
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

DOI:10.25743/ICT.2024.29.6.005

Модернизация аппроксимации искомых величин смешанного МКЭ при расчетах оболочек в криволинейных системах координат

Ю. В. КЛОЧКОВ^{1,*}, А. П. НИКОЛАЕВ¹, В. А. ПШЕНИЧКИНА², С. Д. ФОМИН¹,
О. В. ВАХНИНА¹, А. С. АНДРЕЕВ¹, М. Ю. КЛОЧКОВ²

¹Волгоградский государственный аграрный университет, 400002, Волгоград, Россия

²Волгоградский государственный технический университет, 400005, Волгоград, Россия

*Контактный автор: Клочков Юрий Васильевич, e-mail: klotchkov@bk.ru

Поступила 25 января 2024 г., доработана 28 июня 2024 г., принята в печать 29 июля 2024 г.

Для четырехугольного оболочечного элемента дискретизации, матрица податливости которого скомпонована на основе смешанного варианта МКЭ, использованы бикубические функции формы для аппроксимации вектора перемещения и билinearные функции для тензора второго ранга (деформаций и искривлений). На основе координатных преобразований получены новые аппроксимирующие выражения для искомых компонент тензора внутренней точки конечного элемента через узловые значения компонент тензоров узловых точек. На примерах расчета показана эффективность использования разработанных аппроксимирующих функций искомых величин.

Ключевые слова: тонкая оболочка, четырехугольный конечный элемент в смешанной формулировке, тензорно-векторная интерполяция.

Цитирование: Клочков Ю.В., Николаев А.П., Пшеничкина В.А., Фомин С.Д., Вахнина О.В., Андреев А.С., Клочков М.Ю. Модернизация аппроксимации искомых величин смешанного МКЭ при расчетах оболочек в криволинейных системах координат. Вычислительные технологии. 2024; 29(6):76–92.
DOI:10.25743/ICT.2024.29.6.005.

Введение

В последние годы наметилась устойчивая тенденция ко все более широкому внедрению в авиационную, строительную и машиностроительную отрасли конструктивных элементов из оболочек и их фрагментов. Особенно широко тонкостенные элементы используются в авиастроении из-за ограничений веса конструкций летательных аппаратов [1, 2]. Геометрия оболочечных объектов становится гораздо более сложной, пологие оболочки все чаще уступают оболочкам, как правило, эллипсоидального типа со значительной кривизной поверхности. В этой связи возникает необходимость совершенствования методов численного анализа напряженно-деформированного состояния (НДС) оболочек эллипсоидального типа на основе современных научных достижений, новых, перспективных тензорно-векторных форм интерполяционной процедуры.

Постановка задач прочности инженерных сооружений предполагает построение математической модели физического процесса деформирования твердого тела под действием заданной нагрузки как системы дифференциальных или интегральных уравнений

при различных краевых и начальных условиях. Теория деформирования твердого тела в настоящее время достаточно развита [3, 4]. Однако уравнения теории оказываются во многих случаях существенно сложными, а их решение для инженерной практики оказалось возможным только в некоторых простых случаях. Поэтому актуальной задачей стала разработка приближенных методов для конструкций различного назначения как в задачах прочности [5–11], так и в задачах устойчивости [12–15]. Во многих случаях решения актуальных задач получались на основе численных методов расчета.

Среди численных методов особенно широкое распространение получил метод конечных элементов (МКЭ) [1, 2]. Этот метод используется в расчетах прочности трехмерных объектов [16–20], пластин, в том числе и композитных [21–27]. Широкое использование получил этот метод и в задачах прочности и устойчивости оболочек [28–33] с реализацией в криволинейных системах координат при аппроксимации компонент векторов перемещений как в декартовой системе координат.

Конечно-элементный анализ процессов деформирования строительных и машиностроительных конструкций на современном уровне развития методов расчета является неотъемлемой частью этапов проектирования, строительства и реконструкции объектов строительной и машиностроительной индустрии. Практически все созданные к настоящему времени вычислительные комплексы, базирующиеся на МКЭ, реализуют общепринятую процедуру интерполяции отдельной компоненты через узловые значения только этой же компоненты. Такой подход приводит к необходимости чрезмерного гущения сетки элементов дискретизации, что в свою очередь вызывает накопление погрешности вычислений. Кроме того, в криволинейной системе координат такая форма интерполяции приводит к появлению в МКЭ проблемы учета смещения конечного элемента как твердого тела. Поэтому в криволинейных системах координат достаточно актуальной задачей является создание вычислительных алгоритмов МКЭ, основанных на использовании тензорно-векторной формы интерполяционной процедуры, при которой выполняется интерполяция тензорных величин первого и второго рангов. Тензорно-векторная форма интерполяционной процедуры особенно востребована при реализации МКЭ в смешанной формулировке, когда искомыми параметрами одновременно выступают компоненты тензора деформаций и компоненты вектора перемещения.

В статье представлен конечно-элементный алгоритм расчета оболочек эллипсоидального типа при реализации смешанной формулировки МКЭ. В качестве искомых узловых параметров выступают компоненты тензоров деформаций и искривлений в точке срединной поверхности, а также компоненты вектора перемещения и их частные производные первого порядка. Матрица податливости четырехугольного конечного элемента (КЭ) была скомпонована при использовании двух вариантов интерполяционной процедуры:

- традиционная интерполяционная процедура применена непосредственно для каждой компоненты тензора деформации вектора перемещения внутренней точки конечного элемента через узловые значения этой же компоненты;
- традиционная интерполяционная процедура применена для тензора второго ранга и вектора перемещения точки срединной поверхности через соответствующие тензоры деформаций, искривлений и векторы перемещения узловых точек, и только после координатных преобразований определялись аппроксимирующие выражения для компонент тензоров и вектора перемещения.

Корректность и высокая точность конечно-элементных решений по разработанному алгоритму была доказана на примерах расчета эллиптического кольца, подвергающе-

гося растяжению, при различных значениях параметров эллипса, а также на примерах расчета эллиптического цилиндра со значительной кривизной срединной поверхности при двух вариантах оцифровки: шарнирном и пружинном. Доказано, что применение разработанной тензорно-векторной формы интерполяционной процедуры в смешанной формулировке МКЭ позволяет учесть смещения оболочечной конструкции эллипсоидального типа как абсолютно твердого тела.

1. Геометрия срединной поверхности оболочки и интерполяционная процедура

Оболочка эллипсоидального типа, т. е. оболочка, поперечное сечение которой представляет собой в общем случае эллипс, может быть задана в декартовой системе координат вектор-функцией вида

$$\mathbf{R}^0 = x\mathbf{i} + r \sin \theta \mathbf{j} + r \cos \theta \mathbf{k},$$

где θ — угловая координата, отсчитываемая от вертикальной оси против хода часовой стрелки; $r = r(x, \theta)$ — функция, которая зависит от типа поверхности конкретной оболочки, например:

– для эллипсоида [33]

$$r = bc \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a\sqrt{c^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta}}$$

(a, b, c — параметры эллипсоида);

– для эллиптического цилиндра

$$r = \frac{bc}{\sqrt{c^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta}}$$

(b, c — параметры эллипса поперечного сечения);

– для эллиптического конуса

$$r = \frac{bc(a - x)}{a\sqrt{c^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta}}$$

(a, b, c — параметры эллиптического конуса).

Используя деривационные формулы, можно определить ковариантные векторы базиса в произвольной точке срединной поверхности эллипсоидальной оболочки

$$\mathbf{a}_1^0 = \mathbf{R}_{,x}^0, \quad \mathbf{a}_2^0 = \mathbf{R}_{,\theta}^0, \quad \mathbf{a}^0 = \frac{\mathbf{a}_1^0 \times \mathbf{a}_2^0}{|\mathbf{a}_1^0 \times \mathbf{a}_2^0|}. \quad (1)$$

Дифференцируя (1) по x и θ , можно получить производные векторов локального базиса, которые могут быть представлены в матричной форме

$$\left\{ \mathbf{a}_{,x}^0 \right\}_{3 \times 1} = [d_x] \left\{ \mathbf{a}^0 \right\}_{3 \times 1}, \quad \left\{ \mathbf{a}_{,\theta}^0 \right\}_{3 \times 1} = [d_\theta] \left\{ \mathbf{a}^0 \right\}_{3 \times 1},$$

где $\left\{ \mathbf{a}_{,x}^0 \right\}^T = \{ \mathbf{a}_{1,x}^0 \, \mathbf{a}_{2,x}^0 \, \mathbf{a}_{,x}^0 \}$; $\left\{ \mathbf{a}_{,\theta}^0 \right\}^T = \{ \mathbf{a}_{1,\theta}^0 \, \mathbf{a}_{2,\theta}^0 \, \mathbf{a}_{,\theta}^0 \}$; $\left\{ \mathbf{a}^0 \right\}^T = \{ \mathbf{a}_1^0 \, \mathbf{a}_2^0 \, \mathbf{a}^0 \}$.

