
МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

DOI:10.25743/ICT.2024.29.6.002

Исследование влияния поверхностных дефектов на частоту колебаний и устойчивость цилиндрической оболочки, содержащей жидкость

С. А. БОЧКАРЁВ*, А. Н. СЕНИН

Институт механики сплошных сред УрО РАН, 614068, Пермь, Россия

*Контактный автор: Бочкарёв Сергей Аркадьевич, e-mail: bochkarev@icmm.ru

Поступила 16 декабря 2023 г., доработана 28 февраля 2024 г., принята в печать 11 марта 2024 г.

Представлены результаты численного исследования вертикально ориентированных круговых цилиндрических оболочек с дефектом на внешней или внутренней поверхности. Внутренняя полость тонкостенного тела полностью или частично заполнена идеальной сжимаемой жидкой средой, эффекты плескания на свободной поверхности которой не учитываются. Дефект в виде кольца прямоугольного сечения моделируется собственным набором физико-механических параметров. Численная реализация алгоритма осуществляется на основе полуаналитического варианта метода конечных элементов. Оценка устойчивости базируется на вычислении и анализе комплексных собственных значений связанной системы уравнений. Детально проанализированы зависимости низших частот колебаний и критических нагрузок, при которых система теряет устойчивость, от параметров дефекта и уровня заполнения жидкостью оболочек при различных видах граничных условий.

Ключевые слова: классическая теория оболочек, потенциальная сжимаемая жидкость, метод конечных элементов, осевая нагрузка, гидростатическое давление, собственные колебания, устойчивость.

Цитирование: Бочкарёв С.А., Сенин А.Н. Исследование влияния поверхностных дефектов на частоту колебаний и устойчивость цилиндрической оболочки, содержащей жидкость. Вычислительные технологии. 2024; 29(6):16–34. DOI:10.25743/ICT.2024.29.6.002.

Введение

Машиностроительные конструкции в процессе промышленной эксплуатации подвергаются воздействию агрессивной среды [1–3]. При поверхностном контакте с некоторым жидким или газообразным окружением, имеющим естественную либо технологическую природу, в результате физико-химических или электрохимических реакций постепенно изменяются микроструктура и химический состав материала. При длительном взаимодействии происходит необратимая деградация как физико-механических свойств, так и геометрических параметров элементов конструкции. В результате такие ответственные сооружения, как резервуары, содержащие жидкость или погруженные в нее, трубопроводы, транспортирующие жидкую или газообразную среду, под действием рабочих нагрузок теряют несущую способность, что может приводить к их преждевременному

разрушению. Практический интерес представляет изучение влияния внешних сил, которые, с одной стороны, наряду с агрессивной средой способствуют протеканию коррозионных процессов [4], а с другой — усугубляют состояние поврежденных конструкций.

При решении рассматриваемой задачи в полной постановке средствами физико-химической механики или неравновесной термодинамики определяется степень воздействия агрессивных сред на свойства материала, после чего проводится оценка надежности конструкции [5–9]. В ряде исследований протекающий во времени коррозионный процесс не рассматривается, а анализируется только статическое или динамическое поведение деформируемых тел, имеющих дефекты (язвы, питтинги, пятна, трещины, вырезы и т. п.), природа происхождения которых, как правило, не уточняется [10–15].

В меньшей степени изучено влияние дефектов для конструкций, взаимодействующих с жидкой/газообразной средой, когда во внимание принимается гидродинамическая нагрузка. Анализ нестационарных коррозионных процессов, проявляющихся в постоянном утончении стенок цилиндрического резервуара, и их влияния на период и форму колебаний выполнен в [16] посредством комплекса ANSYS с использованием трехмерных конечных элементов для несжимаемой жидкости (сырая нефть). Установлено, что значение и месторасположение максимального гидродинамического давления, действующего на смоченной поверхности, определяется длительностью коррозионного процесса. Аналогичная конечно-элементная схема использована в [17] при изучении потери устойчивости корродирующих резервуаров, толщина стенок которых меняется со временем в случае горизонтального сейсмического возбуждения. Показано, что критическое пиковое ускорение грунта значительно снижается при коррозионном утончении стенок резервуара. Исследование гидроупругой устойчивости несовершенных цилиндрических труб, моделируемых в рамках линейной теории упругости и взаимодействующих с внутренним потоком потенциальной сжимаемой жидкости, проведено в [18] на основе полуаналитического варианта метода конечных элементов (МКЭ). Продемонстрировано, что существование зон, при расположении в которых поверхностного дефекта происходит более существенное снижение критических скоростей течения жидкости. Конечно-элементный анализ корродирующей трубы, описываемой в рамках балочной теории Эйлера – Бернулли, представлен в [19]. Изучено влияние объемных и точечных дефектов на нелинейные колебания, обусловленные вихревым воздействием потока жидкости, моделирование которого осуществляется в рамках эмпирических соотношений.

В настоящей работе в рамках полуаналитического варианта МКЭ исследуется устойчивость содержащей жидкость цилиндрической оболочки, имеющей кольцевой дефект. В [20] отмечается, что распространение коррозионного изъема в окружном направлении более опасно по сравнению с продольным направлением. Изучение того, насколько значительно размеры поврежденной зоны и ее местоположение влияют на частотный спектр и критические параметры потери устойчивости нагруженной статическими силами конструкции, является целью работы.

