

---

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

---

DOI:10.25743/ICT.2024.29.6.003

# Компьютерное моделирование реальных объектов в задаче нефтевытеснения

А. Д. НОРМУРОДОВ, З. УЗАКОВ\*, О. У. БЕГУЛОВ

Каршинский филиал Ташкентского университета информационных технологий  
им. Мухаммада аль-Хоразмий, 180101, Карши, Узбекистан

\*Контактный автор: Узаков Заир, e-mail: [zair90uzakov@gmail.com](mailto:zair90uzakov@gmail.com)

Поступила 28 декабря 2023 г., доработана 01 апреля 2024 г., принята в печать 10 апреля 2024 г.

Исследована применимость объектно-ориентированного подхода при численном моделировании на компьютере одномерного процесса нефтевытеснения. Рассмотрена одномерная задача нефтевытеснения в рамках математической модели двухфазной фильтрации, задача решена методом конечных разностей. Исследованы вопросы создания компьютерных аналогов таких реальных объектов, как нагнетательная скважина, добывающая скважина, нефтеносная среда между скважинами, а также вопросы анализа состояния, поведения и взаимодействия компьютерных объектов, которые моделируют реальный процесс нефтевытеснения. Представлены и проанализированы результаты вычислительных экспериментов по прогнозированию таких технологических показателей, как значение коэффициента текущей нефтеотдачи нефтеносного пласта, значение обводненности добывающих скважин при различных значениях отношения динамических вязкостей фаз. На основе вычислительных экспериментов и анализа их результатов показана применимость объектно-ориентированного подхода.

**Ключевые слова:** процесс нефтевытеснения, математическая модель, объектно-ориентированный подход, компьютерные аналоги реальных объектов, конечно-разностный метод, объектное моделирование состояния и функционирования скважин.

**Цитирование:** Нормуродов А.Д., Узаков З., Бегулов О.У. Компьютерное моделирование реальных объектов в задаче нефтевытеснения. Вычислительные технологии. 2024; 29(6):35–51. DOI:10.25743/ICT.2024.29.6.003.

## Введение

В нефтедобывающей промышленности после добычи нефти первичным, фонтанным способом немалая часть первоначального запаса остается в пласте. В целях более полного извлечения имеющихся запасов полезного ископаемого применяются вторичные методы, и одним из традиционных является метод заводнения нефтеносного пласта. Для извлечения оставшейся нефти через нагнетательные скважины в пласт закачивается жидкость (как правило, вода), которая вытесняет нефть к добывающим скважинам, через которые она извлекается. Степень извлечения имеющихся запасов нефти зависит от оптимальности технологии вытеснения. Определение оптимальной технологии процесса нефтевытеснения методом математического моделирования на компьютере не только обходится дешевле по сравнению с натурными экспериментами, но и позволяет изучить физический процесс глубже путем проведения вычислительных экспериментов при различных значениях физических параметров, характеризующих нефтяные

месторождения и процесс вытеснения. В монографии [1] отмечается, что используемые методы определения характеристик месторождения в полевых условиях требуют много времени и финансовых средств. Поэтому математическое моделирование процессов, происходящих в нефтеносном пласте, и численные методы используются в предварительных и последующих исследованиях в качестве эффективного инструмента для определения продуктивности и будущего поведения нефтяного месторождения.

Важными этапами математического моделирования изучаемого процесса на компьютере являются разработка математической модели процесса, алгоритма численного решения задачи и соответствующего программного обеспечения, проведение вычислительных экспериментов и анализ их результатов. При разработке программного обеспечения применяются различные технологии программирования: структурная, процедурная, объектно-ориентированная и обобщенная с использованием стандартной библиотеки. В настоящее время объектно-ориентированная технология — одна из наиболее распространенных. Такой подход позволяет построить компьютерные аналоги объектов реального мира, моделировать их состояние, поведение и взаимодействие.

Научная значимость рассматриваемых в статье вопросов состоит в исследовании применения объектно-ориентированного подхода при численном моделировании на компьютере одномерного процесса двухфазной фильтрации в пористой среде применительно к задаче нефтевытеснения. Математическая модель Лиса – Рапопорта двухфазной фильтрации несмешивающихся и несжимаемых жидкостей, использованная в данной статье, имеет свои особенности. В ней вырождаются параболическое уравнение (изменение типа) и граничные условия относительно функции насыщенности (обращение в бесконечность градиента функции) при нижнем и верхнем предельных значениях функции насыщенности. Вырождение граничных условий вызывает определенные трудности при их численной реализации [2]. В данной работе кратко описаны метод и алгоритм численной реализации граничных условий на нагнетательной и добывающей скважинах, позволяющие разрешить возникающую неопределенность вида  $0 \cdot \infty$  как конечную величину [2, 3].

В ряде исследований при построении математических моделей процессов фильтрации использованы модифицированные уравнения неразрывности и изменение типа основного решаемого уравнения. Например, в статье [4] построены различные математические модели фильтрации сжимаемой жидкости и выполнен переход от параболической системы уравнений к гиперболической. В препринте [5] для построения математических моделей многофазных течений слабосжимаемых жидкостей использованы гиперболизированные уравнения неразрывности. В статье [6] исследованы математическая модель и алгоритм решения задачи фильтрации нефти в двухпластовых пористых средах, в [7] рассмотрены вопросы математического моделирования двухфазных течений в пористых средах, в частности моделирования процессов нефтедобычи. Предложен экономичный численный алгоритм, основанный на кинетическом подходе с использованием явных схем, обеспечивающий высокую эффективность применения современных суперкомпьютеров гибридной архитектуры для параллельных вычислений. В [8] процесс двухфазной фильтрации в неоднородных трещиновато-пористых средах исследован с использованием модели двойной пористости и метода конечных элементов.

Вычислительным методам решения задач многофазного течения в пористой среде посвящены монографии [1, 9], научные статьи [4, 6, 7, 10–14]. В [1, 9] рассмотрены основные вопросы приближенного решения численными методами задач многофазного течения в пористой среде, класса задач конвекции–диффузии, к которым принадле-

жит и рассматриваемая в этой статье задача нефтевытеснения. Дискретные модели изучаемых процессов построены на основе конечно-разностных и конечно-элементных аппроксимаций дифференциальных моделей. В [4] для численного решения гиперболической системы уравнений предложены трехслойные явные схемы, имеющие менее жесткие условия устойчивости по сравнению с двухслойными схемами. В [6] исследован алгоритм решения задачи фильтрации нефти в двухпластовых пористых средах. Численное решение задачи выполнено конечно-разностным методом, вычислительный алгоритм реализован методом прогонки. На основе результатов вычислительных экспериментов, проведенных при различных характеристиках пласта и расходов эксплуатационных скважин, выполнен синтез основных параметров и диапазонов их изменения. Отмечено, что эффективность добычи нефти и газа в определенной степени зависит от разработки месторождения.

В [10] предложены математическая модель и алгоритм численного моделирования фильтрации трехфазной смеси пар–вода–нефть в пористом пласте при паротепловом воздействии на нефтеносный пласт. Рассмотрены конвективный и диффузионный механизмы теплопередачи и массопереноса смеси. Для описания изменения насыщенности фаз использованы нестационарные балансовые соотношения для каждой фазы. Пространственная дискретизация уравнений математической модели осуществлена методом конечных объемов, а дискретизация по времени — с помощью прямой схемы Эйлера. В [11] для численного решения двумерной задачи двухфазной фильтрации с неоднородными коэффициентами использованы неявная конечно-разностная аппроксимация по времени для уравнения насыщенности и конечно-элементная аппроксимация по пространственным переменным. Исследовано поведение насыщенности при воздействии различных параметров и сил с учетом нелинейности коэффициентов.