Под действием внешней нагрузки точка T^0 срединной поверхности эллипсоидальной оболочки займет актуальное положение T , а точка $T^{0\zeta}$, определяемая вектор-функцией

$\mathbf{R}^{0\zeta} = \mathbf{R}^0 + \zeta \mathbf{a}^0$ (ζ — расстояние вдоль перпендикуляра к касательной, проведенной к срединной поверхности в точке T^0), переместится в точку T^ζ . Векторы перемещений точек T^0 и $T^{0\zeta}$ определяются выражениями

$$\mathbf{v} = v^1 \mathbf{a}_1^0 + v^2 \mathbf{a}_2^0 + w \mathbf{a}^0 = \begin{matrix} \{\mathbf{a}^0\} \\ 1 \times 3 \end{matrix}^T \{W\}, \quad \mathbf{V} = \mathbf{v} + \zeta (\mathbf{a} - \mathbf{a}^0),$$

где $\mathbf{a} = (\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2) / |\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2|$ — орт нормали к срединной поверхности в точке T актуального состояния эллипсоидальной оболочки ($\mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_1^0 + \mathbf{v}_{,x}$; $\mathbf{a}_2 = \mathbf{a}_2^0 + \mathbf{v}_{,\theta}$).

Вектор-функция точки T^ζ может быть задана выражением

$$\mathbf{R}^\zeta = \mathbf{R}^{0\zeta} + \mathbf{V} = \mathbf{R}^{0\zeta} + \mathbf{v} + \zeta \Delta \mathbf{a},$$

где $\Delta \mathbf{a} = \mathbf{a} - \mathbf{a}^0$.

Векторы базиса исходного и актуального состояний в точках $T^{0\zeta}$ и T^ζ могут быть определены по формулам

$$\mathbf{g}_1^0 = \mathbf{R}_{,x}^{0\zeta}, \quad \mathbf{g}_1 = \mathbf{R}_{,x}^\zeta = \mathbf{g}_1^0 + \mathbf{v}_{,x} + \zeta \Delta \mathbf{a}_{,x}, \quad \mathbf{g}_2 = \mathbf{R}_{,\theta}^\zeta = \mathbf{g}_2^0 + \mathbf{v}_{,\theta} + \zeta \Delta \mathbf{a}_{,\theta}. \quad (2)$$

Для получения соотношений Коши в точке T^ζ можно воспользоваться соотношениями механики сплошных сред [4] при использовании гипотезы Кирхгофа – Лява [3]

$$\varepsilon_{\alpha\beta}^\zeta = 0.5(g_{\alpha\beta} - g_{\alpha\beta}^0) = \frac{1}{2}(\mathbf{g}_\alpha^0 \cdot \mathbf{v}_{,\beta} + \mathbf{g}_\beta^0 \cdot \mathbf{v}_{,\alpha}) = \varepsilon_{\alpha\beta} + \zeta \kappa_{\alpha\beta}, \quad (3)$$

где $g_{\alpha\beta}^0 = \mathbf{g}_\alpha^0 \cdot \mathbf{g}_\beta^0$, $g_{\alpha\beta} = \mathbf{g}_\alpha \cdot \mathbf{g}_\beta$, $\varepsilon_{\alpha\beta}$, $\kappa_{\alpha\beta}$ — деформации и искривления в точке T срединной поверхности оболочки эллипсоидального типа ($\alpha, \beta = 1, 2$).

На основе гипотезы Кирхгофа деформации (3) могут быть представлены матричным выражением

$$\begin{matrix} \{\varepsilon_{\alpha\beta}^\zeta\} \\ 3 \times 1 \end{matrix} = \begin{matrix} [Z] \\ 3 \times 6 \end{matrix} \begin{matrix} \{\varepsilon \kappa_{\alpha\beta}\} \\ 6 \times 1 \end{matrix}, \quad (4)$$

где $\begin{matrix} \{\varepsilon \kappa_{\alpha\beta}\} \\ 1 \times 6 \end{matrix}^T = \{\varepsilon_{11} \varepsilon_{22} 2 \varepsilon_{12} \kappa_{11} \kappa_{22} 2 \kappa_{12}\}$ — строка деформаций и искривлений в точке T срединной поверхности оболочки эллипсоидального типа.

Вышеупомянутые деформации $\varepsilon_{\alpha\beta}$ и искривления $\kappa_{\alpha\beta}$ в точке T срединной поверхности эллипсоидальной оболочки наряду с компонентами вектора перемещения v^1, v^2, v и их производными выбираются в качестве узловых неизвестных четырехугольного элемента дискретизации. Искомые узловые варьируемые параметры могут быть представлены в матричной форме следующим образом:

$$\begin{matrix} \{W_y\} \\ 1 \times 36 \end{matrix}^T = \begin{matrix} \{\{v^{1G}\} \\ 1 \times 12 \end{matrix}^T \begin{matrix} \{v^{2G}\} \\ 1 \times 12 \end{matrix}^T \begin{matrix} \{w^G\} \\ 1 \times 12 \end{matrix}^T, \quad \begin{matrix} \{\varepsilon \kappa_y\} \\ 1 \times 24 \end{matrix}^T = \begin{matrix} \{\{\varepsilon_{\alpha\beta y}\} \\ 1 \times 12 \end{matrix}^T \begin{matrix} \{\kappa_{\alpha\beta y}\} \\ 1 \times 12 \end{matrix}^T, \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} \begin{matrix} \{\varepsilon_{\alpha\beta y}\} \\ 1 \times 12 \end{matrix}^T &= \{\varepsilon_{11}^i \varepsilon_{11}^j \varepsilon_{11}^k \varepsilon_{11}^l \varepsilon_{22}^i \dots \varepsilon_{22}^l 2 \varepsilon_{12}^i \dots 2 \varepsilon_{12}^l\}, \\ \begin{matrix} \{\kappa_{\alpha\beta y}\} \\ 1 \times 12 \end{matrix}^T &= \{\kappa_{11}^i \kappa_{11}^j \kappa_{11}^k \kappa_{11}^l \kappa_{22}^i \dots \kappa_{22}^l 2 \kappa_{12}^i \dots 2 \kappa_{12}^l\}, \quad \begin{matrix} \{q^G\} \\ 1 \times 12 \end{matrix}^T = \{q^i q^j q^k q^l q_{,x}^i \dots q_{,x}^l q_{,\theta}^i \dots q_{,\theta}^l\}. \end{aligned}$$

Здесь i, j, k и l — узлы, расположенные в вершинах четырехугольного конечного элемента; нижние индексы x и θ после запятой обозначают операцию дифференцирования

по соответствующей глобальной координате x и θ ; под буквой q понимается компонента вектора перемещения v^1, v^2 или w .

В качестве аппроксимирующих функций для деформаций $\varepsilon_{\alpha\beta}$ и искривлений $\kappa_{\alpha\beta}$ срединной поверхности эллипсоидальной оболочки были использованы билинейные функции локальных координат ξ, η ($-1 \leq \xi, \eta \leq 1$)

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \{\varphi\}_{1 \times 4}^T \begin{Bmatrix} \varepsilon_{\alpha\beta}^i \\ \varepsilon_{\alpha\beta}^j \\ \varepsilon_{\alpha\beta}^k \\ \varepsilon_{\alpha\beta}^l \end{Bmatrix}_{4 \times 1}, \quad \kappa_{\alpha\beta} = \{\varphi\}_{1 \times 4}^T \begin{Bmatrix} \kappa_{\alpha\beta}^i \\ \kappa_{\alpha\beta}^j \\ \kappa_{\alpha\beta}^k \\ \kappa_{\alpha\beta}^l \end{Bmatrix}_{4 \times 1}. \quad (6)$$

Компонента вектора перемещения точки срединной поверхности и ее производные аппроксимируются посредством произведений полиномов Эрмита третьего порядка [33]

$$q = \{\psi\}_{1 \times 12}^T \{q^L\}_{12 \times 1}, \quad q_{,\alpha} = \{\psi_{,\alpha}\}_{1 \times 12}^T \{q^L\}_{12 \times 1}, \quad q_{,\alpha\beta} = \{\psi_{,\alpha\beta}\}_{1 \times 12}^T \{q^L\}_{12 \times 1}, \quad (7)$$

где $\{q^L\} = \{q^i q^j q^k q^l q_{,\xi}^i \dots q_{,\xi}^l q_{,\eta}^i \dots q_{,\eta}^l\}; \{\psi\}_{1 \times 12}^T = \{h_1(\xi) h_1(\eta) : h_2(\xi) h_1(\eta) : h_2(\xi) h_2(\eta) : h_1(\xi) h_2(\eta) : h_3(\xi) h_1(\eta) : h_4(\xi) h_1(\eta) : h_4(\xi) h_2(\eta) : h_3(\xi) h_2(\eta) : h_1(\xi) h_3(\eta) : h_2(\xi) h_3(\eta) : h_2(\xi) h_4(\eta) : h_1(\xi) h_4(\eta)\}$

h_1, h_2, h_3, h_4 — полиномы Эрмита третьей степени; $\{\psi_{,\alpha}\}_{1 \times 12}^T = \{\psi_{,\xi}\}_{1 \times 12}^T \xi_{,\alpha} + \{\psi_{,\eta}\}_{1 \times 12}^T \eta_{,\alpha}; \{\psi_{,\alpha\beta}\}_{1 \times 12}^T = \{\psi_{,\xi\xi}\}_{1 \times 12}^T \xi_{,\alpha} \xi_{,\beta} + \{\psi_{,\xi\eta}\}_{1 \times 12}^T \xi_{,\alpha} \eta_{,\beta} + \{\psi_{,\xi\xi}\}_{1 \times 12}^T \xi_{,\alpha\beta} + \{\psi_{,\eta\xi}\}_{1 \times 12}^T \eta_{,\alpha} \xi_{,\beta} + \{\psi_{,\eta\eta}\}_{1 \times 12}^T \eta_{,\alpha} \eta_{,\beta} + \{\psi_{,\eta\xi}\}_{1 \times 12}^T \eta_{,\alpha\beta}$.

