Рассмотрим задачу переноса вещества с разной концентрацией на границах и произведем расчеты по различным схемам. Исходным уравнением будет уравнение (1) с искомой функцией (x, y) вместо $U(x, y)$ и компонентами скорости (u, v) вместо (p, r). Область расчета показана на рис. 1 с примером расчетной ячейки. Развернутые узлы соответствуют расчетам по работе [5]. Расчеты проводились при коэффициенте диффузии от 0.1 до 10^{-7}, компонентах скорости $(u, v) = 1, 0.66$, на сетках (10×10) (сетка 1), (20×20) (сетка 2),

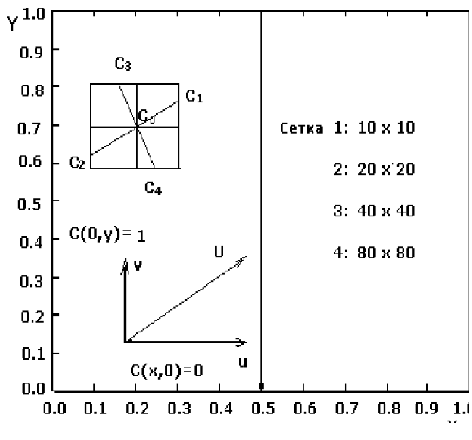

Рис. 1. Расчетная область с образцом ячейки ($_1$, $_2$, $_3$, $_4$ — значения в дополнительных узлах) и направлением переноса U.

(40×40) (сетка 3), (80×80) (сетка 4) в области 1.0×1.0 с граничными условиями $(0,y)=1$, $C(x,0)=C(1,y)=C(x,1)=0$ (см. рис. 1). При других направлениях скорости, не совпадающих с узловыми направлениями, сравнения результатов, полученных по схеме (23), с другими данными подобны. Расчеты при коэффициенте диффузии 10^{-1}, 10^{-2} и направлениях скорости, близких к узловым линиям, показали нецелесообразность применения схемы (23) из-за сильного искажения решения, вносимого определением в схеме элементов f_{1y}, f_{2x} с множителем e и делителями p и r. В таких случаях достаточно применить обычную схему без дополнительных построений.

На рис. 2–4 показаны расчеты в разрезе области при $x=0.5$ при коэффициенте диффузии 10^{-3}, 10^{-4}, 10^{-5} соответственно для схемы (23) (линии *1*, *2*, *3* на трех сетках 1, 2, 3), для экспоненциальной схемы второго порядка точности с использованием алгоритма [4] (линия *4* на сетке 3, с которой расчеты на сетках 1 и 2 практически совпадают), для схемы направленных разностей (линии *5*, *6*, *7* на соответствующих сетках), а также для схемы А. А. Самарского (линия *8* для расчета на сетке 3). На рис. 3 и 4 линия *8* соответствует расчетам по (23) на сетке 4. При данных коэффициентах диффузии расчеты по экспоненциальной схеме первого порядка совпадают с расчетами по схеме направленных разностей (см. [5]).

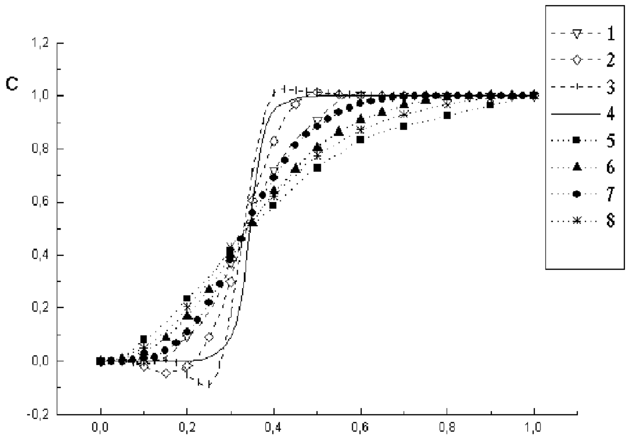

Рис. 2. $Y, X=0,5$, $e=1.0E-3$.

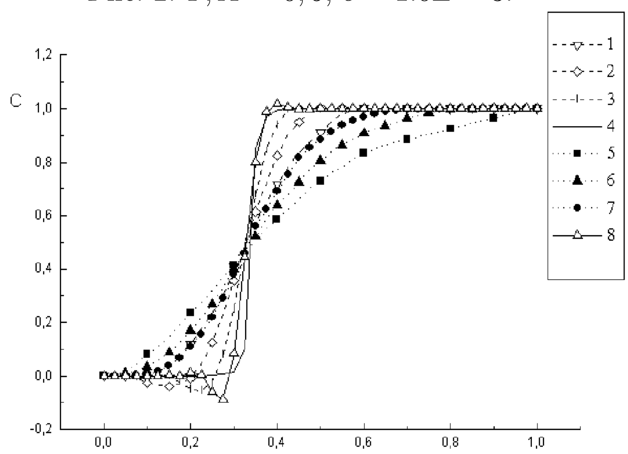

Рис. 3. $Y, X=0.5$, $e=1.0E-4$.