В статье [12] исследованы нестационарные процессы фильтрации двухфазных жидкостей в околоскважинных зонах многопластовых коллекторов, плоскопараллельное течение и осесимметричные случаи. При численном решении задачи использованы неструктурированные сетки, ближе к скважине сетки сгущаются. В препринте [5] предложены алгоритмы, использующие аппроксимацию модифицированных уравнений трехслойными явными разностными схемами. На примере тестовых расчетов проведено сравнение двух подходов, показана возможность увеличения шага по времени разностной сетки по сравнению с реализацией классической модели двухслойными явными схемами.

Вопросам численного моделирования процессов одно- и двухфазной фильтрации посвящены также статьи [13, 14]. В [13] рассмотрен вопрос о численном моделировании фильтрации двухфазной несжимаемой жидкости смешанным методом конечных элементов. В статье [14] выполнены численное моделирование задачи двухфазной фильтрации в системе нефть–газ и двумерное моделирование процессов однофазной фильтрации.

В докторской диссертации [15] отмечается, что для решения многих практических задач требуется, чтобы используемый язык программирования имел объектно-ориентированные функции, такие как наследование, классы шаблонов, виртуальные функции и перегрузка операторов. Язык C++ обладает всеми этими функциями, позволяет создавать эффективно исполняемые файлы. Применение объектно-ориентированного подхода при разработке больших и сложных программных систем дает такие преимущества, как повышенная расширяемость и возможность повторного использования программы и возможность моделирования параллельных систем [16, 17]. Объектно-ориен-

тированный подход охватывает все этапы разработки программного обеспечения: от анализа требований, проектирования и реализации до тестирования и обслуживания программного обеспечения. Объектно-ориентированное программирование относится к каскадной модели разработки программного обеспечения и основано на базовом предположении, что разработчик на этапе анализа требований к программному обеспечению обладает знаниями и навыками идентификации объектов изучаемых реальных процессов и явлений, их атрибутов и функций [18]. Работа не с самим реальным объектом, явлением или процессом, а с его моделью дает возможность относительно быстро и без существенных затрат исследовать его свойства и поведение [19].

При объектно-ориентированном подходе к программированию как к моделированию информационных объектов на новом уровне решается основная задача структурного программирования — структурирование информации с точки зрения управляемости, что особенно важно при реализации крупных проектов [20]. Он позволяет исследователю и программисту, исходя из изучаемого процесса или явления, создавать с помощью классов свои собственные, необходимые и удобные для исследования типы данных, названия типов совпадают с именами создающих их классов. Каждый класс содержит данные и набор функций, которые манипулируют этими данными, и каждый класс в целом является описанием конкретного объекта реального мира. Классы предоставляют программисту возможность моделировать объекты с атрибутами и различными вариантами поведения, которые описываются методами класса. По мнению авторов монографии [21], объектно-ориентированный подход является более естественным и интуитивным путем для обозрения процесса программирования, именно моделированием объектов реального мира, их атрибутов и поведения, коммуникации между объектами.

В работе [22] с использованием методов объектно-ориентированного программирования создан компьютерный симулятор для моделирования процессов многофазной фильтрации и теплопроводности. В диссертации [23] разработаны параллельные объектно-ориентированные алгоритмы для моделирования тепловых систем, которые дают определенные преимущества в управлении программными проектами. В магистерской диссертации [24] исследован вопрос о создании объектно-ориентированной мультифизической среды моделирования при проектировании и анализе систем фазовой автоподстройки частоты, которые широко используются в телекоммуникациях и электронном дизайне. В диссертационной работе [25], наряду с разработкой математических и численных моделей процессов многофазной фильтрации в пористых средах, использованы современные объектно-ориентированные библиотеки Fortran для создания быстродействующих средств моделирования пластов.

В данной работе проведена идентификация объектов и классов в реальной задаче нефтewытеснения. В программе на языке C++ определены классы `injection_well`, `production_well`, `displacement_process_1`, `displacement_process_2`, с помощью этих классов разработан и реализован алгоритм создания компьютерных аналогов таких реальных объектов, как нагнетательная скважина, добывающая скважина, нефтеносная среда между скважинами, выполнен анализ состояния, поведения и взаимодействия компьютерных объектов, которые моделируют реальный процесс нефтewытеснения. Представлены результаты вычислительных экспериментов на компьютере по моделированию одномерного процесса нефтewытеснения, прогнозированию динамики изменения значения коэффициента текущей нефтewотдачи пласта, степени обводненности добывающих скважин.

## 1. Цель и задачи исследования

Цель исследования — изучение применимости объектно-ориентированного подхода в компьютерном моделировании одномерного процесса вытеснения нефти в пористой среде. Задачами исследования являются:

- идентификация объектов, результат взаимодействия которых — это реальный процесс нефтевытеснения;
- определение атрибутов и функций реальных объектов;
- разработка компьютерных объектов на языке объектно-ориентированного программирования C++, являющихся аналогами реальных объектов процесса нефтевытеснения;
- анализ состояния, поведения и взаимодействия компьютерных объектов, их соответствия состоянию и взаимодействию реальных объектов;
- разработка программного обеспечения на основе объектно-ориентированного подхода, позволяющего моделировать одномерный процесс вытеснения нефти;
- проведение вычислительных экспериментов на компьютере с использованием разработанной программы и анализ результатов экспериментов.

В реальном процессе нефтевытеснения участвуют объекты следующих трех классов:

- 1) нагнетательная скважина, через которую в определенном режиме в нефтеносный пласт закачивается вытесняющая фаза (скважины IW1 и IW2 на рис. 1, `injection_well`);
- 2) добывающая скважина, где происходит отбор вытесняемой фазы (нефти), а с определенного момента времени — отбор обеих фаз (скважины PW1 и PW2, `production_well`);
- 3) нефтеносная среда между нагнетательной и добывающей скважинами, где происходит процесс вытеснения нефти в сторону эксплуатационной скважины (`displacement_process_1`, `displacement_process_2`).

Одна из возможных схем расположения нагнетательных и добывающих скважин представлена на рис. 1, где стрелки, направленные вниз, означают закачку вытесняющей фазы через нагнетательные скважины в нефтеносный пласт; стрелки, направленные вверх, — отбор одной фазы или обеих фаз через добывающие скважины; горизонтальные стрелки означают процесс вытеснения нефти водой от нагнетательной скважины к соответствующей добывающей скважине.

Атрибутами, т. е. величинами, характеризующими объекты класса “нагнетательная скважина”, являются объем нагнетаемой вытесняющей фазы и достигнутая ее насы-

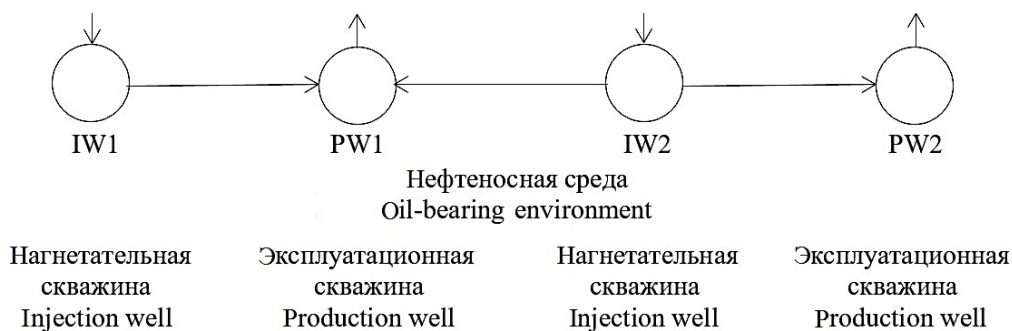


Рис. 1. Схема реальных объектов процессов нефтевытеснения и их взаимодействия

Fig. 1. Scheme of real objects of the oil displacement processes and their interaction

щенность. Атрибутом объектов классов “добывающая скважина” и “нефтеносная среда” между нагнетательной и эксплуатационной скважинами является текущая насыщенность вытесняющей фазы.