Для компонент вектора перемещений внутренней точки конечного элемента можно на основе (5) и (7) сформировать матричное соотношение

$$\{W\} = [A_1] \{W_y\}. \quad (8)$$

Столбец деформаций и искривлений в произвольной точке срединной поверхности выражается через узловые значения этих величин на основе (5) и (6) матричным выражением

$$\{\varepsilon \kappa_{\alpha\beta}\}_{6 \times 1} = [H_1] \{\varepsilon \kappa_y\}_{6 \times 24}.$$

На основании (2)–(4) столбец деформаций и искривлений можно представить через узловые величины векторов перемещений

$$\{\varepsilon \kappa_{\alpha\beta}^k\}_{6 \times 1} = [\mu]_{6 \times 3} \{W\}_{3 \times 1} = [\mu]_{6 \times 3} [A_1]_{3 \times 36} \{W_y\}_{36 \times 1} = [B_1]_{6 \times 36} \{W_y\}_{36 \times 1},$$

где $[\mu]$ — матрица дифференциальных операторов.

Аппроксимирующие выражения (6), (7) отражают традиционную для МКЭ форму интерполяционной процедуры, суть которой состоит в том, что каждая искомая компонента аппроксимируется через узловые значения этой же компоненты.

Однако, если тензоры деформаций и искривлений, а также вектор перемещения (тензор первого ранга) интерполировать не по отдельным их компонентам, а как тензорные величины (каковыми они по своей сути и являются), то необходимо применять интерполяционную процедуру для тензоров и векторов, суть которой состоит в использовании аппроксимирующих выражений следующего вида:

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\alpha\beta} = \begin{Bmatrix} \{\varphi\} \\ 1 \times 4 \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_y \\ 4 \times 1 \end{Bmatrix}, \quad \tilde{\boldsymbol{\kappa}}_{\alpha\beta} = \begin{Bmatrix} \{\varphi\} \\ 1 \times 4 \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} \tilde{\boldsymbol{\kappa}}_y \\ 4 \times 1 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{Bmatrix} \{\psi\} \\ 1 \times 12 \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} \mathbf{v}_y^L \\ 12 \times 1 \end{Bmatrix}, \quad \{\mathbf{v}_y^L\} = [PR] \begin{Bmatrix} \mathbf{v}_y^G \\ 12 \times 12 \end{Bmatrix}_{12 \times 1}, \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} \{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_y\}_{1 \times 4}^T &= \{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\alpha\beta}^i \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\alpha\beta}^j \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\alpha\beta}^k \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\alpha\beta}^l\}, \quad \{\tilde{\boldsymbol{\kappa}}_y\}_{1 \times 4}^T = \{\tilde{\boldsymbol{\kappa}}_{\alpha\beta}^i \tilde{\boldsymbol{\kappa}}_{\alpha\beta}^j \tilde{\boldsymbol{\kappa}}_{\alpha\beta}^k \tilde{\boldsymbol{\kappa}}_{\alpha\beta}^l\}, \\ \{\mathbf{v}_y^L\}_{1 \times 12}^T &= \{\mathbf{v}^i \mathbf{v}^j \mathbf{v}^k \mathbf{v}^l \mathbf{v}_{,\xi}^i \mathbf{v}_{,\xi}^j \mathbf{v}_{,\xi}^k \mathbf{v}_{,\xi}^l \mathbf{v}_{,\eta}^i \mathbf{v}_{,\eta}^j \mathbf{v}_{,\eta}^k \mathbf{v}_{,\eta}^l\}, \quad \{\mathbf{v}_y^G\}_{1 \times 12}^T = \{\mathbf{v}^i \mathbf{v}^j \mathbf{v}^k \mathbf{v}^l \mathbf{v}_{,\alpha}^i \mathbf{v}_{,\alpha}^j \mathbf{v}_{,\alpha}^k \mathbf{v}_{,\alpha}^l \mathbf{v}_{,\beta}^i \mathbf{v}_{,\beta}^j \mathbf{v}_{,\beta}^k \mathbf{v}_{,\beta}^l\}. \end{aligned}$$

Вектор перемещения (8) внутренней точки конечного элемента и его частные производные можно представить выражениями

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \begin{Bmatrix} \{\psi\} \\ 1 \times 12 \end{Bmatrix}^T [PR] \begin{Bmatrix} [l] \\ 12 \times 12 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \{W_y\} \\ 12 \times 36 \end{Bmatrix}_{36 \times 1}, \quad \mathbf{v}_{,\alpha} = \begin{Bmatrix} \{\psi_{,\alpha}\} \\ 1 \times 12 \end{Bmatrix}^T [PR] \begin{Bmatrix} [l] \\ 12 \times 12 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \{W_y\} \\ 12 \times 36 \end{Bmatrix}_{36 \times 1}, \\ \mathbf{v}_{,\alpha\beta} &= \begin{Bmatrix} \{\psi_{,\alpha\beta}\} \\ 1 \times 12 \end{Bmatrix}^T [PR] \begin{Bmatrix} [l] \\ 12 \times 12 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \{W_y\} \\ 12 \times 36 \end{Bmatrix}_{36 \times 1}, \end{aligned} \quad (10)$$

где $\begin{Bmatrix} [l] \\ 12 \times 36 \end{Bmatrix}$ — матрица, элементами которой являются строки векторов узловых точек конечного элемента [33].

Входящие в левые части (9) тензоры деформаций и искривлений в точке, принадлежащей внутренней области четырехугольного конечного элемента, могут быть представлены компонентами диадных произведений векторов локального базиса данной точки:

$$\begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\alpha\beta} &= \varepsilon_{11} \mathbf{a}^{01} \cdot \mathbf{a}^{01} + \varepsilon_{22} \mathbf{a}^{02} \cdot \mathbf{a}^{02} + 2\varepsilon_{12} \mathbf{a}^{01} \cdot \mathbf{a}^{02} = \begin{Bmatrix} \{\tilde{\mathbf{a}}^{0w}\} \\ 1 \times 3 \end{Bmatrix}_{3 \times 1}^T \{\varepsilon_{\alpha\beta}\}, \\ \tilde{\boldsymbol{\kappa}}_{\alpha\beta} &= \kappa_{11} \mathbf{a}^{01} \cdot \mathbf{a}^{01} + \kappa_{22} \mathbf{a}^{02} \cdot \mathbf{a}^{02} + 2\kappa_{12} \mathbf{a}^{01} \cdot \mathbf{a}^{02} = \begin{Bmatrix} \{\tilde{\mathbf{a}}^{0w}\} \\ 1 \times 3 \end{Bmatrix}_{3 \times 1}^T \{\kappa_{\alpha\beta}\}, \end{aligned}$$

где $\begin{Bmatrix} \{\tilde{\mathbf{a}}^{0w}\} \\ 3 \times 1 \end{Bmatrix}$ — диадные произведения контравариантных векторов $\mathbf{a}^{0\alpha}$.

Тензоры деформаций и искривлений в узловых точках $\boldsymbol{\varepsilon}_{\alpha\beta}^\rho$ ($\rho = i, j, k, l$), входящие в правую часть (9), также могут быть представлены компонентами диадных произведений узловых векторов локального базиса

$$\{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\alpha\beta y}\}_{4 \times 1} = \begin{Bmatrix} [L] \\ 4 \times 12 \end{Bmatrix} \{\varepsilon_{\alpha\beta y}\}_{12 \times 1}, \quad \{\tilde{\boldsymbol{\kappa}}_{\alpha\beta y}\}_{4 \times 1} = \begin{Bmatrix} [L] \\ 4 \times 12 \end{Bmatrix} \{\kappa_{\alpha\beta y}\}_{12 \times 1}, \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} [L] \\ 4 \times 12 \end{Bmatrix} &= \left[\begin{array}{cccc} \{\tilde{\mathbf{a}}^{0i}\}_{1 \times 3}^T & \{\emptyset\}_{1 \times 3} & \{\emptyset\}_{1 \times 3} & \{\emptyset\}_{1 \times 3} \\ \{\emptyset\}_{1 \times 3} & \{\tilde{\mathbf{a}}^{0j}\}_{1 \times 3}^T & \{\emptyset\}_{1 \times 3} & \{\emptyset\}_{1 \times 3} \\ \{\emptyset\}_{1 \times 3} & \{\emptyset\}_{1 \times 3} & \{\tilde{\mathbf{a}}^{0k}\}_{1 \times 3}^T & \{\emptyset\}_{1 \times 3} \\ \{\emptyset\}_{1 \times 3} & \{\emptyset\}_{1 \times 3} & \{\emptyset\}_{1 \times 3} & \{\tilde{\mathbf{a}}^{0l}\}_{1 \times 3}^T \end{array} \right], \\ \{\varepsilon_{\alpha\beta y}\}_{1 \times 12}^T &= \{\{\varepsilon_{11}^i \varepsilon_{22}^i 2\varepsilon_{12}^i\} \{\varepsilon_{11}^j \varepsilon_{22}^j 2\varepsilon_{12}^j\} \{\varepsilon_{11}^k \varepsilon_{22}^k 2\varepsilon_{12}^k\} \{\varepsilon_{11}^l \varepsilon_{22}^l 2\varepsilon_{12}^l\}\}, \\ \{\kappa_{\alpha\beta y}\}_{1 \times 12}^T &= \{\{\kappa_{11}^i \kappa_{22}^i 2\kappa_{12}^i\} \{\kappa_{11}^j \kappa_{22}^j 2\kappa_{12}^j\} \{\kappa_{11}^k \kappa_{22}^k 2\kappa_{12}^k\} \{\kappa_{11}^l \kappa_{22}^l 2\kappa_{12}^l\}\}. \end{aligned}$$