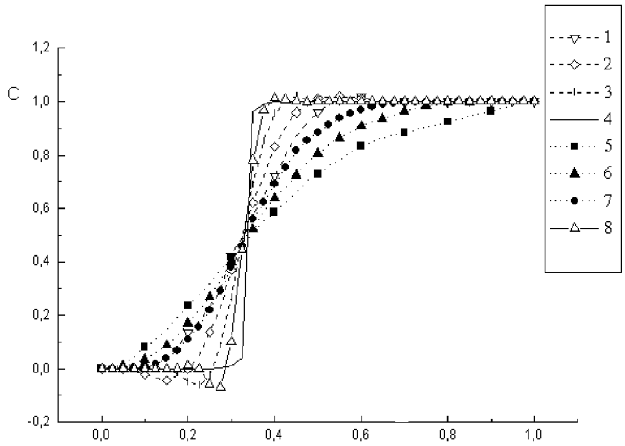

Рис. 4. $Y, X = 0.5$, $e = 1.0E-5$.

Из результатов видно, что расчеты по обычным схемам дают аппроксимационную диффузию порядка 0.01 и нет большого отличия кривых с рис. 3, 4 от решения на рис. 2, в то время как кривые с применением алгоритма [4] соответствуют решению с заданными коэффициентами диффузии (10^{-3}, 10^{-4}, 10^{-5}). Разработанная схема (23) с аппроксимацией членов f_{1y}, f_{2x} обычными центральными разностями имеет более близкое решение к “эталонному” решению с линиями *4*. Небольшое осциллирование решения имеет место из-за применения немонотонных конечно-разностных операторов для f_{1y}, f_{2x}. С уменьшением коэффициента диффузии осцилляции уменьшаются и интегральная норма отклонения от наиболее точного решения (линии *4*) стабилизируется, в то же время для других схем такая норма при расчетах на рассматриваемых сетках значительно больше (табл. 1–3). В таблицах под номером 1 рассмотрена схема (23), 2 — схема направленных разностей (и схема [1] при $e > 10^{-2}$), 3 — схема А. А. Самарского.

Из проведенного анализа следует, что применение схем на основе (23) целесообразно при достаточно малых коэффицинтах диффузии с исходными диффренциальными уравнениями типа (1) для многомерных областей определения решения. При использовании

Таблица 1

h	Расчет при $e = 1.0E-2$		
	1	2	3
0.1	0.1093	0.1050	0.0997
0.50E-1	0.2074	0.0704	0.0427
0.25E-2	—	0.0448	0.0109

Таблица 2

h	Расчет при $e = 1.0E-3$		
	1	2	3
0.1	0.0754	0.1629	—
0.50E-1	0.0344	0.10775	—
0.25E-2	0.0307	0.0690	0.1525
0.12E-2	0.0507	0.0472	0.0973

Таблица 3

h	Расчет при $= 1.0-4$ и $= 1.0-5$			
	1	2	1	2
0.1	0.0886	0.1755	0.0938	0.1764
0.50E-1	0.0501	0.1226	0.0701	0.1326
0.25E-2	0.0306	0.0871	0.0362	0.0898
0.12E-2	0.0171	0.0613	0.0211	0.0641

обычной аппроксимации с центральными разностями для элементов f_{1y}, f_{2x} следует асимптотическая погрешность решения порядка $(h + eh)$, хотя из вывода соотношения (23) погрешность может иметь вид (h^2), если решить проблему с более точным определением f_{1y}, f_{2x}.

Список литературы

[1] Ильин А. М. Разностная схема для дифференциального уравнения с малым параметром при старшей производной. *Математич. заметки*, **6**, №2, 1969, 237–248.

[2] Патанкар С. *Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости*: Пер. с англ. Энергоатомиздат, М., 1984.

[3] Емельянов К. В. Разностная схема для дифференциального уравнения с малым параметром при старшей производной. *Сборник ЧММСС*, **11**, №5, 1980, 54–74.

[4] Паничкин А. В. Алгоритм уменьшения искусственной диффузии в конечно-разностных схемах для многомерных задач. *Тез. междунар. конф. "Математические модели и численные методы МСС"*. Изд-во СО РАН, Новосибирск, 1996, 426–427.

[5] Паничкин А. В. Численный расчет многомерных задач переноса с алгоритмом уменьшения искусственной диффузии. *Докл. междунар. конф. "Модели механики сплошной среды, вычислительные технологии и автоматизированное проектирование в авиа- и машиностроении"*. Изд-во Казанского гос. техн. ун-та, 1997, 142–148.

Поступила в редакцию 11 июня 1999 г.