## 2. Математическая модель задачи нефтewытеснения

Процесс нефтewытеснения исследуется методом математического моделирования на компьютере в целях прогнозирования таких технологических показателей, как коэффициент текущей нефтеотдачи пласта, время и коэффициент безводной нефтеотдачи, степень обводненности добывающих скважин. Технологические показатели вычисляются по результатам расчета распределения функции насыщенности вытесняющей фазы в рамках математической модели процесса двухфазной фильтрации. Распределение функции насыщенности второй, вытесняющей, фазы  $S(x, t)$  в рамках модели Лиса – Рапопорта двухфазной фильтрации без учета гравитационных сил при заданном объемном расходе вытесняющей фазы описывается нелинейным уравнением параболического типа

$$m \frac{\partial S}{\partial t} + W \frac{\partial \varphi(S)}{\partial x} = \frac{\partial [a(S) \partial S / \partial x]}{\partial x}, \quad (1)$$

где  $m$  — пористость нефтеносной среды;  $S = S(x, t)$  — искомая функция;  $W$  — объемный расход вытесняющей фазы на нагнетательной скважине;  $\varphi(S)$  и  $a(S)$  — известные функции, выражающиеся через функции относительных фазовых проницаемостей вытесняемой  $f_1(S)$  и вытесняющей  $f_2(S)$  фаз, отношение динамических вязкостей фаз  $\mu_0 = \mu_1/\mu_2$ , абсолютную проницаемость пористой среды  $k$  и функцию капиллярного давления  $P_k(S)$ :

$$\varphi(S) = \mu_0 \frac{f_2(S)}{f_1(S) + \mu_0 f_2(S)}, \quad a(S) = -k_1 \varphi(S) P'_k(S) \geq 0, \quad k_1 = \frac{k}{\mu_1 f_1(S)} \quad (2)$$

— функция проницаемости первой фазы,  $x$  и  $t$  — пространственная и временная переменные [2, 3]. В качестве примеров функций относительных фазовых проницаемостей можно привести функции  $f_1(S) = ((0.8 - S)/0.6)^3$  и  $f_2(S) = ((S - 0.2)/0.8)^3$ , а в качестве примера функции капиллярного давления —  $P_k(S) = \sigma \cos \theta \sqrt{m/k} (0.0072/S - S/2 + 0.391)$ , обладающие свойствами

$$\begin{aligned} f_1(S \leq \underline{S} = 0.2) = 1, \quad f_1(S \geq 0.8) = 0, \quad f_2(S \leq \underline{S} = 0.2) = 0, \\ f_2(S \geq \bar{S} = 1) = 1, \quad P_k(S) \geq 0, \quad P'_k(S) < 0, \end{aligned} \quad (3)$$

где значения  $S = \underline{S} = 0.2$  и  $S = \bar{S} = 1$  соответственно нижнее и верхнее предельные значения функции насыщенности. Условие закачки на нагнетательной скважине  $\Gamma_n$  вытесняющей фазы с объемным расходом  $W$

$$W_2|_{\Gamma_n} = \left( \varphi(S)W - \frac{a(S)\partial S}{\partial x} \right)_{\Gamma_n} = W = \text{const} \quad (4)$$

порождает граничное условие

$$\left( \frac{\partial S}{\partial x} \right) \Big|_{\Gamma_n} = -[1 - \varphi(S)] \frac{W}{a(S)} \Big|_{\Gamma_n}. \quad (5)$$

Условие отбора фаз на добывающей скважине  $\Gamma_d$ , пропорциональное их фазовым проницаемостям  $k_i = k/\mu_i f_i(S)$ ,  $i = 1, 2$ , порождает граничное условие [2, 3]

$$\left. \frac{\partial S}{\partial x} \right|_{\Gamma_d} = 0. \quad (6)$$

Предполагается также, что задано некоторое начальное распределение функции насыщенности

$$S(x, 0) = S_0(x). \quad (7)$$

### 3. Метод и алгоритм численного решения задачи

Задача (1)–(7) решается численно конечно-разностным методом в области  $D = \{0 \leq x \leq L, 0 \leq t \leq T\}$ . Область покрыта равномерной сеткой  $x_i = ih$ ,  $t_j = j\tau$ ,  $i = 0, 1, \dots, N$ ,  $j = 0, 1, \dots, M$ ;  $h$  и  $\tau$  — шаги разностной сетки по пространству и времени. Используется явная конечно-разностная схема с “центральной разностью”

$$m \frac{S_i^{j+1} - S_i^j}{\tau} + W \frac{\varphi_{i+1/2}^j - \varphi_{i-1/2}^j}{h} = \frac{a_{i+1/2}^j (S_{i+1}^j - S_i^j) - a_{i-1/2}^j (S_i^j - S_{i-1}^j)}{h^2}, \quad (8)$$

где  $\varphi_{i+1/2}^j = \varphi((S_{i+1}^j + S_i^j)/2)$ ,  $a_{i+1/2}^j = a((S_{i+1}^j + S_i^j)/2)$ .

Особенности граничных условий (5) и (6), алгоритмы их численной реализации описаны в работах [2, 3]. Реализация граничного условия (5), например, на нагнетательной скважине, расположенной в точке  $x = 0$ , с привлечением дифференциального (1) и разностного (8) уравнений приводит к соотношению

$$S_0^{j+1} = S_0^j + 2 \frac{\tau}{mh} \left( (1 - \varphi_{1/2})W + a_{1/2}^j \frac{S_1^j - S_0^j}{h} \right), \quad (9)$$

которое позволяет вычислять значение функции насыщенности на нагнетательной скважине на временном шаге  $(j+1)$ . Реализация граничного условия (5) на второй нагнетательной скважине, расположенной, например, в узле  $i = 15$  разностной сетки, приводит по соотношению

$$S_{15}^{j+1} = S_{15}^j + 2 \frac{\tau}{mh} \left( (1 - \varphi_{15+1/2})W + a_{15+1/2}^j \frac{S_{16}^j - S_{15}^j}{h} \right). \quad (10)$$

Реализация граничного условия (6) на эксплуатационной скважине, расположенной в граничном узле  $i = N$  разностной сетки, приводит к соотношению

$$S_N^{j+1} = S_N^j - 2 \frac{\tau}{mh} \left( (\varphi_N - \varphi_{N-1/2})W + a_{N-1/2}^j \frac{S_N^j - S_{N-1}^j}{h} \right), \quad (11)$$

которое позволяет вычислять значение функции насыщенности вытесняющей фазы на добывающей скважине на следующем временном слое разностной сетки.

#### 4. Объектное моделирование состояния и функционирования нагнетательных скважин

В программном обеспечении моделирование состояния и функционирования нагнетательных скважин выполняется соответствующими объектами класса `injection_well`. Метод `injection_well(int NIW, double PS1, double PS2)` реализует граничное условие (5) на нагнетательной скважине с номером NIW и вычисляет новое на  $(j+1)$ -м временном шаге значение PS2 функции насыщенности по формуле (9) или (10) с использованием значения функции насыщенности на предыдущем,  $j$ -м временном шаге PS1. Математическая формула (10) как бы описывает работу соответствующей нагнетательной скважины.