Для преобразования матриц $[l]_{12 \times 36}$ и $[L]_{4 \times 12}$ формируются следующие матричные соотношения:

$$\{\mathbf{a}^{0\rho}\}_{3 \times 1} = [d^\rho]_{3 \times 3} \{\mathbf{a}^0\}_{3 \times 1}, \quad \{\mathbf{a}^{0w\rho}\}_{3 \times 1} = [d^{w\rho}]_{3 \times 3} \{\mathbf{a}^{0w}\}_{3 \times 1}, \quad \{\tilde{\mathbf{a}}^{0w\rho}\}_{3 \times 1} = [D^\rho]_{3 \times 3} \{\tilde{\mathbf{a}}^{0w}\}_{3 \times 1}, \quad (12)$$

где $\{\mathbf{a}^{0\rho}\}_{1 \times 3}^T$ — строка векторов ковариантного базиса ρ -й узловой точки конечного элемента ($\rho = i, j, k, l$); $\{\mathbf{a}^0\}_{1 \times 3}^T$ — строка векторов ковариантного базиса внутренней точки конечного элемента; $\{\mathbf{a}^{0w\rho}\}_{1 \times 3}^T$ — строка векторов контравариантного базиса ρ -й узловой точки ($\rho = i, j, k, l$); $\{\mathbf{a}^{0w}\}_{1 \times 3}^T$ — строка векторов контравариантного базиса внутренней точки конечного элемента; $\{\tilde{\mathbf{a}}^{0w\rho}\}_{1 \times 3}^T = \{\mathbf{a}^{01\rho} \mathbf{a}^{01\rho} : \mathbf{a}^{02\rho} \mathbf{a}^{02\rho} : \mathbf{a}^{01\rho} \mathbf{a}^{02\rho}\}$ — строка диадных произведений векторов контравариантного базиса узловой точки конечного элемента; $\{\tilde{\mathbf{a}}^{0w}\}_{1 \times 3}^T = \{\mathbf{a}^{01} \mathbf{a}^{01} : \mathbf{a}^{02} \mathbf{a}^{02} : \mathbf{a}^{01} \mathbf{a}^{02}\}$ — строка диадных произведений контравариантных компонент внутренней точки конечного элемента.

С учетом (12) входящую в (11) матрицу $[L]$ можно преобразовать к виду

$$[L]_{4 \times 12} = \begin{bmatrix} \{\tilde{\mathbf{a}}^{0w}\}_{1 \times 3}^T [D^i]_{3 \times 3}^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \{\tilde{\mathbf{a}}^{0w}\}_{1 \times 3}^T [D^j]_{3 \times 3}^T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \{\tilde{\mathbf{a}}^{0w}\}_{1 \times 3}^T [D^k]_{3 \times 3}^T & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \{\tilde{\mathbf{a}}^{0w}\}_{1 \times 3}^T [D^l]_{3 \times 3}^T \end{bmatrix}. \quad (13)$$

При учете (13) аппроксимирующие выражения для тензоров деформаций и искривлений (9) срединной поверхности четырехугольного КЭ могут быть представлены в развернутом виде

$$\{\tilde{\mathbf{a}}^{0w}\}_{1 \times 3}^T \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix}_{3 \times 1} = \{\tilde{\mathbf{a}}^{0w}\}_{1 \times 3}^T \left[\varphi_1 [D^T]_{3 \times 3}^i \varphi_2 [D^T]_{3 \times 3}^j \varphi_3 [D^T]_{3 \times 3}^k \varphi_4 [D^T]_{3 \times 3}^l \right] \{\varepsilon_{\alpha\beta y}\}_{12 \times 1}, \quad (14)$$

$$\{\tilde{\mathbf{a}}^{0w}\}_{1 \times 3}^T \begin{Bmatrix} \kappa_{11} \\ \kappa_{22} \\ 2\kappa_{12} \end{Bmatrix}_{3 \times 1} = \{\tilde{\mathbf{a}}^{0w}\}_{1 \times 3}^T \left[\varphi_1 [D^T]_{3 \times 3}^i \varphi_2 [D^T]_{3 \times 3}^j \varphi_3 [D^T]_{3 \times 3}^k \varphi_4 [D^T]_{3 \times 3}^l \right] \{\kappa_{\alpha\beta y}\}_{12 \times 1}. \quad (15)$$

Из (14) и (15) можно получить необходимые аппроксимирующие выражения для каждой компоненты тензора деформаций

$$\{\varepsilon_{\alpha\beta}\}_{3 \times 1} = [h]_{3 \times 12} \{\varepsilon_{\alpha\beta y}\}_{12 \times 1}, \quad \{\kappa_{\alpha\beta}\}_{3 \times 1} = [h]_{3 \times 12} \{\kappa_{\alpha\beta y}\}_{12 \times 1}. \quad (16)$$

Как следует из (16), каждая компонента тензора деформаций и тензора искривлений срединной поверхности четырехугольного КЭ является функцией узловых значений всех компонент тензора деформаций, в то время как при реализации общепринятого в МКЭ подхода (6) каждая компонента тензора деформаций является функцией

узловых значений только этой же самой компоненты. Следует особо подчеркнуть, что в аппроксимирующих выражениях (16), в отличие от (6), присутствуют параметры используемой системы криволинейных координат.

Компоненты тензоров деформаций и искривлений во внутренней точке конечного элемента $\{\varepsilon \kappa_{\alpha\beta}\}$ через их узловые значения можно представить матричным выражением

$$\begin{matrix} \{\varepsilon \kappa_{\alpha\beta}\} \\ 6 \times 1 \end{matrix} = [H_2] \begin{matrix} \{\varepsilon \kappa_y\} \\ 6 \times 24 \end{matrix}, \quad (17)$$

где $\begin{matrix} \{\varepsilon \kappa_{\alpha\beta}\}^T \\ 1 \times 6 \end{matrix} = \{\varepsilon_{11}\varepsilon_{22}2\varepsilon_{12}\kappa_{11}\kappa_{22}2\kappa_{12}\}$, $\begin{matrix} \{\varepsilon \kappa_y\}^T \\ 1 \times 24 \end{matrix} = \{\{\varepsilon_{\alpha\beta y}\}^T \{\kappa_{\alpha\beta y}\}^T\}_{1 \times 12}$.

Используя соотношения (12) для преобразования элементов матрицы $[l]_{12 \times 36}$ в (10), можно столбец перемещений $\{W\}_{3 \times 1}$ внутренней точки конечного элемента представить матричным выражением

$$\begin{matrix} \{W\} \\ 3 \times 1 \end{matrix} = [A_2] \begin{matrix} \{W_y\} \\ 3 \times 36 \end{matrix}. \quad (18)$$

Более подробный вывод аппроксимирующих выражений для компонент вектора перемещения и их частных производных первого порядка по глобальным криволинейным координатам изложен в [33].

С другой стороны, деформации и искривления в точке срединной поверхности оболочки при использовании (2)–(4) определяются матричными соотношениями

$$\begin{matrix} \{\varepsilon \kappa_{\alpha\beta}^k\} \\ 6 \times 1 \end{matrix} = [\mu] \begin{matrix} \{W\} \\ 6 \times 3 \end{matrix} = [\mu] \begin{matrix} [A_2] \{W_y\} \\ 6 \times 3 \end{matrix} = [B_2] \begin{matrix} \{W_y\} \\ 6 \times 36 \end{matrix}, \quad (19)$$

где $[\mu]_{6 \times 3}$ — матрица дифференциальных операторов.

2. Матрица податливости четырехугольного конечного элемента

Смешанный функционал для оболочки при учете гипотезы Кирхгофа записывается выражением

$$F_S = \int_V \begin{matrix} \{S\}^T \\ 1 \times 6 \end{matrix} \begin{matrix} \{\varepsilon \kappa_{\alpha\beta}^k\} \\ 6 \times 1 \end{matrix} dV - \frac{1}{2} \int_V \begin{matrix} \{S\}^T \\ 1 \times 6 \end{matrix} \begin{matrix} \{\varepsilon \kappa_{\alpha\beta}\} \\ 6 \times 1 \end{matrix} dV - \frac{1}{2} \int_F \begin{matrix} \{W\}^T \\ 1 \times 3 \end{matrix} \begin{matrix} \{P\} \\ 6 \times 1 \end{matrix} dF.$$

где $\begin{matrix} \{S\}^T \\ 1 \times 6 \end{matrix} = \{N^{11}N^{22}N^{12}M^{11}M^{22}M^{12}\}$ — строка усилий моментов в точке срединной поверхности; $\begin{matrix} \{\varepsilon \kappa_{\alpha\beta}\}^T \\ 1 \times 6 \end{matrix} = \{\varepsilon_{11}\varepsilon_{22}2\varepsilon_{12}\kappa_{11}\kappa_{22}2\kappa_{12}\}$ — строка деформаций и искривлений срединной поверхности в точке, компоненты которой определяются через компоненты матрицы-строки $\{S\}$ (приведено ниже); $\begin{matrix} \{\varepsilon \kappa_{\alpha\beta}^k\}^T \\ 1 \times 6 \end{matrix}$ — строка деформаций и искривлений срединной поверхности, компоненты которой определяются соотношениями (19).