1. Постановка задачи

Рассматривается вертикально ориентированная цилиндрическая оболочка кругового сечения длиной L_s , радиусом R и толщиной h_s , занимающая объем V_s (рис. 1). Внутренняя полость оболочки на высоту H заполнена неподвижной идеальной сжимаемой жидкостью объемом V_f . В случае частичного заполнения гравитационные эффекты на свободной поверхности жидкости Γ не учитываются. Однако принимаются во вни-

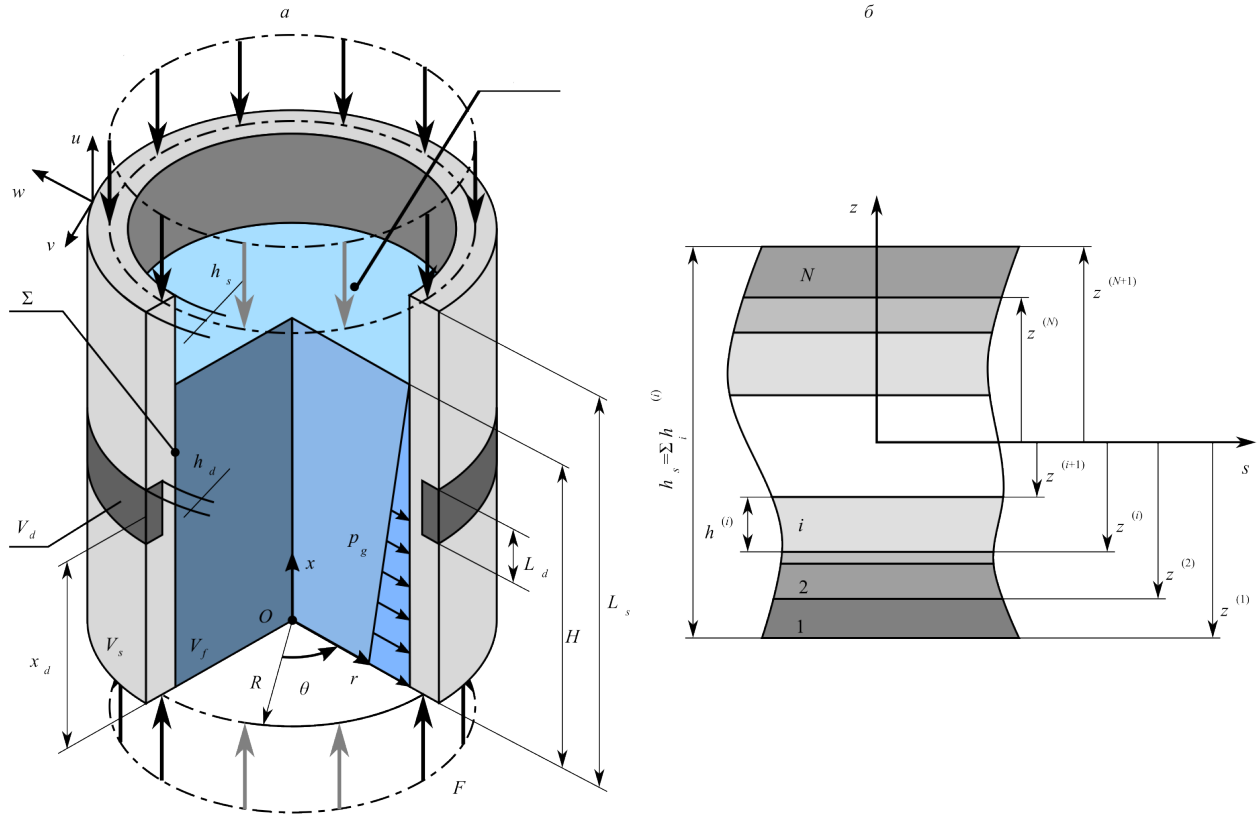


Рис. 1. Схема расчетной области с дефектом на внешней поверхности оболочки (а) и поперечное сечение слоистой конструкции (б)

Fig. 1. Schematic diagram of the computational domain with a defect on the outer surface of the shell (а) and cross-section of the laminated structure (б)

мание изменения напряженно-недеформированного состояния тела, обусловленные воздействием инициированных гравитацией гидростатических сил p_g , действующих на смоченной поверхности. На внутренней или внешней поверхности оболочки на расстоянии x_d от ее нижнего края расположен кольцевой дефект прямоугольного сечения, имеющий длину L_d и глубину h_d . Дефект в подобласти V_d имеет физико-механические свойства материала, отличающиеся от параметров основного тела. В осевом направлении с обоих краев на оболочку действует сжимающее усилие F . Необходимо проанализировать влияние параметров дефекта на минимальные частоты колебаний и границы устойчивости оболочки при различных уровнях ее заполнения жидкостью и разных комбинациях граничных условий, задаваемых на краях тонкостенной конструкции.

2. Основные соотношения и метод решения

Поведение идеальной сжимаемой жидкости описывается в рамках потенциальной теории, волновое уравнение которой для потенциала скорости ϕ имеет вид [21]

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{c_f^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}, \quad (1)$$

где c_f — скорость звука в жидкости. На границе гидроупругого взаимодействия Σ принимается условие непроницаемости. Предполагается, что на свободной поверхнос-

ти жидкости Γ , образующейся в результате частичного заполнения внутренней полости, отсутствуют динамическое давление, поверхностное натяжение и волнообразование, обусловленное воздействием гравитационных сил. Соответствующие выражения для граничных условий записываются следующим образом:

$$\Sigma: \quad \frac{\partial \phi}{\partial n} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \cdot \mathbf{n}, \quad \Gamma: \quad \phi = 0; \quad x = 0: \quad \frac{\partial \phi}{\partial n} = 0, \quad (2)$$

где \mathbf{u} — вектор перемещений оболочки, \mathbf{n} — вектор единичной внешней нормали к смоченной поверхности. Условие при $x = 0$ характеризует взаимодействие жидкости с недеформируемой поверхностью.

Гидродинамическое давление p , действующее на поверхности раздела упругого тела с жидкостью, вычисляется по линеаризованной формуле Бернулли

$$p = -\rho_f \frac{\partial \phi}{\partial t}, \quad (3)$$

а гидростатическое давление жидкости p_g определяется как

$$p_g = \rho_f g(H - x).$$

Здесь ρ_f — плотность жидкости, g — ускорение свободного падения.