Нагнетательных скважин может быть несколько. Каждая из них является соответствующим объектом класса `injection_well` и характеризуется такими одинаковыми по содержанию атрибутами, как заданная в рассматриваемой задаче объемная скорость вытесняющей фазы WIW и насыщенность вытесняющей фазы, достигнутое значение SIW которой вычисляется в результате реализации граничного условия (5). В процессе функционирования каждой нагнетательной скважины, которое описывается поведением соответствующего компьютерного объекта, изменяется ее состояние, другими словами, изменяется значение ее атрибута SIW. Вычисленное новое значение SIW используется другим объектом, моделирующим функционирование соответствующей реальной среды между нагнетательной и эксплуатационной скважинами.

Объектное моделирование состояния и функционирования добывающих скважин выполняется соответствующими объектами класса `production_well(int NPW, double PS1)`. Этот метод реализует граничное условие (6) и вычисляет по формуле (11) новое значение функции насыщенности — значение на  $(j+1)$ -м временном шаге. Вычисленное новое значение насыщенности используется другим объектом, моделирующим функционирование соответствующей среды между эксплуатационной и нагнетательной скважинами. В результате функционирования каждой из добывающих скважин, которое описывается поведением соответствующего компьютерного объекта, изменяется ее состояние, другими словами, изменяются значения ее атрибута SPW.

Объектное моделирование функционирования нефтеносной среды между нагнетательной и эксплуатационной скважинами выполняется объектами классов `displacement_process_1` и `displacement_process_2`. Объекты класса `displacement_process_1` моделируют процесс нефтевытеснения между первой нагнетательной скважиной IW1 и первой эксплуатационной скважиной PW1, а также между второй нагнетательной скважиной IW2 и второй эксплуатационной скважиной PW2, где движение фаз происходит слева направо. Объект класса `displacement_process_2` моделирует процесс нефтевытеснения между второй нагнетательной скважиной IW2 и первой эксплуатационной скважиной PW1, где движение фаз происходит справа налево, что влияет на алгоритм реализации конечно-разностной схемы (8). Атрибутами классов `displacement_process_1` и `displacement_process_2` являются массивы значений насыщенности в пространственных узлах разностной сетки между скважинами на текущем и предыдущем временных слоях. Методы `displacement_process_1` и `displacement_process_2` вычисляют значения насыщенности в соответствующих пространственных узлах разностной сетки на следующем шаге по времени по разностной схеме (8). Параметры объектов классов `displacement_process_1` и `displacement_process_2` принимают новые значения, т.е. объекты этих классов меняют свое состояние.



## 5. Взаимодействие компьютерных объектов

Для первой нагнетательной скважины IW1 создается объект класса `injection_well`, в котором реализуется граничное условие (5), в результате чего вычисляется и хранится новое значение функции насыщенности на этой скважине. Объект класса `displacement_process_1` берет и использует это значение для вычисления значений функции  $S(x, t)$  в узлах разностной сетки между скважинами IW1 и PW1 по разностной схеме (8). В объекте указанного класса создается и хранится массив новых значений функции  $S(x, t)$  в узлах разностной сетки между скважинами IW1 и PW1. Создаваемый объект класса `production_well` берет из объекта класса `displacement_process_1` соответствующие значения функции насыщенности  $S(x, t)$  в левой окрестности эксплуатационной скважины PW1 и использует их для вычисления нового значения функции насыщенности на эксплуатационной скважине PW1 путем реализации граничного условия (6) по формуле (11). Аналогично взаимодействуют компьютерные объекты, моделирующие состояние и функционирование скважин IW2 и PW2 и нефтеносной среды между ними.

Отметим, что на первую эксплуатационную скважину PW1 воздействуют две нагнетательные скважины IW1 и IW2. Воздействие первой скважины описано выше. Для учета воздействия второй скважины IW2 рассматривается объект класса `displacement_process_2`, который берет из объекта класса `injection_well`, созданного для скважины IW2, значение функции насыщенности на этой скважине и использует его для вычисления значений функции  $S(x, t)$  в узлах разностной сетки между этими скважинами. Расчет ведется справа налево. Объект класса `displacement_process_2` создает и хранит массив новых значений функции  $S(x, t)$  в узлах разностной сетки между этими скважинами. Новый объект класса `production_well`, создаваемый для первой эксплуатационной скважины PW1, берет от объекта класса `displacement_process_2` значение функции насыщенности  $S(x, t)$  вытесняющей фазы в правой окрестности эксплуатационной скважины PW1 и использует их для вычисления нового значения этой функции на первой эксплуатационной скважине PW1. Новое значение функции насыщенности  $S(x, t)$  на этой скважине является результатом воздействия двух нагнетательных скважин.

## 6. Результаты вычислительных экспериментов и их обсуждение

В работе проведены вычислительные эксперименты по численному решению одномерной задачи двухфазной фильтрации (1)–(7) применительно к процессу нефтевытеснения с использованием объектно-ориентированного подхода. Часть результатов вычислительных экспериментов, полученных при  $\mu_0 = 2$  и  $\mu_0 = 10$ ,  $m = 0.2$ ,  $k = 0.0000000302$  мд,  $\mu_1 = 0.01$  пуаз,  $\sigma = 75.0$ ,  $\theta = 0.5$ ,  $W = 0.12$  см<sup>3</sup>/с,  $S(x, 0) = 0.2$ ,  $\tau = 0.0005$  с,  $h = 2.0$  см,  $NX = 30$ ,  $L = 60$  см, представлена на рис. 2–4. Нагнетательные скважины расположены в пространственных узлах разностной сетки с координатами  $x = 0$  см и  $x = 40$  см, а эксплуатационные скважины — в узлах  $x = 20$  см и  $x = 60$  см. Распределение насыщенности вытесняющей фазы в различные моменты времени при  $\mu_0 = 10$  и  $\mu_0 = 2$  представлено на рис. 2, а и 2, б.

На рис. 3 приведены графики коэффициента текущей нефтеотдачи как функции времени  $K_n(t)$ , полученные при  $\mu_0$ , равном 10 и 2. Значение коэффициента текущей нефтеотдачи вычислялось как отношение объема извлеченной на данный момент времени нефти к ее первоначальному объему в нефтеносной среде:

$$K_{\text{н}}(t) = \left\{ \int_0^L [1 - S(x, 0)] dx - \int_0^L [1 - S(x, t)] dx \right\} / \left\{ \int_0^L [1 - S(x, 0)] dx \right\},$$

где  $\int_0^L [1 - S(x, 0)] dx$  и  $\int_0^L [1 - S(x, t)] dx$  — соответственно начальное и текущее содержание нефтяной фазы в нефтеносной среде. Согласно графикам на рис. 3, при  $\mu_0 = 10$  линейная зависимость коэффициента текущей нефтеотдачи от времени наблюдается до момента времени  $t = 13$  с, а при  $\mu_0 = 2$  — до момента времени  $t = 17$  с. Кроме того, на рассматриваемый момент времени  $t = 24$  с значение коэффициента текущей нефтеотдачи при  $\mu_0 = 2$  больше, чем при  $\mu_0 = 10$ .