Усилия в сечении оболочки определяются выражениями

$$\begin{matrix} \{N\} \\ 3 \times 1 \end{matrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{matrix} \{\sigma\} \\ 3 \times 1 \end{matrix} d\zeta = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{matrix} [C] \\ 3 \times 3 \end{matrix} \begin{matrix} \{\varepsilon\} \\ 3 \times 1 \end{matrix} d\zeta = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{matrix} [C] \\ 3 \times 3 \end{matrix} \begin{matrix} [Z] \\ 3 \times 6 \end{matrix} \begin{matrix} \{\varepsilon \kappa_{\alpha\beta}\} \\ 6 \times 1 \end{matrix} d\zeta, \quad (20)$$

где $[C]$ — матрица закона Гука, определяемая в [4].

После интегрирования (20) получаем

$$\begin{matrix} \{N\} \\ 3 \times 1 \end{matrix} = \begin{bmatrix} [\alpha] \\ 3 \times 6 \end{bmatrix} \begin{matrix} \{\varepsilon \kappa_{\alpha\beta}\} \\ 6 \times 1 \end{matrix},$$

где $\begin{matrix} \{N\}^T \\ 1 \times 3 \end{matrix} = \{N^{11} N^{22} N^{12}\}$.

Моменты в сечении оболочки определяются выражениями

$$\begin{matrix} \{M\} \\ 3 \times 1 \end{matrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{matrix} \{\sigma\} \\ 3 \times 1 \end{matrix} \zeta d\zeta = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} [C] \\ 3 \times 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [Z] \\ 3 \times 6 \end{bmatrix} \begin{matrix} \{\varepsilon_{\alpha\beta}\} \\ 6 \times 1 \end{matrix} \zeta d\zeta = \begin{bmatrix} [\beta] \\ 3 \times 6 \end{bmatrix} \begin{matrix} \{\varepsilon \kappa_{\alpha\beta}\} \\ 6 \times 1 \end{matrix}.$$

На основе полученных формул формируется соотношение

$$\begin{matrix} \{S\} \\ 6 \times 1 \end{matrix} = \begin{bmatrix} [\omega] \\ 6 \times 6 \end{bmatrix} \begin{matrix} \{\varepsilon \kappa_{\alpha\beta}\} \\ 6 \times 1 \end{matrix}. \quad (21)$$

С учетом (21) функционал запишется, как

$$F_S = \int_V \begin{matrix} \{\varepsilon \kappa_{\alpha\beta}\}^T \\ 1 \times 6 \end{matrix} \begin{bmatrix} [\omega] \\ 6 \times 6 \end{bmatrix} \begin{matrix} \{\varepsilon \kappa_{\alpha\beta}^k\} \\ 6 \times 1 \end{matrix} dV - \frac{1}{2} \int_V \begin{matrix} \{\varepsilon \kappa_{\alpha\beta}\}^T \\ 1 \times 6 \end{matrix} \begin{bmatrix} [\omega] \\ 6 \times 6 \end{bmatrix} \begin{matrix} \{\varepsilon \kappa_{\alpha\beta}\} \\ 6 \times 1 \end{matrix} dV - \frac{1}{2} \int_F \{W\}^T \{P\} dF. \quad (22)$$

С учетом аппроксимирующих выражений (17)–(19) функционал (22) запишется следующим образом:

$$\begin{aligned} F_S = & \begin{matrix} \{\varepsilon \kappa_y\}^T \\ 1 \times 24 \end{matrix} \int_V \begin{bmatrix} [H_\gamma] \\ 24 \times 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\omega] \\ 6 \times 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [B_\gamma] \\ 6 \times 6 \end{bmatrix} dV \{W_y\}_{36 \times 1} - \frac{1}{2} \begin{matrix} \{\varepsilon \kappa_y\}^T \\ 1 \times 24 \end{matrix} \int_V \begin{bmatrix} [H_\gamma] \\ 24 \times 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\omega] \\ 6 \times 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [H_\gamma] \\ 6 \times 24 \end{bmatrix} dV \{W_y\}_{24 \times 1} - \\ & - \frac{1}{2} \begin{matrix} \{W_y\}^T \\ 1 \times 36 \end{matrix} \int_F \begin{bmatrix} [A_\gamma]^T \\ 36 \times 3 \end{bmatrix} \{P\} dF, \quad \gamma = 1, 2. \end{aligned} \quad (23)$$

Выполняя последовательную минимизацию функционала (23) по $\{\varepsilon \kappa\}^T$ и $\{W_y\}^T$, можно получить систему матричных уравнений

$$\begin{cases} \partial F_S / \partial \{\varepsilon \kappa_y\}^T = \begin{bmatrix} [MQ] \\ 24 \times 36 \end{bmatrix} \{W_y\}_{36 \times 1} - \begin{bmatrix} [Y] \\ 24 \times 24 \end{bmatrix} \{W_y\}_{24 \times 1} = 0, \\ \partial F_S / \partial \{W_y\}^T = \begin{bmatrix} [MQ] \\ 36 \times 24 \end{bmatrix} \{\varepsilon \kappa_y\}_{24 \times 1} - \{R\}_{36 \times 1} = 0. \end{cases} \quad (24)$$

Преобразуя первое уравнение системы (24) к виду

$$\begin{matrix} \{\varepsilon \kappa_y\} \\ 24 \times 1 \end{matrix} = \begin{bmatrix} [Y] \\ 24 \times 24 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} [MQ] \\ 24 \times 36 \end{bmatrix} \{W_y\}_{36 \times 1}$$

и подставляя его во вторую систему уравнений (24), можно получить матричное соотношение

$$\begin{bmatrix} [MQ] \\ 36 \times 24 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} [Y] \\ 24 \times 24 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} [MQ] \\ 24 \times 36 \end{bmatrix} \{W_y\}_{36 \times 1} = \{R\}_{36 \times 1}$$

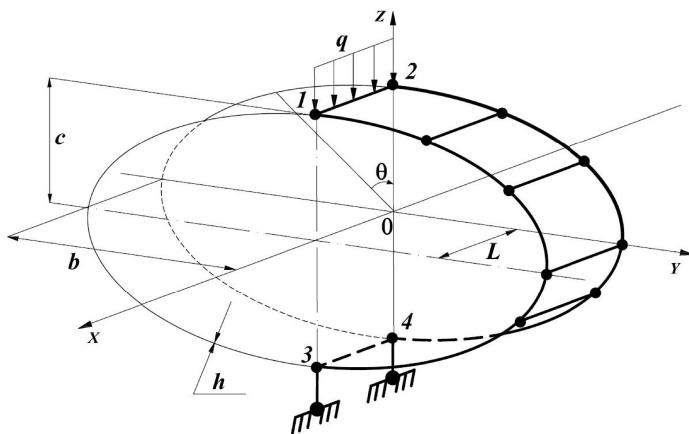
или в более компактном виде

$$\begin{bmatrix} [K] \\ 24 \times 36 \end{bmatrix} \{W_y\}_{36 \times 1} = \{R\}_{36 \times 1},$$

где $[K]$ — матрица податливости используемого четырехугольного КЭ.

Корректность и высокая точность вычислений искомых прочностных параметров НДС-оболочек при использовании разработанного алгоритма подтверждаются конкретными примерами расчета.

Пример 1. С целью сравнения точности вычисления контролируемых прочностных параметров НДС-оболочек, полученных на основе использования разработанного элемента дискретизации в смешанной формулировке и конечного элемента с аналогичным набором узловых варьируемых параметров, скомпонованного на основе метода перемещений, выполнен расчет эллиптического цилиндра с $b/c = 4$ (см. рисунок). Физические и геометрические исходные данные: $q = 0.2 \text{ Н/см}$, $E = 2 \cdot 10^7 \text{ Н/см}^2$, $\nu = 0.3$ (коэффициент поперечной деформации), $h = 0.2 \text{ см}$, $L = 1.0 \text{ см}$, большая полуось эллипса $b = 30 \text{ см}$, малая полуось эллипса $c = 7.5 \text{ см}$. Моделирование кольца осуществлялось



Расчетная схема оболочки в форме эллиптического цилиндра с шарнирным опиранием

The design scheme of the shell in the form of an elliptical cylinder with a hinged support

Таблица 1. Значения нормальных напряжений $\sigma_{\theta\theta}$ и моментов $M_{\theta\theta}$ в точках приложения вертикальной нагрузки и в точках шарнирного опирания

Table 1. Values of normal stresses $\sigma_{\theta\theta}$ and moments $M_{\theta\theta}$ at the points of application of the vertical load and at the points of articulation

| Координаты точек $x, \text{ см}; \theta, \text{ рад}$ | Напряжения $\sigma_{\theta\theta}, \text{ Н/см}^2$, моменты $M_{\theta\theta}, \text{ Н}\cdot\text{см}$ | Сетка узлов дискретизации | | | | |
|---|---|---------------------------|---------------------------|---------------------------|---------------------------|---------------------------|
| | | 41×2 | 61×2 | 81×2 | 91×2 | 101×2 |
| Смешанная формулировка при общепринятой аппроксимации искомых величин | | | | | | |
| $x = 0.0;$ $\theta = 0.0$ | $\sigma_{\theta\theta}^{in}$ $\sigma_{\theta\theta}^{out}$ $M_{\theta\theta}$ | 172.2 -173.8 -1.153 | 218.9 -219.1 -1.460 | 236.9 -236.5 -1.578 | 237.4 -237.1 -1.582 | 237.3 -236.9 -1.580 |
| $x = 0.0;$ $\theta = \pi$ | $\sigma_{\theta\theta}^{in}$ $\sigma_{\theta\theta}^{out}$ $M_{\theta\theta}$ | -42.8 44.6 0.291 | 160.4 -159.7 -1.067 | 235.3 -234.9 -1.568 | 236.6 -236.2 -1.576 | 236.1 -235.7 -1.573 |