Волновое уравнение (1) совместно с граничными условиями (2) преобразуется к слабой форме с помощью метода Бубнова – Галёркина [22]:

$$\int_{V_f} \nabla Z_n \cdot \nabla \hat{\phi} dV + \int_{V_f} Z_n \frac{1}{c_f^2} \frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial t^2} dV - \int_{\Sigma} Z_n \frac{\partial \hat{\mathbf{u}}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} dS = 0, \quad n = \overline{1, m_f}, \quad (4)$$

где $\hat{\phi}$ и $\hat{\mathbf{u}}$ — аппроксимации потенциала скорости и вектора перемещений упругого тела, Z_n и m_f — базисные функции и их количество.

Выражения для деформаций упругой конструкции в криволинейной системе координат (s, θ, z) определяются с помощью соотношений нелинейной теории тонких оболочек, основанных на гипотезах Кирхгофа – Лява [23, 24]:

$$\begin{aligned} E_{11} &= \varepsilon_{11} + z\kappa_{11}, \quad E_{22} = \varepsilon_{22} + z\kappa_{22}, \quad E_{12} = \varepsilon_{12} + z\kappa_{12}, \\ \boldsymbol{\varepsilon} &= \{\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{12}, \kappa_{11}, \kappa_{22}, \kappa_{12}\}^T = \boldsymbol{\varepsilon}_* + \frac{1}{2}E\mathbf{e}, \\ \boldsymbol{\varepsilon}_* &= \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \gamma_{12}, \kappa_1, \kappa_2, 2\tau\}^T, \quad \mathbf{e} = \{0, 0, 0, 0, \theta_1, \theta_2, 0, 0, 0\}^T, \\ \varepsilon_1 &= \frac{\partial u}{\partial s}, \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + w \right), \quad \gamma_{12} = \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \theta}, \quad \tau = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial v}{\partial s} - \frac{\partial^2 w}{\partial s \partial \theta} \right), \\ \kappa_1 &= -\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}, \quad \kappa_2 = \frac{1}{R^2} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right), \quad \theta_1 = -\frac{\partial w}{\partial s}, \quad \theta_2 = \frac{1}{R} \left(v - \frac{\partial w}{\partial \theta} \right). \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь u , v и w — осевая, окружная и нормальная компоненты вектора перемещений оболочки $\mathbf{u} = \{u, v, w\}^T$; E — матрица линейных множителей, которая имеет ненулевые компоненты $E_{15} = \theta_1$, $E_{26} = \theta_2$, $E_{35} = \theta_2$, $E_{36} = \theta_1$.

Физические соотношения, устанавливающие связь между вектором усилий и моментов \mathbf{T} и вектором обобщенных деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}$, в матричном виде записываются как

$$\mathbf{T} = \{T_{11}, T_{22}, T_{12}, M_{11}, M_{22}, M_{12}\}^T = D(x)\boldsymbol{\varepsilon},$$

где D — матрица жесткостей, компоненты которой в случае многослойного изотропного материала, состоящего из N слоев (рис. 1, б), определяются как

$$D(x) = \begin{bmatrix} D_0 & D_1 \\ D_1 & D_2 \end{bmatrix}, \quad \{D_0, D_1, D_2\} = \sum_{k=1}^N \int_{(h(x))^{(k)}} Q^{(k)} \{1, z, z^2\} dz,$$

$$Q^{(k)} = \begin{bmatrix} Q_{11}^{(k)} & Q_{12}^{(k)} & 0 \\ Q_{21}^{(k)} & Q_{22}^{(k)} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66}^{(k)} \end{bmatrix},$$

$$Q_{11}^{(k)} = Q_{22}^{(k)} = \frac{E_s^{(k)}}{1 - (\nu_s^{(k)})^2}, \quad Q_{12}^{(k)} = Q_{21}^{(k)} = \frac{\nu_s^{(k)} E_s^{(k)}}{1 - (\nu_s^{(k)})^2}, \quad Q_{66}^{(k)} = \frac{E_s^{(k)}}{2(1 + \nu_s^{(k)})},$$

где $E_s^{(k)}$ и $\nu_s^{(k)}$ — модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала k -го слоя оболочки или дефекта ($E_d^{(k)}, \nu_d^{(k)}$).

Математическая постановка задачи динамики упругого тела основана на вариационном принципе возможных перемещений, учитывающем предварительное напряженное недеформированное состояние [25], работу сил инерции, а также гидродинамическое давление (3), действующие на смоченной поверхности Σ . В матричной форме он может быть записан следующим образом:

$$\int_{S_s} \delta(\epsilon_*)^T D \epsilon_* dS + \int_{S_s} \delta(e)^T \sigma_0 e dS + \int_{S_s} \delta(u)^T J \ddot{u} dS - \int_{\Sigma} \delta(u)^T P dS = 0. \quad (6)$$

Здесь $P = \{0, 0, p\}^T$ — вектор поверхностных нагрузок; J — матрица инерции, которая определяется согласно выражению

$$J = \text{diag}(J_0, J_0, J_0), \quad J_0 = \sum_{k=1}^N \int_{(h(x))^{(k)}} (\rho_s(x))^{(k)} dz,$$

где ρ_s — плотность материала тонкостенного тела или дефекта (ρ_d). Элементы матрицы σ_0 в соотношении (6) находятся из условия

$$E^T D \bar{\epsilon}_0 = \sigma_0 e.$$

Здесь вектор $\bar{\epsilon}_0$ является решением соответствующей статической задачи, вариационное уравнение которой имеет вид

$$\int_{S_s} \delta(\epsilon_*)^T D \epsilon_* dS - \int_{\Sigma} \delta(u)^T P_g dS - \int_{l_1} \delta(u)^T P_e dl - \int_{l_2} \delta(u)^T (-P_e) dl = 0,$$

$$P_g = \{0, 0, p_g\}^T, \quad P_e = \left\{ \frac{F}{2\pi R}, 0, 0 \right\}^T,$$

где l_1 и l_2 — линии, ограничивающие торцы поверхности оболочки при $x = 0$ и $x = L_s$ соответственно.