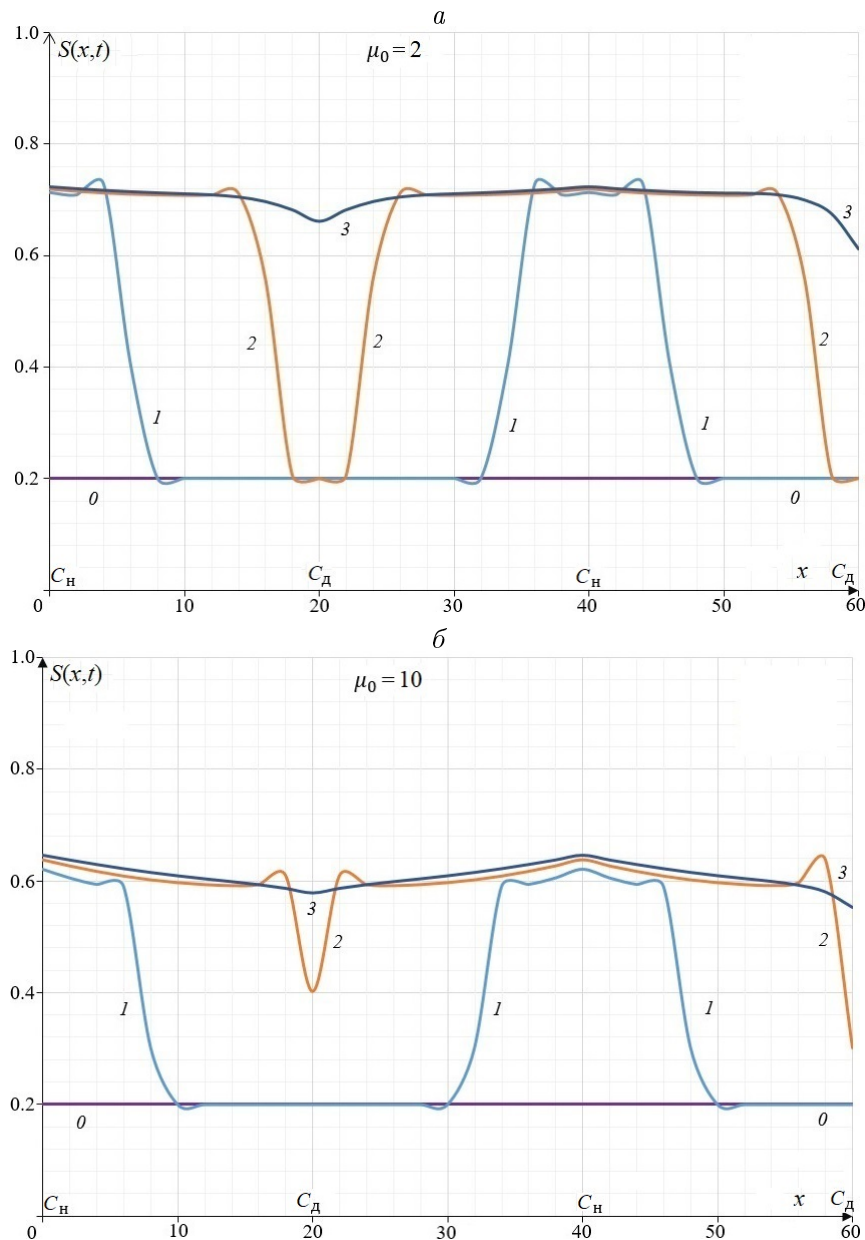


Рис. 2. Распределение функции насыщенности в моменты времени  $t = 0, 5, 14, 24$  с (кривые 0–3 соответственно) для  $\mu_0 = 2$  (а) и  $\mu_0 = 10$  (б)

Fig. 2. Distribution of the saturation function at  $t = 0, 5, 14, 24$  s (curves 0–3) for  $\mu_0 = 2$  (a) and  $\mu_0 = 10$  (b)

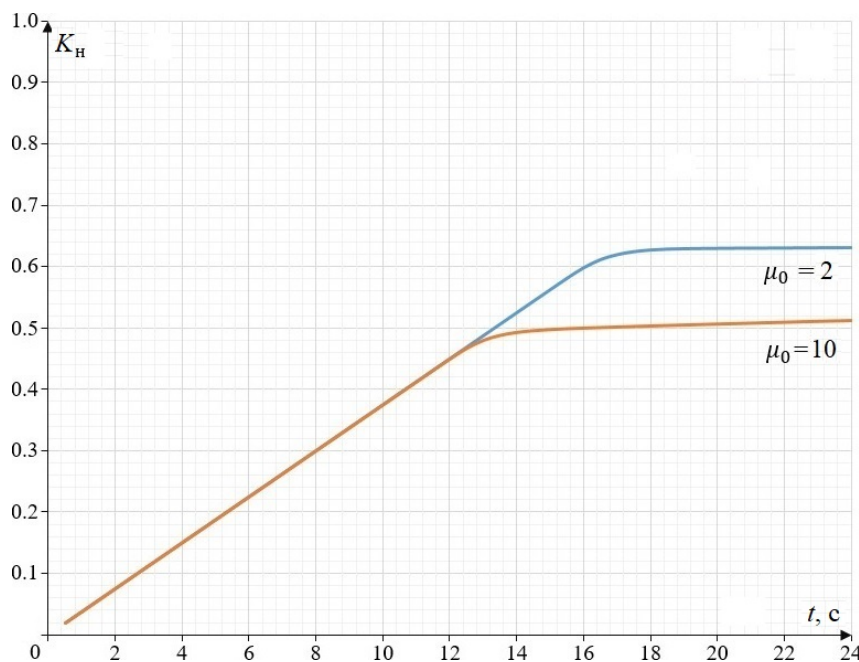


Рис. 3. Динамика роста значения коэффициента текущей нефтеотдачи со временем при  $\mu_0 = 2$  и  $\mu_0 = 10$

Fig. 3. Dynamics of growth of the current oil recovery factor over time for  $\mu_0 = 2$  and  $\mu_0 = 10$

Этот результат вычислительных экспериментов по прогнозированию значений коэффициента текущей нефтеотдачи имеет следующую физическую основу. При  $\mu_0 = 2$ , т. е. когда динамическая вязкость вытесняющей фазы (воды) всего в два раза меньше динамической вязкости вытесняемой фазы (нефти), процесс нефтевытеснения имеет более “поршневой” характер, чем при  $\mu_0 = 10$ . Фронт вытеснения приходит на эксплуатационную скважину позднее, чем при  $\mu_0 = 10$ . Это подтверждают и графики распределения функции насыщенности, приведенные на рис. 2. При  $\mu_0 = 2$  процесс безводной нефтеотдачи продолжается дольше, чем при  $\mu_0 = 10$ , и происходит более эффективное и более полное вытеснение имеющихся запасов нефти.

До прихода фронта вытеснения на эксплуатационной скважине отбирается только нефть прямо пропорционально времени, что находит свое отражение в линейной зависимости значений коэффициента текущей нефтеотдачи от времени. Окончание линейного характера этой зависимости соответствует приходу на добывающую скважину фронта вытеснения и началу процесса отбора обеих фаз. С этого момента времени доля нефтяной фазы в отбираемом потоке уменьшается, что является причиной снижения роста коэффициента текущей нефтеотдачи.

На обеих нагнетательных скважинах вытесняющая фаза закачивается с одинаковой объемной скоростью. Поэтому значения насыщенности на них растут со временем одинаково. На рис. 2 на моменты времени  $t = 5$  с (кривая 1) и  $t = 14$  с (кривая 2) фронт вытеснения еще не дошел до эксплуатационных скважин. На этих скважинах сохраняется начальное значение насыщенности вытесняющей фазы, равное 0.2, извлекается только вытесняемая фаза. Согласно (2)–(4) при нижнем предельном значении 0.2 насыщенности вытесняющей фазы не происходит течения этой фазы.