В формулировке метода перемещений при общепринятой аппроксимации искомых величин

| | | $\sigma_{\theta\theta}^{in}$ $\sigma_{\theta\theta}^{out}$ $M_{\theta\theta}$ | 81×2 | 161×2 | 241×2 | 321×2 | 401×2 |
|--|--|---|------------------------------|------------------------------|------------------------------|------------------------------|----------------|
| | | | $x = 0.0;$ $\theta = 0.0$ | $x = 0.0;$ $\theta = \pi$ | $x = 0.0;$ $\theta = 0.0$ | $x = 0.0;$ $\theta = \pi$ | |
| | | 151.5 -153.9 -1.018 | 197.1 -198.0 -1.317 | 228.1 -228.0 -1.520 | 235.54 -235.2 -1.569 | 237.1 -236.8 -1.580 | |
| | | -2.59 2.54 0.017 | 72.6 -71.5 -0.48 | 197.70 -197.1 -1.316 | 228.0 -228.6 -1.519 | 234.8 -234.3 -1.564 | |

одним рядом элементов дискретизации. При формировании матрицы податливости КЭ в смешанной формулировке и матрицы его жесткости в формулировке метода перемещений использовалась стандартная для МКЭ интерполяционная процедура (6), (7).

Результаты расчетов сведены в табл. 1, в которой приведены значения нормальных напряжений $\sigma_{\theta\theta}$ и изгибающих моментов $M_{\theta\theta}$ в точках приложения вертикальной распределенной нагрузки 1, 2 и в точках шарнирного опирания 3, 4 в зависимости от степени сгущения сетки узлов дискретизации. Выбранная расчетная схема оболочки предполагает равенство напряжений $\sigma_{\theta\theta}$ и моментов $M_{\theta\theta}$ в точках 1, 2 и 3, 4.

Анализируя численные значения напряжений и моментов, приведенных в табл. 1, можно отметить, что по мере сгущения сетки узлов дискретизации оболочки прослеживается сходимость вычислительного процесса, однако скорость сходимости при использовании КЭ в смешанной формулировке существенно выше, чем при использовании КЭ в формулировке метода перемещений. Так, например, при применении разработанного смешанного конечно-элементного алгоритма в решении данной задачи для достижения приемлемой погрешности вычислений контролируемых параметров НДС оказалось вполне достаточным разбиение рассчитываемой оболочки на 90 конечных элементов. Для достижения аналогичного уровня точности вычислений при реализации МКЭ в форме метода перемещений понадобилось существенно большее (в 4 раза) число элементов дискретизации, равное 400.

Пример 2. Выполнен расчет оболочки, рассмотренной в примере 1, при установлении в точках 3, 4 вместо стержней пружинных опор.

Т а б л и ц а 2. Значения нормальных напряжений $\sigma_{\theta\theta}$ и моментов $M_{\theta\theta}$ при пружинном опирании

Table 2. Values of normal stresses $\sigma_{\theta\theta}$ and moments $M_{\theta\theta}$ for the case of spring support

| Координаты точек x , см; θ , рад | Напряжения $\sigma_{\theta\theta}$, Н/см ² , моменты $M_{\theta\theta}$, Н·см | Величина жесткого смещения, м | | | |
|--|---|-------------------------------|--------|--------|--------|
| | | 0.00 | 0.05 | 0.15 | 0.30 |
| Первый вариант расчета | | | | | |
| $x = 0.0;$ $\theta = 0.0$ | $\sigma_{\theta\theta}^{in}$ | 237.4 | 237.4 | 237.4 | 237.4 |
| | $\sigma_{\theta\theta}^{out}$ | -237.0 | -237.0 | -237.0 | -237.0 |
| | $M_{\theta\theta}$ | -1.581 | -1.581 | -1.581 | -1.581 |
| $x = 0.0;$ $\theta = \pi$ | $\sigma_{\theta\theta}^{in}$ | 237.4 | 237.4 | 237.4 | 237.4 |
| | $\sigma_{\theta\theta}^{out}$ | -237.0 | -237.0 | -237.0 | -237.0 |
| | $M_{\theta\theta}$ | -1.581 | -1.581 | -1.581 | -1.581 |
| Второй вариант расчета | | | | | |
| $x = 0.0;$ $\theta = 0.0$ | $\sigma_{\theta\theta}^{in}$ | 237.3 | 188.0 | 178.4 | 175.4 |
| | $\sigma_{\theta\theta}^{out}$ | -236.9 | -188.8 | -179.4 | -176.5 |
| | $M_{\theta\theta}$ | -1.580 | -1.256 | -1.193 | -1.173 |
| $x = 0.0;$ $\theta = \pi$ | $\sigma_{\theta\theta}^{in}$ | 236.1 | 107.4 | 82.4 | 74.6 |
| | $\sigma_{\theta\theta}^{out}$ | -235.7 | -106.1 | -80.9 | -73.0 |
| | $M_{\theta\theta}$ | -1.573 | -0.712 | -0.544 | -0.492 |
| Третий вариант расчета | | | | | |
| $x = 0.0;$ $\theta = 0.0$ | $\sigma_{\theta\theta}^{in}$ | 237.1 | 200.6 | 195.8 | 194.4 |
| | $\sigma_{\theta\theta}^{out}$ | -236.8 | -201.3 | -196.6 | -195.3 |
| | $M_{\theta\theta}$ | -1.580 | -1.340 | -1.308 | -1.299 |
| $x = 0.0;$ $\theta = \pi$ | $\sigma_{\theta\theta}^{in}$ | 234.8 | 78.0 | 57.4 | 51.4 |
| | $\sigma_{\theta\theta}^{out}$ | -234.3 | -76.8 | -56.1 | -50.1 |
| | $M_{\theta\theta}$ | -1.564 | -0.516 | -0.379 | -0.338 |

Результаты расчетов оболочки при пружинном опирании сведены в табл. 2, в которой представлены значения напряжений $\sigma_{\theta\theta}$ и моментов $M_{\theta\theta}$ в зависимости от величины смещения оболочки как твердого тела. Расчеты оболочки при пружинном опирании проводились в трех вариантах при двух видах интерполяции искомых величин: тензорно-векторной (9)–(15) и стандартной (6), (7). В первом и втором вариантах реализована смешанная формулировка МКЭ при тензорно-векторной и стандартной интерполяционной процедурах соответственно. В третьем варианте использована формулировка МКЭ в форме метода перемещений при стандартной интерполяции искомых величин. В первом варианте оболочка разбивалась на 50 КЭ, во втором и третьем — на 90 и 400 КЭ соответственно.

Анализ данных табл. 2 показывает, что в первом варианте напряжения и моменты не меняют своих значений при всех величинах жестких смещений. Во втором варианте контролируемые параметры НДС меняют свои значения тем существеннее, чем больше величина жесткого смещения. Аналогичная картина наблюдается и в третьем варианте расчета. Наиболее значительные погрешности вычислений во втором и третьем вариантах фиксируются в точках пружинного опирания. Так, во втором варианте значения напряжений и моментов в этих точках уменьшились примерно в 3 раза при величине жесткого смещения 0.15 м, а в третьем варианте — в 4.5 раза. При увеличении жесткого смещения до 0.3 м погрешность второго и третьего вариантов возросла еще в большей степени.

Заключение

На основании анализа результатов представленных выше расчетов можно сформулировать следующие выводы:

1. Разработанный конечно-элементный алгоритм расчета оболочек в смешанной формулировке позволяет с высокой степенью точности вычислять необходимые прочностные параметры оболочек, в том числе со значительной кривизной срединной поверхности.
2. Скорость сходимости вычислительного процесса разработанного конечно-элементного алгоритма в смешанной формулировке в 4 раза больше по сравнению с алгоритмом, скомпонованным на основе МКЭ в форме метода перемещений.
3. Использование тензорно-векторной формы интерполяционной процедуры в разработанном алгоритме МКЭ позволяет получать корректные значения контролируемых прочностных параметров НДС-оболочек, допускающих смещения как абсолютно твердых тел при заданных внешних нагрузках.

Список литературы

- [1] Yanhui Y., Dong L., Zijian H., Zijian L. Optimization of preform shapes by RSM and FEM to improve deformation homogeneity in aerospace forgings. Chinese Journal of Aeronautics. 2010; 23(2):260–267. DOI:10.1016/S1000-9361(09)60214-4.
- [2] Jiapeng T., Ping X., Baoyuan Z., Bifu H. A finite element parametric modeling technique of aircraft wing structures. Chinese Journal of Aeronautics. 2013; 26(5):1202–1210. DOI:10.1016/j.cja.2013.07.019.
- [3] Новожилов В.В. Теория тонких оболочек. СПб.: Издательство Санкт-Петербургского университета; 2010: 380.