Численное решение задачи осуществляется с помощью полуаналитического варианта МКЭ, согласно которому искомые неизвестные раскладываются в ряд Фурье по

окружной координате θ [26]. В результате этих преобразований исходная задача сводится к совокупности двумерных задач для каждой окружной гармоники j .

В общем случае компоненты вектора перемещений и потенциал скорости в каждом конечном элементе определяются через узловые неизвестные:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \phi \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N & 0 \\ 0 & Z \end{bmatrix} \mathbf{X}, \quad \mathbf{X} = \{\mathbf{u}_1^T, \dots, \mathbf{u}_q^T, \phi_1, \dots, \phi_q\}^T,$$

где \mathbf{X} — вектор узловых неизвестных; N и Z — матрицы функций формы, которые формируются соответствующим образом для каждого типа конечного элемента при построении конечномерного аналога; q — количество узлов в элементе. Для разбиения оболочки используется конечный элемент в виде усеченного конуса с аппроксимацией меридиональной и окружной компонент вектора перемещений линейным полиномом, а нормальной компоненты — кубическим. Дискретизация объема жидкости проводится с помощью четырехугольного конечного элемента с билинейной аппроксимацией потенциала скорости. Стандартные процедуры МКЭ позволяют из соотношений (4) и (6) получить связанную систему уравнений для описания гидроупругого взаимодействия нагруженного тонкостенного тела с жидкой средой

$$M\ddot{\mathbf{X}} + C\dot{\mathbf{X}} + K\mathbf{X} = 0, \quad (7)$$

где

$$M = \begin{bmatrix} M_s & 0 \\ 0 & M_f \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & C_{sf} \\ C_{fs} & 0 \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} K_s + K^g & 0 \\ 0 & K_f \end{bmatrix}.$$

Типовые матрицы масс M , демпфирования C , жесткости K и геометрической жесткости K^g для каждого конечного элемента формируются следующим образом:

$$M_s = \int_{S_s} N^T J N dS, \quad M_f = \int_{V_f} \frac{1}{c_f^2} Z^T Z dV, \quad C_{sf} = \int_{\Sigma} \rho_f \bar{N}^T Z dS, \quad C_{fs} = - \int_{\Sigma} Z^T \bar{N} dS, \\ K_s = \int_{S_s} B^T D B dS, \quad K^g = \int_{S_s} G^T \sigma_0 G dS, \quad K_f = \int_{V_f} (\nabla Z)^T \nabla Z dV.$$

Здесь \bar{N} — матрица функций формы для нормальной составляющей вектора узловых перемещений оболочки; B и G — матрицы связи деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}_*$ и \mathbf{e} с узловыми перемещениями, определяемые в соответствии с (5).

Вводя обозначение $\mathbf{Y} = \dot{\mathbf{X}}$, перепишем уравнение (7) в следующем виде:

$$\begin{bmatrix} C & K \\ -I & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{Y} \\ \mathbf{X} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{Y}} \\ \dot{\mathbf{X}} \end{Bmatrix} = 0, \quad (8)$$

где I — единичная матрица.

Решение системы (8) ищется в экспоненциальной форме

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{Y}(x, \theta, r, t) \\ \mathbf{X}(x, \theta, r, t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{Y}}(x, \theta, r) \\ \tilde{\mathbf{X}}(x, \theta, r) \end{Bmatrix} e^{\lambda t}, \quad \lambda = \gamma + i\omega, \quad i = \sqrt{-1}, \quad (9)$$

где $\tilde{\mathbf{X}}$ и $\tilde{\mathbf{Y}}$ — некоторые функции координат; λ — характеристический показатель; ω — собственная частота колебаний; γ — величина, характеризующая демпфирование системы.

С учетом представления (9) система уравнений (8) сводится к обобщенной задаче на собственные значения

$$\left(\begin{bmatrix} C & K \\ -I & 0 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{Y}} \\ \tilde{\mathbf{X}} \end{Bmatrix} = 0. \quad (10)$$

Вычисление комплексных собственных значений λ системы (10) осуществляется посредством алгоритма, основанного на неявно перезапускаемом методе Арнольди [27]. Оценка устойчивости гидроупругой структуры базируется на анализе характеристических показателей λ , получаемых при последовательно возрастающем значении внешней нагрузки F . Численная реализация описанного алгоритма произведена в среде MATLAB. Для создания конечно-элементной сетки используются возможности пакета ANSYS.

3. Численные результаты

Расчеты выполнялись для различных вариантов граничных условий, задаваемых на краях упругой конструкции, при указании которых используются следующие обозначения: F — свободный край, S — свободное опирание ($v = w = 0$), C — жесткая заделка ($u = v = w = \partial w / \partial n = 0$).

Для представления результатов вычислений вводятся безразмерные величины

$$\eta = \frac{H}{L_s}, \quad \alpha = \frac{L_d}{L_s}, \quad \beta = \frac{h_d}{h_s}, \quad \xi = \frac{x_d}{L_s}, \quad \Omega(\eta) = \frac{\omega(\eta)}{\omega_0(\eta)} - 1, \quad \Phi = \frac{F_c}{F_c^0} - 1,$$

обозначающие уровень заполнения η , а также длину α , глубину β и положение области дефекта в осевом направлении ξ , отсчитываемое от нижнего края оболочки ($x = 0$). Ω и Φ характеризуют изменения собственной частоты колебаний ω и величины критической нагрузки F_c , при которой происходит потеря устойчивости, относительно значений ω_0 и F_c^0 , соответствующих идеальной оболочке ($E_d/E_s = 1$). При вычислении Ω уровни заполнения η для конфигураций с отсутствием и наличием дефекта совпадают.

В численных экспериментах, если не указано иное, использовались следующие геометрические и физико-механические параметры: $L_s = 0.231$ м, $R = 0.07725$ м, $h_s = 0.0015$ м, $E_s = 205$ ГПа, $E_d/E_s = 0.5$, $\nu_s = \nu_d = 0.3$, $\rho_s = \rho_d = 7800$ кг/м³, $\xi = 0.5$, $\alpha = 0.1$, $\beta = 0.1$, $\eta = 1$, $c_f = 1500$ м/с, $\rho_f = 1000$ кг/м³.