После прихода фронта вытеснения на эксплуатационные скважины значение насыщенности вытесняющей фазы на первой скважине, расположенной в узле  $x = 20$ , становится выше значения на второй эксплуатационной скважине, расположенной в узле

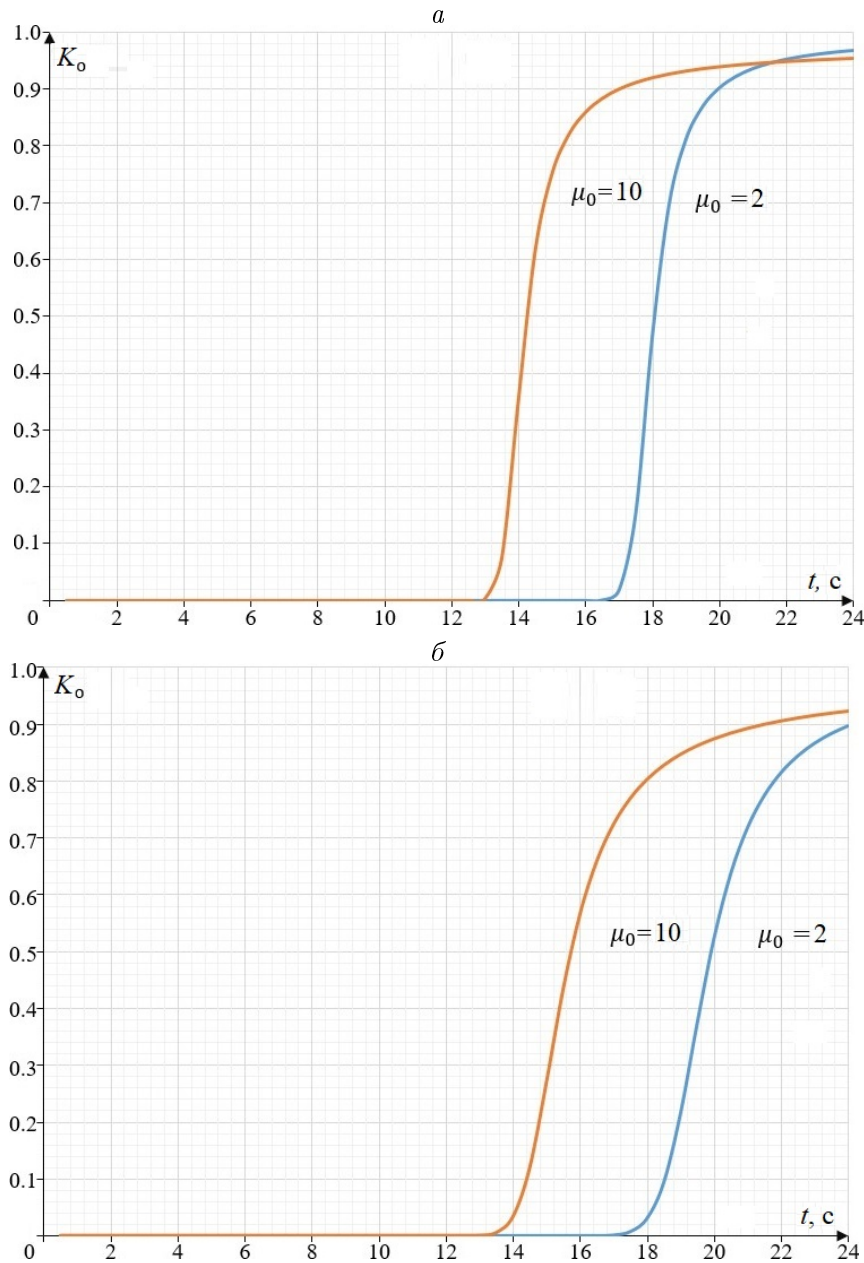


Рис. 4. Динамика роста обводненности первой (а) и второй (б) добывающих скважин со временем при  $\mu_0 = 2$  и  $\mu_0 = 10$

Fig. 4. Dynamics of growth of water cut of the first (а) and second (б) production wells over time for  $\mu_0 = 2$  and  $\mu_0 = 10$

$x = 60$ , что соответствует физике рассматриваемого процесса. На первую эксплуатационную скважину приходит вытесняющая фаза от обеих нагнетательных скважин, расположенных в узлах  $x = 0$  и  $x = 40$ , а на вторую скважину — только от одной, расположенной в узле  $x = 40$ .

Заметим, что распределения функции насыщенности в окрестностях первой добывающей скважины и второй нагнетательные скважины, расположенных, соответственно, в пространственных узлах  $x = 20$  и  $x = 30$ , симметричны относительно этих узлов. На графиках, в окрестности точек с резким изменением значения вычисляемой функции насыщенности, наблюдается некоторая осцилляция в численном решении, которая затем исчезает.

Таким образом, методом математического моделирования на компьютере процесса нефтевытеснения можно выработать практическую рекомендацию по использованию более вязкой вытесняющей фазы.

Важным технологическим показателем процесса нефтевытеснения является также обводненность добывающей скважины, под которой понимается содержание воды в продукции скважины, определяемое как отношение дебита воды к сумме дебитов нефти и воды. Чем выше обводненность добывающей скважины, тем ниже доля добываемой нефти и эффективность процесса нефтевытеснения. Практически обводненность скважины определяют систематическим отбором проб жидкости, поступающей из скважин. Основной причиной обводнения добывающих скважин является прорыв нагнетаемой воды. Методом математического моделирования процесса нефтевытеснения можно прогнозировать время безводной нефтеотдачи, время прорыва вытесняющей фазы и время достижения допустимого уровня обводненности добывающих скважин. На рис. 4 представлены результаты вычислительных экспериментов по прогнозированию степени обводненности добывающих скважин. Степень обводненности скважины вычислялась как значение функции  $\varphi(S)$  на исследуемой скважине, так как эта функция выражает долю вытесняющей фазы в двухфазном потоке.

Из графиков обводненности, приведенных на рис. 4, видно, что время безводной нефтеотдачи при  $\mu_0 = 2$  больше, чем при  $\mu_0 = 10$ , это уже отмечалось выше при анализе динамики изменения значений коэффициента текущей нефтеотдачи. Время безводной нефтеотдачи на первой добывающей скважине меньше, чем на второй. Это отражает тот факт, что на эту скважину воздействуют две нагнетательные скважины.

## Заключение

Результаты вычислительных экспериментов по компьютерному моделированию одномерного процесса нефтевытеснения с использованием объектно-ориентированного подхода соответствуют физике процесса, известным результатам натурных экспериментов по нефтевытеснению, что позволяет сделать вывод о применимости объектно-ориентированного подхода, работоспособности разработанного программного обеспечения для моделирования на компьютере процессов нефтевытеснения и прогнозирования технологических показателей.

**Благодарности.** Авторы статьи выражают благодарность заведующему кафедрой “Программное обеспечение информационных технологий” Каршинского филиала Ташкентского университета информационных технологий им. Мухаммада аль-Хоразми Лазиру Ниезовичу Худоёрову за поддержку исследований.

## Список литературы

- [1] **Chen Z., Huan G., Ma Y.** Computational methods for multiphase flows in porous media. Dallas, Texas: Siam, Society for Industrial and Applied Mathematics; 2006: 531.
- [2] **Konovalov A.N.** Problems of multiphase fluid filtration: monography. World Scientific Publisher Company; 1994: 192.