- [4] Седов Л.И. Механика сплошной среды Т. 1. М.: Наука; 1976: 536.
- [5] Ubaydulloev M.N., Serazutdinov M.N. Simulation and calculation of stress-strain state of thin-walled structures strengthened under load. Lecture Notes in Mechanical Engineering. 2022; 332–340.
- [6] Leonetti L., Magisano D., Madeo A., Garcea G., Kiendl J., Reali A. A simplified Kirchhoff–Love large deformation model for elastic shells and its effective isogeometric formulation. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 2019; (354):369–396. DOI:10.1016/j.cma.2019.05.025.
- [7] Magisano D., Liang K., Garcea G., Leonetti L., Ruess M. An efficient mixed variational reduced-order model formulation for nonlinear analyses of elastic shells. International Journal for Numerical Methods in Engineering. 2018; 113(4):634–655. DOI:10.1002/nme.5629.
- [8] Постнов В.А., Хархурим И.Я. Метод конечных элементов в расчетах судовых конструкций. Л.: Судостроение; 1974: 344.
- [9] Urnev A.S., Chernyatin A.S., Matvienko Y.G., Razumovskii I.A. Experimental and numerical sizing of delamination defects in layered composite materials. Inorganic Materials. 2019; 55(15):1516–1522. DOI:10.1134/S0020168519150147.
- [10] Bakulin V.N. A model for analyzing the stress-strain state of three-layer cylindrical shells with rectangular cutouts. Izvestiya Rossiiskoi Akademii Nauk. Mechanics of a Rigid Body. 2022; (1):122–132.
- [11] Sultanov L.U. Analysis of finite elasto-plastic strains: integration algorithm and numerical examples. Lobachevskii Journal of Mathematics. 2018; 39(9):1478–1483. DOI:10.1134/S1995080218090056. Available at: <https://www.scopus.com/inward/record.uri?eid=2-s2.0-85059692523&doi=10.1134%2fS1995080218090056&partnerID=40&md5=f3b5a84e237de1f5f0cada857269fdec>.
- [12] Storozhuk E.A. Stress-strain state and stability of a flexible circular cylindrical shell with transverse shear strains. International Applied Mechanics. 2021; 57(5):554–567. DOI:10.1007/s10778-021-01106-1.
- [13] Zheleznov L.P., Kabanov V.V., Boiko D.V. Nonlinear deformation and stability of discrete-reinforced elliptical cylindrical composite shells under torsion and internal pressure. Russian Aeronautics. 2018; 61(2):175–182. DOI:10.3103/S1068799818020046.
- [14] Paimushin V.N., Gazizullin R.K., Polyakova N.V., Shishov M.A. Sandwich shells with composite facings and a transversally flexible core: refined equations and buckling modes of specimens under four-point bending tests. Advanced Structured Materials. 2021; (141):391–411. DOI:10.1007/978-3-030-54928-2_29.
- [15] Postnov V.A. Use of Tikhonov's regularization method for solving identification problem for elastic systems. Mechanics of Solids. 2010; 1(45):51–56. DOI:10.3103/S0025654410010085.
- [16] Yakupov S.N., Kiyamov H.G., Yakupov N.M. Modeling a synthesized element of complex geometry based upon three-dimensional and two-dimensional finite elements. Lobachevskii Journal of Mathematics. 2021; 42(9):2263–2271.
- [17] Klochkov Yu.V., Nikolaev A.P., Fomin S.D., Vakhnina O.V., Sobolevskaya T.A., Klochkov M.Yu. A finite elemental algorithm for calculating the arbitrarily loaded shell using three-dimensional finite elements. ARPN Journal of Engineering and Applied Sciences. 2020; 15(13):1472–1481.
- [18] Klochkov Yu., Nikolaev A., Vakhnina O., Sobolevskaya T., Klochkov M. Physically nonlinear shell deformation based on three-dimensional finite elements. Magazine of Civil Engineering. 2022; 5(113):11314. DOI:10.34910/MCE.113.14.

- [19] **Dmitriev A., Lalin V., Melnikov A.** Validation of computational procedures for the progressive collapse analysis of reinforced concrete structures. Proceedings of EECE 2020: Energy, Environmental and Construction Engineering. St. Petersburg, Russia, Cham: Springer; 2021; (150):215–224. DOI:10.1007/978-3-030-72404-7_22.
- [20] **Jurayev D., Vatin N., Sultanov T., Mirsaidov M.** Spatial stress-strain state of Earth dams. Magazine of Civil Engineering. 2023; 2(118):11810. DOI:10.34910/MCE.118.10.
- [21] **Lei Zh., Gillot F., Jezeguel L.** Developments of the mixed grid isogeometric Reissner–Mindlin shell: serendipity basis and modified reduced. International Journal of Mechanical Sciences. 2015; (54):105–119.
- [22] **Lalin V.V., Rybakov V.A., Ivanov S.S., Azarov A.A.** Mixed finite-element method in V.I. Slivker's semi-shear thin-walled bar theory. Magazine of Civil Engineering. 2019; 5(89):79–93. DOI:10.18720/MCE.89.7.
- [23] **Postnov V.A., Tumashik G.A., Moskvina I.V.** On the stability of the reinforced cylindrical shell. Strength and Ductility Problems. 2007; (69):18–23.
- [24] **Agapov V.** The family of multilayered finite elements for the analysis of plates and shells of variable thickness. E3S Web of Conferences. 2018 Topical Problems of Architecture, Civil Engineering and Environmental Economics, TPACEE 2018. 2019; (91):02013. DOI:10.1051/e3sconf/20199102013.
- [25] **Tyukalov Yu.Ya.** Finite element model of Reisner's plates in stresses. Civil Engineering Journal. 2019; 89(5):61–78. DOI:10.18720/MCE.89.6.
- [26] **Kirichevsky R.V., Skrynnikova A.V.** The effect of approximating functions in the construction of the stiffness matrix of the finite element on the convergence rate of the finite element method. Vestnik Tomskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Matematika i Mekhanika. 2019; (57):26–37.
- [27] **Agapov V., Golovanov R.** Comparative analysis of the simplest finite elements of plates in bending. Advances in Intelligent Systems and Computing. 2018; (692):1009–1016.
- [28] **Maslennikov A.M., Kobelev E.A., Maslennikov N.A.** Solution of stability problems by the finite element method. Bulletin of Civil Engineers. 2020; 2(79):68–74.
- [29] **Lalin V.V., Yavarov A.V., Orlova E.S., Gulov A.R.** Application of the finite element method for the solution of stability problems of the Timoshenko beam with exact shape functions. Power Technology and Engineering. 2019; 4(53):449–454.
- [30] **Jeon H.-M., Lee P.-S., Bathe K.-J.** The MITC3 shell finite element enriched by interpolation covers. Computers and Structures. 2014; (134):128–142.
- [31] **Ko Y., Lee P.-S., Bathe K.-J.** A new 4-node MITC element for analysis of two-dimensional solids and its formulation in a shell element. Computers and Structures. 2017; (192):34–49.
- [32] **Schöllhammer D., Fries T.P.** A higher-order trace finite element method for shells. Numerical Methods in Engineering. 2021; 122(5):1217–1238. DOI:10.1002/nme.6558.
- [33] **Klochkov Yu.V., Nikolaev A.P., Sobolevskaya T.A., Vakhnina O.V., Klochkov M.Yu.** The calculation of the ellipsoidal shell based FEM with vector interpolation of displacements when the variable parameterisation of the middle surface. Lobachevskii Journal of Mathematics. 2020; 41(3):373–381. DOI:10.1134/S1995080218090056. Available at: [https://www.scopus.com/inward/record.uri?eid=2-s2.0-85059692523&doi=10.1134%\\$2fS1995080218090056&partnerID=40&md5=f3b5a84e237de1f5f0cada857269fdec](https://www.scopus.com/inward/record.uri?eid=2-s2.0-85059692523&doi=10.1134%$2fS1995080218090056&partnerID=40&md5=f3b5a84e237de1f5f0cada857269fdec).
- [34] **Рудицын М.Н., Артемов П.Я., Любощиц М.И.** Справочное пособие по сопротивлению материалов. Минск: Вышэйшая школа; 1970: 628.

COMPUTATIONAL TECHNOLOGIES

DOI:10.25743/ICT.2024.29.6.005

Modernization of the approximation for the required values of the mixed FEM for calculations of shells in curvilinear coordinate systems

Ю. В. КЛОЧКОВ^{1,*}, А. П. НИКОЛАЕВ¹, В. А. ПШЕНИЧКИНА², С. Д. ФОМИН¹,
 О. В. ВАХННИНА¹, А. С. АНДРЕЕВ¹, М. Ю. КЛОЧКОВ²

¹Volgograd State Agricultural University, 400002, Volgograd, Russia

²Volgograd State Technical University, 400005, Volgograd, Russia

*Corresponding author: Yuriy V. Klochkov, e-mail: klotchkov@bk.ru

Received January 25, 2024, revised June 28, 2024, accepted July 29, 2024.

Abstract

For a quadrangular shell discretization element, the compliance matrix of which is composed on the basis of a mixed version of the FEM, bicubic shape functions are used to approximate the displacement vector and bilinear functions for the second-rank tensor (deformations and curvatures). Based on the coordinate transformations, new approximating expressions are obtained for the desired components of the tensor for the internal point of the finite element through the nodal values of the components of the nodal point tensors.

The efficiency of the developed approximating functions of the sought quantities is shown numerically.

Keywords: thin shell, quadrangular finite element in mixed formulation, tensor vector interpolation.