3.1. Верификация алгоритма

Для оценки достоверности результатов, полученных с использованием описанного выше алгоритма, приведем примеры.

Пример 1. Рассмотрена свободно опертая с обоих краев оболочка ($E_s = 200$ ГПа, $p_g = 0$). На рис. 2 представлены графики изменения низших собственных частот колебаний от величины сжимающего усилия при различных уровнях заполнения η в сравнении с результатами работы [28]. По мере увеличения усилия частота становится равной нулю, что соответствует статической потере устойчивости (дивергенции). Из представленных данных следует, что полученные зависимости хорошо согласуются с известными результатами, а незначительные отличия могут быть объяснены как разными подходами к описанию тонкостенного тела, так и особенностями численной реализации.

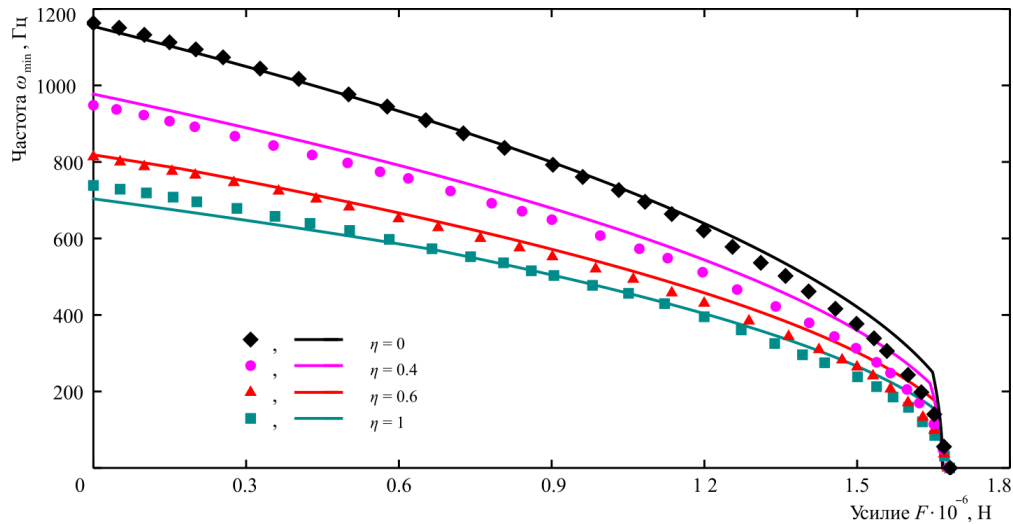


Рис. 2. Зависимость собственных частот колебаний ω свободно опертой цилиндрической оболочки (SS) от величины осевого усилия F при различных уровнях заполнения η . Линии — расчет, символы — результаты работы [28]

Fig. 2. Dependence of natural vibration frequencies ω of a simply supported cylindrical shell (SS) on the value of axial force F at different filling levels η . Lines — calculation, symbols — results of work [28]

Сравнение низших частот колебаний ω жестко заземленной с обоих торцов оболочки (CC) с дефектом и без него, Гц

Comparison of the lowest frequencies of vibrations ω for shell (CC) rigidly clamped at both ends with and without a defect, Hz

ξ	Дефект на внешней поверхности				Дефект на внутренней поверхности			
	$\eta = 0$		$\eta = 1$		$\eta = 0$		$\eta = 1$	
	Расчет	[18]	Расчет	[18]	Расчет	[18]	Расчет	[18]
—	1541.17	1540.25	972.135	977.128	1541.17	1540.25	972.135	977.128
0.05	1534.62	1533.60	967.973	972.873	1535.29	1534.32	968.365	973.304
0.10	1538.10	1536.87	970.195	974.968	1534.13	1532.93	967.658	972.436
0.15	1538.69	1537.73	970.551	975.502	1535.01	1534.02	968.248	973.169
0.20	1538.47	1537.59	970.398	975.409	1535.34	1534.43	968.477	973.455
0.25	1537.07	1536.21	969.513	974.524	1535.07	1534.17	968.325	973.307
0.30	1534.99	1534.14	968.202	973.212	1534.61	1533.73	968.047	973.038
0.35	1532.70	1531.86	966.763	971.772	1534.08	1533.22	967.720	972.724
0.40	1530.66	1529.83	965.487	970.495	1533.59	1532.75	967.419	972.433
0.45	1529.26	1528.44	964.615	969.622	1533.25	1532.42	967.209	972.230
0.50	1528.77	1527.95	964.308	969.315	1533.13	1532.30	967.134	972.158

Пример 2. Рассмотрена жестко заземленная с обоих торцов цилиндрическая оболочка (CC), содержащая неоднородность в виде поверхностного кольцевого дефекта. В таблице приведены низшие собственные частоты колебаний, полученные при различном расположении дефекта по длине пустой ($\eta = 0$) и полностью заполненной жидкостью ($\eta = 1$) оболочки. Здесь же представлены значения, полученные в рамках алгоритма, описанного в работе [18]. Задача решалась также с помощью полуаналитического варианта метода конечных элементов, но с тем отличием, что тонкостенное тело и дефект рассматриваются с точки зрения линейной теории упругости. В этом случае для

качественного описания дефекта требуется значительное количество конечных элементов по толщине тела. Для пустой и полностью заполненной жидкостью оболочки максимальное различие в результатах, полученных для двух реализаций, не превышает 0.09 и 0.6 % соответственно. Дискретизация области упругого тела, обеспечивающая приемлемую сходимость, составляла 164 и 2073 неизвестных для решений в рамках теории оболочек и линейной теории упругости. Таким образом, можно заключить, что использование осреднения характеристик по толщине в рамках какой-либо теории оболочек позволяет более эффективно моделировать тела с несовершенствами, обеспечивая при этом подходящую точность вычислений.