- [3] **Узаков З.У.** Компьютерное моделирование процесса нефтевытеснения. Математическое и информационное моделирование. Сборник трудов Института математики и компьютерных наук Тюменского государственного университета. 2018; (16):93–102.
- [4] **Четверушкин Б.Н., Морозов Д.Н., Трапезникова М.А., Чурбанова Н.Г., Шильников Э.В.** Об одной явной схеме для решения задач фильтрации. Математическое моделирование. 2010; 22(4):99–109. Адрес доступа: [https://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=mm&paperid=2961&option\\_lang=rus](https://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=mm&paperid=2961&option_lang=rus).
- [5] **Люпа А.А., Трапезникова М.А., Чечина А.А., Чурбанова Н.Г.** Сравнительный анализ алгоритмов явного типа для решения задачи фильтрации с использованием гиперболизированных уравнений. Препринт № 248 ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. 2018: 18.
- [6] **Равшанов Н., Назирова Э.Ш.** Математическая модель и алгоритм решения задачи фильтрации нефти в двухпластовых пористых средах. Проблемы вычислительной и прикладной математики. 2018; 4(16):33–45. Адрес доступа: <http://uzscite.uz/wp-content/uploads/2019/12/33-45.pdf>.
- [7] **Люпа А.А., Морозов Д.Н., Трапезникова М.А., Чурбанова Н.Г., Лемешевский С.В.** Моделирование процессов нефтедобычи с применением высокопроизводительных вычислительных систем. Математическое моделирование. 2015; 27(9):73–80. Адрес доступа: [https://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=mm&paperid=3649&option\\_lang=rus](https://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=mm&paperid=3649&option_lang=rus).
- [8] **Васильев В.И., Васильева М.В., Григорьев А.В., Прокопьев Г.А.** Математическое моделирование задачи двухфазной фильтрации в неоднородных трещиновато-пористых средах с использованием модели двойной пористости и метода конечных элементов. Ученые записки Казанского университета. Серия физ.-мат. наук. 2018; 160(1):165–182. Адрес доступа: <https://cyberleninka.ru/article/n/matematicheskoe-modelirovanie-zadachi-dvuhfaznoy-filtratsii-v-neodnorodnyh-treshchinovato-poristyh-sredah-s-ispolzovaniem-modeli>.
- [9] **Самарский А.А., Вабищевич П.Н.** Численные методы решения задач конвекции-диффузии. М.: Книжный дом “ЛИБРОКОМ”; 2015: 248.
- [10] **Бублик С.А., Семин М.А.** Численное моделирование фильтрации смеси пар-вода-нефть при паротепловом воздействии на пласт. Математическое моделирование. 2021; 33(9):108–128. Адрес доступа: [https://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=mm&paperid=4322&option\\_lang=rus](https://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=mm&paperid=4322&option_lang=rus).
- [11] **Васильева М.В., Прокопьев Г.А.** Численное решение задачи двухфазной фильтрации с неоднородными коэффициентами методом конечных элементов. Математические заметки СВФУ. 2017; 24(2):46–62. Адрес доступа: <https://mzsvfu.ru/index.php/mz/article/view/numerical-solution-to-the-problem-of-two-phase-filtration-with-heterogeneous-coefficients>.
- [12] **Kalimoldayev M., Kusanova K., Baisalbayeva K., Mamyrbayev O., Abdildayeva A.** Numerical simulation of two-phase filtration in the near well bore zone. Open Engineering. 2018; 8(1):77–86.
- [13] **Лаевский Ю.М., Попов П.Е., Калинин А.А.** О численном моделировании фильтрации двухфазной несжимаемой жидкости смешанным методом конечных элементов. Математическое моделирование. 2010; 22(3):74–90. Адрес доступа: [https://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=mm&paperid=2950&option\\_lang=rus](https://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=mm&paperid=2950&option_lang=rus).
- [14] **Назирова Э.Ш., Нематов А., Шукурова М.** Численное моделирование задачи двухфазной фильтрации в системе “нефть-газ”. Проблемы вычислительной и прикладной математики. 2022; 6(45):26–38. Адрес доступа: <https://elibrary.ru/item.asp?id=50128723>.

- [15] **Bouwman M.H.** Multiphase simulations of a Lyocell process. Leoben: Montan University; 2008: 160.
- [16] **Шилдт Г.** C++. Полное руководство. Классическое издание. М.: Вильямс; 2020: 800.
- [17] **Bergmans L., Aksit M., Wakita K., Yonezawa A.** An object-oriented model for extensible concurrent systems: the composition-filters approach. Enschede: University of Twente; 1992: 42.
- [18] **Quarrie D.R.** Object oriented programming and high energy physics. Organisation Européenne Pour la Recherche Nucleaire: Collection of Scientific Conference Proceedings. Geneva; 1995: 101–115.
- [19] **Самарский А.А., Михайлов А.П.** Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. М.: Физматлит; 2001: 320.
- [20] Object-oriented programming. Available at: [https://en.wikipedia.org/wiki/Object-oriented\\_programming](https://en.wikipedia.org/wiki/Object-oriented_programming) (accessed on March 15, 2022).
- [21] **Дейтел Х., Дейтел П.** Как программировать на C++. М.: Бином; 2008: 1456.
- [22] **Starikovicius V.** The multiphase flow and heat transfer in porous media. Kaiserslautern: Institute of Techno- and Business Mathematics; 2003: 30.
- [23] **Mas J.L.** Parallel object-oriented algorithms for simulation of multiphysics. Application to thermal systems. Terrassa: Polytechnic University of Catalonia; 2015: 227.
- [24] **Luyando D.F.** Object oriented modeling and simulation of the phase locked loop in modelica. Milan: Polytechnic University of Milan; 2018: 63.
- [25] **Calle C.R.** A fast IMPES multiphase flow solver in porous media for reservoir simulation. Madrid: Polytechnic University of Madrid; 2017: 95.

## Computer modelling of real objects in the problem of oil displacement

A. D. NORMURODOV, Z. UZAKOV\*, O. U. BEGULOV

Karshi branch of the Tashkent University of Information Technologies named after Muhammad al-Khwarizmi, 180101, Karshi, Uzbekistan

\*Corresponding author: Zair Uzakov, e-mail: [zair90uzakov@gmail.com](mailto:zair90uzakov@gmail.com)

Received December 28, 2023, revised April 01, 2024, accepted April 10, 2024.

### Abstract

*Purpose.* The purpose of the research is to study the applicability of the object-oriented approach in computer modelling of the one-dimensional process of oil displacement in a porous medium.

*Methodology.* The objects, whose interaction results in the real process of oil displacement have been identified, and their attributes and functions have been determined. The one-dimensional problem of oil displacement is considered within the framework of the Leas–Rapoport mathematical model of two-phase filtration of immiscible and incompressible liquids. It is assumed that at injection wells a displacing phase is injected with a known volumetric flow rate; at production wells, the phases are selected in proportion to the values of the phase permeability functions. The problem solved numerically using the finite difference method. When constructing an algorithm for solving the

problem, an object-oriented approach is used. A method for creating and using computer analogues of such real objects as an injection well, a production well, an oil-bearing environment between wells, has been developed and implemented in a program in C++ language, and also analyzed object modelling of the state and functioning of wells, oil-bearing environment, interaction of computer objects, their conformity to the state and interaction of real objects.

*Findings.* The results of computational experiments for a one-dimensional oil displacement process, forecasting the value of the current oil recovery coefficient of an oil-bearing formation, and the degree of water cut in production wells correspond to the physics of the process under study, which allows drawing a conclusion on the applicability of the object-oriented approach. The novelty of this article is the development and implementation of an object-oriented approach for numerical modelling on a computer of a one-dimensional oil displacement process, the development and use of computer analogues of real objects.