Citation: Klochkov Yu.V., Nikolaev A.P., Pshenichkina V.A., Fomin S.D., Vakhnina O.V., Andreev A.S., Klochkov M.Yu. Modernization of the approximation for the required values of the mixed FEM for calculations of shells in curvilinear coordinate systems. Computational Technologies. 2024; 29(6):76–92. DOI:10.25743/ICT.2024.29.6.005. (In Russ.)

References

1. Yanhui Y., Dong L., Ziyian H., Zijian L. Optimization of preform shapes by RSM and FEM to improve deformation homogeneity in aerospace forgings. Chinese Journal of Aeronautics. 2010; 23(2):260–267. DOI:10.1016/S1000-9361(09)60214-4. DOI:10.1016/S1000-9361(09)60214-4.
2. Jiapeng T., Ping X., Baoyuan Z., Bifu H. A finite element parametric modeling technique of aircraft wing structures. Chinese Journal of Aeronautics. 2013; 26(5):1202–1210. DOI:10.1016/j.cja.2013.07.019.
3. Novozhilov V.V. Teoriya tonkikh obolochek [Theory of thin shells]. St. Petersburg: Izdatel'stvo Sankt-Peterburgskogo Universiteta; 2010: 380. (In Russ.)
4. Sedov L.I. Mekhanika sploshnoy sredy, t. 1 [Mechanics of a continuous medium, vol. 1]. Moscow: Nauka; 1976: 536. (In Russ.)
5. Ubaydulloev M.N., Serazutdinov M.N. Simulation and calculation of stress-strain state of thin-walled structures strengthened under load. Lecture Notes in Mechanical Engineering. 2022: 332–340.
6. Leonetti L., Magisano D., Madeo A., Garcea G., Kiendl J., Reali A. A simplified Kirchhoff–Love large deformation model for elastic shells and its effective isogeometric formulation. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 2019; (354):369–396. DOI:10.1016/j.cma.2019.05.025.
7. Magisano D., Liang K., Garcea G., Leonetti L., Ruess M. An efficient mixed variational reduced-order model formulation for nonlinear analyses of elastic shells. International Journal for Numerical Methods in Engineering. 2018; 113(4):634–655. DOI:10.1002/nme.5629.

8. **Postnov V.A., Kharkhurim I.Ya.** Metod konechnykh elementov v raschetakh sudovykh konstruktsiy [Finite element method in calculations of ship structures]. Leningrad: Sudostroenie; 1974: 344. (In Russ.)
9. **Urnev A.S., Chernyatin A.S., Matvienko Y.G., Razumovskii I.A.** Experimental and numerical sizing of delamination defects in layered composite materials. Inorganic Materials. 2019; 55(15):1516–1522. DOI:10.1134/S0020168519150147.
10. **Bakulin V.N.** A model for analyzing the stress-strain state of three-layer cylindrical shells with rectangular cutouts. Izvestiya Rossiiskoi Akademii Nauk. Mechanics of a Rigid Body. 2022; (1):122–132.
11. **Sultanov L.U.** Analysis of finite elasto-plastic strains: integration algorithm and numerical examples. Lobachevskii Journal of Mathematics. 2018; 39(9):1478–1483. DOI:10.1134/S1995080218090056. Available at: <https://www.scopus.com/inward/record.uri?eid=2-s2.0-85059692523&doi=10.1134%2fS1995080218090056&partnerID=40&md5=f3b5a84e237de1f5f0cada857269fdec>.
12. **Storozhuk E.A.** Stress-strain state and stability of a flexible circular cylindrical shell with transverse shear strains. International Applied Mechanics. 2021; 57(5):554–567. DOI:10.1007/s10778-021-01106-1.
13. **Zheleznov L.P., Kabanov V.V., Boiko D.V.** Nonlinear deformation and stability of discrete-reinforced elliptical cylindrical composite shells under torsion and internal pressure. Russian Aeronautics. 2018; 61(2):175–182. DOI:10.3103/S1068799818020046.
14. **Paimushin V.N., Gazizullin R.K., Polyakova N.V., Shishov M.A.** Sandwich shells with composite facings and a transversally flexible core: refined equations and buckling modes of specimens under four-point bending tests. Advanced Structured Materials. 2021; (141):391–411. DOI:10.1007/978-3-030-54928-2_29.
15. **Postnov V.A.** Use of Tikhonov's regularization method for solving identification problem for elastic systems. Mechanics of Solids. 2010; 1(45):51–56. DOI:10.3103/S0025654410010085.
16. **Yakupov S.N., Kiyamov H.G., Yakupov N.M.** Modeling a synthesized element of complex geometry based upon three-dimensional and two-dimensional finite elements. Lobachevskii Journal of Mathematics. 2021; 42(9):2263–2271.
17. **Klochkov Yu.V., Nikolaev A.P., Fomin S.D., Vakhnina O.V., Sobolevskaya T.A., Klochkov M.Yu.** A finite elemental algorithm for calculating the arbitrarily loaded shell using three-dimensional finite elements. ARPN Journal of Engineering and Applied Sciences. 2020; 15(13):1472–1481.
18. **Klochkov Yu., Nikolaev A., Vakhnina O., Sobolevskaya T., Klochkov M.** Physically nonlinear shell deformation based on three-dimensional finite elements. Magazine of Civil Engineering. 2022; 5(113):11314. DOI:10.34910/MCE.113.14.
19. **Dmitriev A., Lalín V., Melnikov A.** Validation of computational procedures for the progressive collapse analysis of reinforced concrete structures. Proceedings of EECE 2020: Energy, Environmental and Construction Engineering. St. Petersburg, Russia, Cham: Springer; 2021; (150):215–224. DOI:10.1007/978-3-030-72404-7_22.
20. **Jurayev D., Vatin N., Sultanov T., Mirsaidov M.** Spatial stress-strain state of Earth dams. Magazine of Civil Engineering. 2023; 2(118):11810. DOI:10.34910/MCE.118.10.
21. **Lei Zh., Gillot F., Jezequel L.** Developments of the mixed grid isogeometric Reissner–Mindlin shell: serendipity basis and modified reduced. International Journal of Mechanical Sciences. 2015; (54):105–119.
22. **Lalin V.V., Rybakov V.A., Ivanov S.S., Azarov A.A.** Mixed finite-element method in V.I. Slivker's semi-shear thin-walled bar theory. Magazine of Civil Engineering. 2019; 5(89):79–93. DOI:10.18720/MCE.89.7.
23. **Postnov V.A., Tumashik G.A., Moskvina I.V.** On the stability of the reinforced cylindrical shell. Strength and Ductility Problems. 2007; (69):18–23.
24. **Agapov V.** The family of multilayered finite elements for the analysis of plates and shells of variable thickness. E3S Web of Conferences. 2018 Topical Problems of Architecture, Civil Engineering and Environmental Economics, TPACEE 2018. 2019; (91):02013. DOI:10.1051/e3sconf/20199102013.
25. **Tyukalov Yu.Ya.** Finite element model of Reissner's plates in stresses. Civil Engineering Journal. 2019; 89(5):61–78. DOI:10.18720/MCE.89.6.
26. **Kirichevsky R.V., Skrynnikova A.V.** The effect of approximating functions in the construction of the stiffness matrix of the finite element on the convergence rate of the finite element method. Vestnik Tomskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Matematika i Mekhanika. 2019; (57):26–37.

27. **Agapov V., Golovanov R.** Comparative analysis of the simplest finite elements of plates in bending. Advances in Intelligent Systems and Computing. 2018; (692):1009–1016.
28. **Maslenikov A.M., Kobelev E.A., Maslenikov N.A.** Solution of stability problems by the finite element method. Bulletin of Civil Engineers. 2020; 2(79):68–74.
29. **Lalin V.V., Yavarov A.V., Orlova E.S., Gulov A.R.** Application of the finite element method for the solution of stability problems of the Timoshenko beam with exact shape functions. Power Technology and Engineering. 2019; 4(53):449–454.
30. **Jeon H.-M., Lee P.-S., Bathe K.-J.** The MITC3 shell finite element enriched by interpolation covers. Computers and Structures. 2014; (134):128–142.
31. **Ko Y., Lee P.-S., Bathe K.-J.** A new 4-node MITC element for analysis of two-dimensional solids and its formulation in a shell element. Computers and Structures. 2017; (192):34–49.
32. **Schöllhammer D., Fries T.P.** A higher-order trace finite element method for shells. Numerical Methods in Engineering. 2021; 122(5):1217–1238. DOI:10.1002/nme.6558.
33. **Klochkov Yu.V., Nikolaev A.P., Sobolevskaya T.A., Vakhnina O.V., Klochkov M.Yu.** The calculation of the ellipsoidal shell based FEM with vector interpolation of displacements when the variable parameterisation of the middle surface. Lobachevskii Journal of Mathematics. 2020; 41(3):373–381. DOI:10.1134/S1995080218090056. Available at: [https://www.scopus.com/inward/record.uri?eid=2-s2.0-85059692523&doi=10.1134%\\$2fS1995080218090056&partnerID=40&md5=f3b5a84e237de1f5f0cada857269fdec](https://www.scopus.com/inward/record.uri?eid=2-s2.0-85059692523&doi=10.1134%$2fS1995080218090056&partnerID=40&md5=f3b5a84e237de1f5f0cada857269fdec).
34. **Ruditsyn M.N., Artemov P.Ya., Lyuboshits M.I.** Spravochnoye posobiye po soprotivleniyu materialov [Reference book on strength of materials]. Minsk: Vysheyshaya Shkola; 1970: 630. (In Russ.)