3.2. Анализ собственных колебаний оболочки с дефектом

На рис. 3, а приведены зависимости низших собственных частот ω_{\min} от уровня заполнения η внутренней полости бездефектной ($\alpha = 0, \beta = 0$) оболочки, полученные при различных вариантах граничных условий, заданных на краях оболочки. Для обеих конфигураций с повышением уровня заполнения и, следовательно, ростом присоединенной массы жидкости имеет место снижение низшей частоты колебаний. При этом происходит изменение жесткости конструкции в осевом и окружном направлениях, благодаря чему также возможно изменение номера окружной гармоники, на которой фундаментальная частота минимальная. Эта особенность в большей степени зависит от геометрических параметров оболочки и физико-механических свойств материала [29, 30]. Для рассматриваемых конфигураций при любом уровне жидкости такое изменение отсутствует, и в случае жесткого закрепления (СС) минимальная частота всегда соответствует четвертой гармонике, а в случае консольного (CF) — третьей.

На рис. 4–6 представлены изоповерхности относительного изменения собственной частоты колебаний Ω , полученные для жестко закрепленных (СС — рис. 4 и 5) и консольных (CF — рис. 6) оболочек, на внешней или внутренней поверхностях которых имеется кольцевой дефект. Приведенные здесь данные наглядно демонстрируют по-

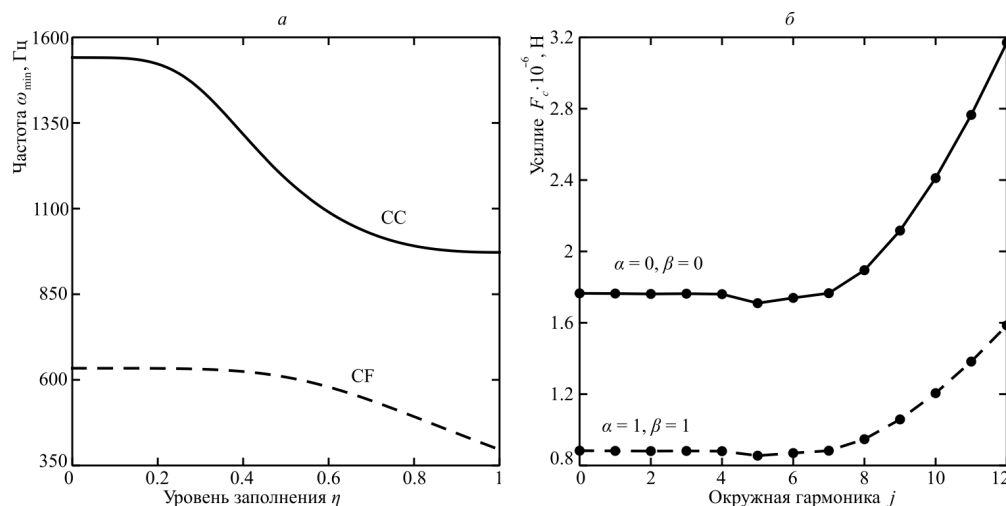


Рис. 3. Зависимости низшей частоты колебаний ω_{\min} идеальной конструкции от уровня заполнения η (а) и критического усилия F_c свободно опертой идеальной/неидеальной оболочки (SS) от номера окружной гармоники j (б)

Fig. 3. Dependences of the lowest frequency of vibration ω_{\min} of an ideal structure on the filling level η (а) and the critical force F_c of a simply supported ideal/non-ideal shell (SS) on the number of the circumferential harmonic j (б)

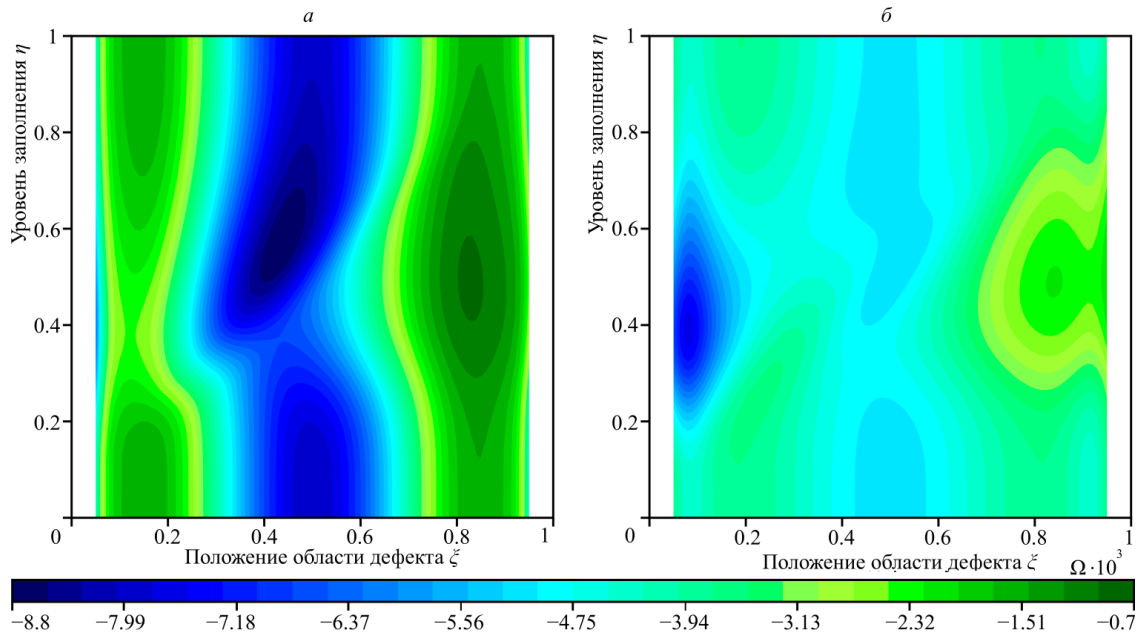


Рис. 4. Изоповерхности относительного изменения низших частот колебаний Ω_{\min} как функции местоположения ξ и уровня заполнения η , полученные для жестко закрепленной оболочки (CC) в случае размещения области дефекта на внешней (а) или внутренней (б) поверхности
 Fig. 4. Isosurfaces of the relative variation of the lowest vibration frequencies Ω_{\min} as a function of location ξ and filling level η for a rigidly clamped shell (CC) in the case when the defect zone is located on the outer (a) or inner (б) surface