*Originality/value.* The presented results show that mathematical modelling of the oil displacement process allows developing practical recommendations for both increasing current oil recovery and reducing the degree of water cut in production wells along with forecasting the time and coefficient of waterless oil recovery. Working with electronic models of objects and processes allows studying their properties and behavior in detail.

*Keywords:* oil displacement process, mathematical model, object-oriented approach, computer analogues of real objects, finite-difference method, object modelling of the state and functioning of wells.

*Citation:* Normurodov A.D., Uzakov Z., Begulov O.U. Computer modelling of real objects in the problem of oil displacement. Computational Technologies. 2024; 29(6):35–51. DOI:10.25743/ICT.2024.29.6.003. (In Russ.)

**Acknowledgements.** The authors of the article express gratitude to the head of the department of “Information Technology Software” of the Karshi branch of the Tashkent University of Information Technologies named after Muhammad al-Khwarizmi Laziz Niyozovich Khudoyorov for supporting the research.

## References

1. **Chen Z., Huan G., Ma Y.** Computational methods for multiphase flows in porous media. Dallas, Texas: Siam, Society for Industrial and Applied Mathematics; 2006: 531.
2. **Kononov A.N.** Problems of multiphase fluid filtration: monography. World Scientific Publisher Company; 1994: 192.
3. **Uzakov Z.U.** Computer modeling of the oil displacement process. Matematicheskoe i Informatsionnoe Modelirovanie. Sbornik Trudov Instituta Matematiki i Kompyuternyx Nauk Tyumenskogo Gosudarstvennogo Universiteta. 2018; (16):93–102. (In Russ.)
4. **Chetverushkin B.N., Morozov D.N., Trapeznikova M.A., Churbanova N.G., Shilnikov E.V.** On an explicit scheme for filtration problem solution. Mathematical Models and Computer Simulations. 2010; 2(6):669–677. Available at: [https://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=mm&paperid=2961&option\\_lang=eng](https://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=mm&paperid=2961&option_lang=eng).
5. **Lyupa A.A., Trapeznikova M.A., Chechina A.A., Churbanova N.G.** Sravnitelnyy analiz algoritmov yavnogo tipa dlya resheniya zadachi filtratsii s ispolzovaniem giperbolizirovannyx uravneniy [Comparative analysis of explicit algorithms for solving the filtering problem using hyperbolic equations]. Preprint No. 248. IPM im. M.V. Keldysha RAN; 2018: 18. (In Russ.)
6. **Ravshanov N., Nazirova E.Sh.** Numerical algorithm and mathematical models of oils extraction in two layered fluxes environment. Problemy Vychislitelnoy i Prikladnoy Matematiki. 2018; 4(16):33–45. Available at: <http://uzscite.uz/wp-content/uploads/2019/12/33-45.pdf>. (In Russ.)
7. **Lyupa A.A., Morozov D.N., Trapeznikova M.A., Chetverushkin B.N., Churbanova N.G., Lemeshevsky S.V.** Simulation of oil recovery processes with the employment of high-performance computer systems. Mathematical Models and Computer Simulations. 2016; 8(2):129–134. Available at: [https://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=mm&paperid=3649&option\\_lang=eng](https://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=mm&paperid=3649&option_lang=eng).



8. **Vasilyev V.I., Vasilyeva M.V., Grigorev A.V., Prokopiev G.A.** Mathematical modeling of the two-phase fluid flow in inhomogeneous fractured porous media using the double porosity model and finite element method. *Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series*. 2018; 160(1):165–182. Available at: <https://cyberleninka.ru/article/n/matematicheskoe-modelirovanie-zadachi-dvuhfaznoy-filtratsii-v-neodnorodnyh-treschinovato-poristyh-sredah-s-ispolzovaniem-modeli>. (In Russ.)
9. **Samarskiy A.A., Vabishevich P.N.** Chislennyye metody resheniya zadach konveksii-diffuzii [Numerical methods for solving convection-diffusion problems]. Moscow: Knizhnyy dom “LIBROKOM”; 2015: 248. (In Russ.)
10. **Bublik S.A., Semin M.A.** Numerical simulation of the filtration of a steam-water-oil mixture during the thermal-steam treatment of reservoir. *Mathematical Models and Computer Simulations*. 2022; 14(2):335–348. Available at: <https://link.springer.com/article/10.1134/S2070048222020041>.
11. **Vasilyeva M.V., Prokopiev G.A.** Numerical solution to the problem of two-phase filtration with heterogeneous coefficients by the finite element method. *Mathematical Notes of NEFU*. 2017; 24(2):46–62. Available at: <https://mzsvfu.ru/index.php/mz/article/view/numerical-solution-to-the-problem-of-two-phase-filtration-with-heterogeneous-coefficients>. (In Russ.)
12. **Kalimoldayev M., Kuspanova K., Baisalbayeva K., Mamyrbayev O., Abdildayeva A.** Numerical simulation of two-phase filtration in the near well bore zone. *Open Engineering*. 2018; 8(1):77–86.
13. **Laevisky Yu.M., Popov P.E., Kalinkin A.A.** Simulation of two-phase fluid filtration by mixed finite element method. *Matematicheskoe Modelirovanie*. 2010; 22(3):74–90. Available at: [https://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=mm&paperid=2950&option\\_lang=eng](https://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=mm&paperid=2950&option_lang=eng). (In Russ.)
14. **Nazirova E.Sh., Nematov A., Shukurova M.** Numerical modelling of the problem of two-phase filtration in the oil-gas system. *Problemi Vichislitel'noy i Prikladnoy Matematiki*. 2022; 6(45):26–38. Available at: <https://elibrary.ru/item.asp?id=50128723>. (In Russ.)
15. **Bouwman M.H.** Multiphase simulations of a Lyocell process. Leoben: Montan University; 2008: 160.
16. **Shildt G.** C++. Polnoe rukovodstvo. Klassicheskoe izdanie [C++. Complete guide. Classic edition]. Moscow: Vilyams; 2020: 800. (In Russ.)
17. **Bergmans L., Aksit M., Wakita K., Yonezawa A.** An object-oriented model for extensible concurrent systems: the composition-filters approach. Enschede: University of Twente; 1992: 42.
18. **Quarrie D.R.** Object oriented programming and high energy physics. Organisation Européenne Pour la Recherche Nucleaire: Collection of Scientific Conference Proceedings. Geneva; 1995: 101–115.
19. **Samarskiy A.A., Mikhaylov A.P.** Matematicheskoe modelirovanie: Idei. Metody. Primery [Mathematical Modeling: Ideas. Methods. Examples]. Moscow: Fizmatlit; 2001: 320. (In Russ.)
20. Object-oriented programming. Available at: [https://en.wikipedia.org/wiki/Object-oriented\\_programming](https://en.wikipedia.org/wiki/Object-oriented_programming) (accessed on March 15, 2022).
21. **Deitel H.M., Deitel P.J.** C++ how to program. Upper Saddle River (N.J.): Prentice Hall; 2005: 1436.
22. **Starikovicius V.** The multiphase flow and heat transfer in porous media. Kaiserslautern: Institute of Techno- and Business Mathematics; 2003: 30.
23. **Mas J.L.** Parallel object-oriented algorithms for simulation of multiphysics. Application to thermal systems. Terrassa: Polytechnic University of Catalonia; 2015: 227.
24. **Luyando D.F.** Object oriented modeling and simulation of the phase locked loop in modelica. Milan: Polytechnic University of Milan; 2018: 63.
25. **Calle C.R.** A fast IMPES multiphase flow solver in porous media for reservoir simulation. Madrid: Polytechnic University of Madrid; 2017: 95.