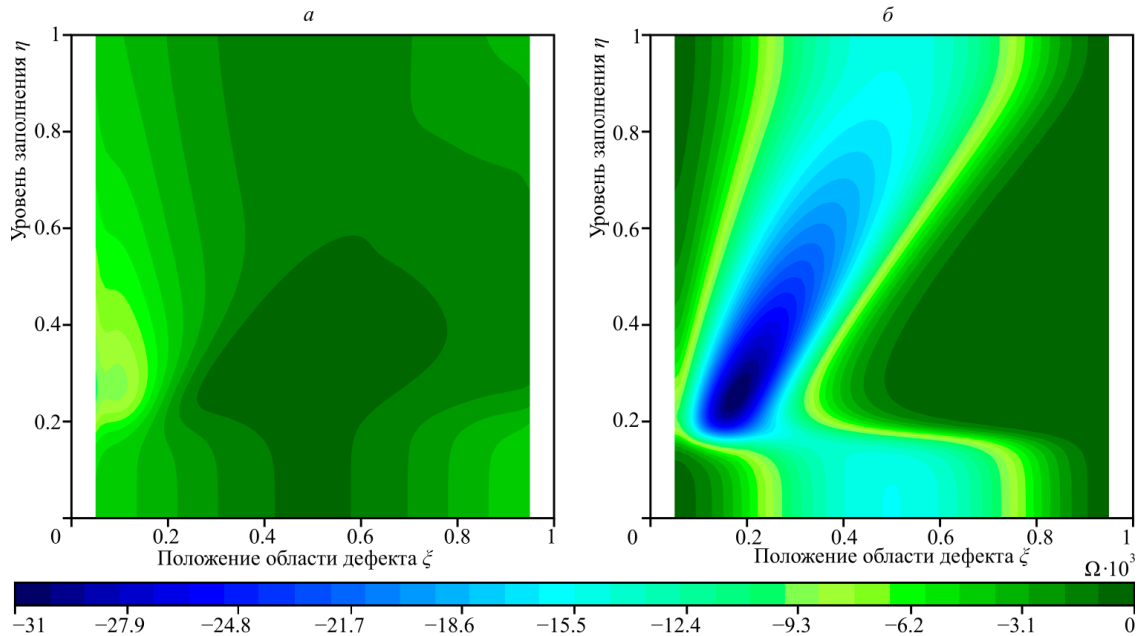


Рис. 5. Изоповерхности относительного изменения частот колебаний Ω_1 (а) и Ω_9 (б) как функции местоположения ξ и уровня заполнения η , полученные для жестко закрепленной оболочки (CC) в случае размещения области дефекта на внешней поверхности
 Fig. 5. Isosurfaces of the relative variation of vibration frequencies Ω_1 (a) and Ω_9 (б) as a function of location ξ and filling level η for a rigidly clamped shell (CC) in the case when the defect zone is located on the outer surface

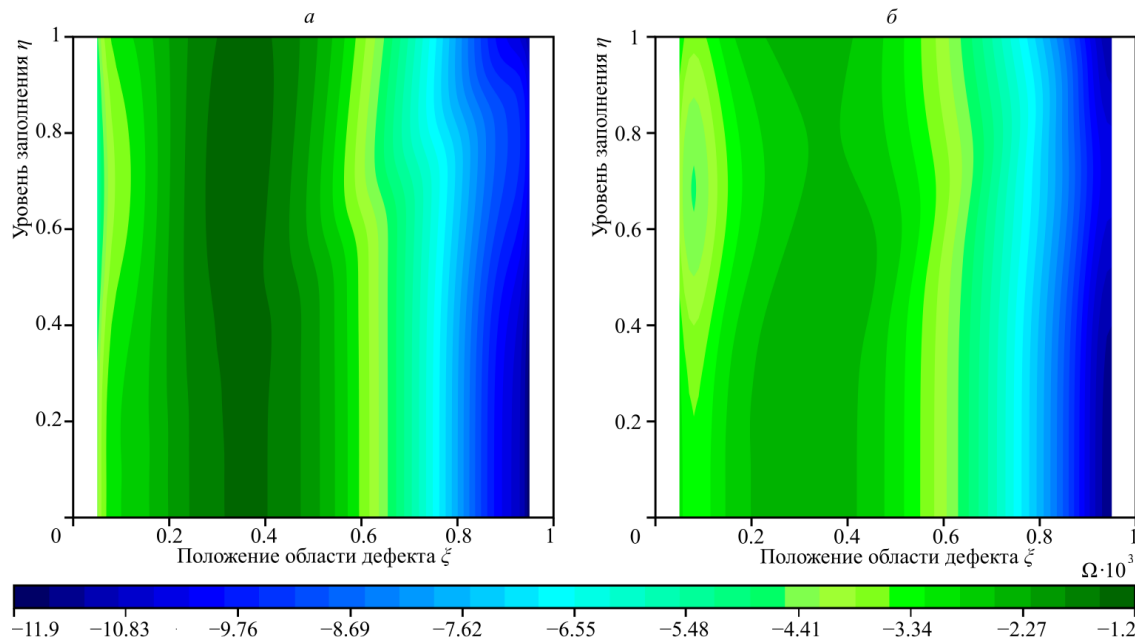


Рис. 6. Изоповерхности относительного изменения низших частот колебаний Ω_{\min} как функции местоположения ξ и уровня заполнения η , полученные для консольно закрепленной оболочки (CF) в случае размещения области дефекта на внешней (а) или внутренней (б) поверхности

ведение фундаментальной частоты в зависимости от расположения изъяна вдоль оси вращения оболочки ξ при различных значениях уровня ее заполнения η .

При жесткой заделке (СС) независимо от уровня заполнения снижение низшей частоты происходит по мере приближения области дефекта к центральной части оболочки (см. рис. 4) и носит ярко выраженный локальный характер. Другой локальный минимум наблюдается при частичном заполнении вблизи нижнего края тонкостенного тела. Отметим, что нижняя зона резервуара, контактирующая с остаточной жидкостью, наиболее сильно подвержена коррозионному воздействию [16]. Для таких конфигураций наличие дефекта не приводит к изменению окружной гармоника, которой соответствует низшая частота ($j = 4$, $\Omega_{\min} = \Omega_4$).

В качестве примера эволюции низших частот, отвечающих другим гармоникам, на рис. 5 приведены изоповерхности, построенные для окружных мод $j = 1$ и $j = 9$. В одном случае для всех уровней заполнения снижение частоты имеет место при приближении области дефекта к краям упругой конструкции, тогда как в другом локальный экстремум достигается при смещении изъяна к нижнему краю оболочки при незначительном уровне жидкости.

В случае консольного закрепления (CF) влияние области дефекта на падение частоты усиливается по мере ее приближения к свободному краю (см. рис. 6). При этом снижение жесткости несовершенной оболочки более значительное. С другой стороны, эта зона резервуара в меньшей степени взаимодействует с жидкостью и может подвергаться коррозии из-за водяного конденсата, атмосферного кислорода или повышенной кислотности среды [16]. Более того, как можно увидеть из данных, представленных на рис. 6, уровень жидкости в резервуаре практически не оказывает влияния на степень

деградации низшей частоты колебаний, которая для несовершенной конструкции все так же соответствует третьей окружной гармонике ($j = 3$).

Дефектные области на внешней или внутренней поверхности оболочки приводят к качественно схожим результатам, однако в целом наибольшее падение частот имеет место при расположении дефекта снаружи, что обосновывает необходимость применения антикоррозионных мер, обеспечивающих защиту от атмосферных воздействий. При этом присутствуют такие зоны, где при одинаковых значениях параметров ξ и η дефект на внутренней поверхности оболочки инициирует большее снижение фундаментальной частоты.

3.3. Анализ устойчивости оболочки с дефектом

На рис. 3, б приведены зависимости критического сжимающего усилия F_c от номера окружной гармоники j , полученные для свободно опертой на краях оболочки (SS), внутренняя или внешняя поверхность которой идеальна ($\alpha = 0, \beta = 0$) или содержит дефект ($\alpha = 1, \beta = 1$). Оболочка с указанными граничными условиями и видом нагружения может рассматриваться как часть цилиндрического бака с множественными отсеками [31]. Для рассмотренных конфигураций потеря устойчивости происходит по пятой окружной гармонике ($j = 5$) как в отсутствие, так и при наличии дефекта. В зависимости от размеров области дефекта и его местоположения данное значение может изменяться.

На рис. 7 для свободно опертой оболочки (SS), полностью заполненной жидкостью ($\eta = 1$), представлена изоповерхность относительного изменения критического усилия Φ как функции длины α и глубины β дефектной области, расположенной на внеш-

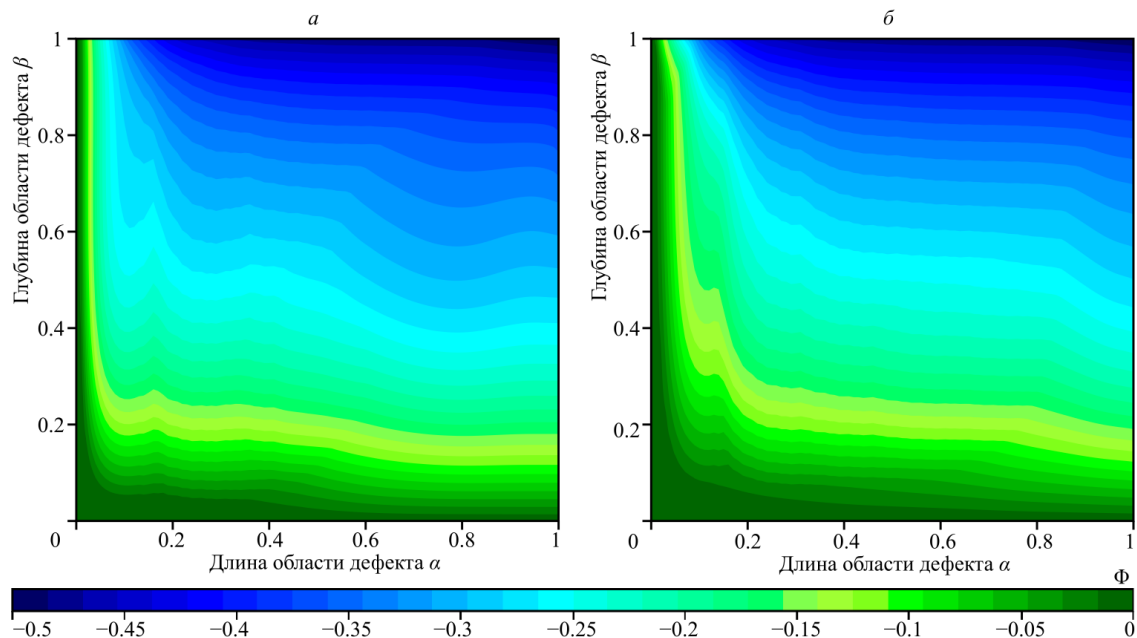


Рис. 7. Изоповерхности относительного изменения критического усилия Φ как функции длины α и глубины β , полученные для свободно опертой оболочки (SS) в случае размещения области дефекта ($\xi = 0.5$) на внешней (а) или внутренней (б) поверхности

Fig. 7. Isosurfaces of the relative change of the critical force Φ as a function of length α and depth β for a simply supported shell (SS) when the defect zone ($\xi = 0.5$) is located on the outer (a) or inner (b) surface

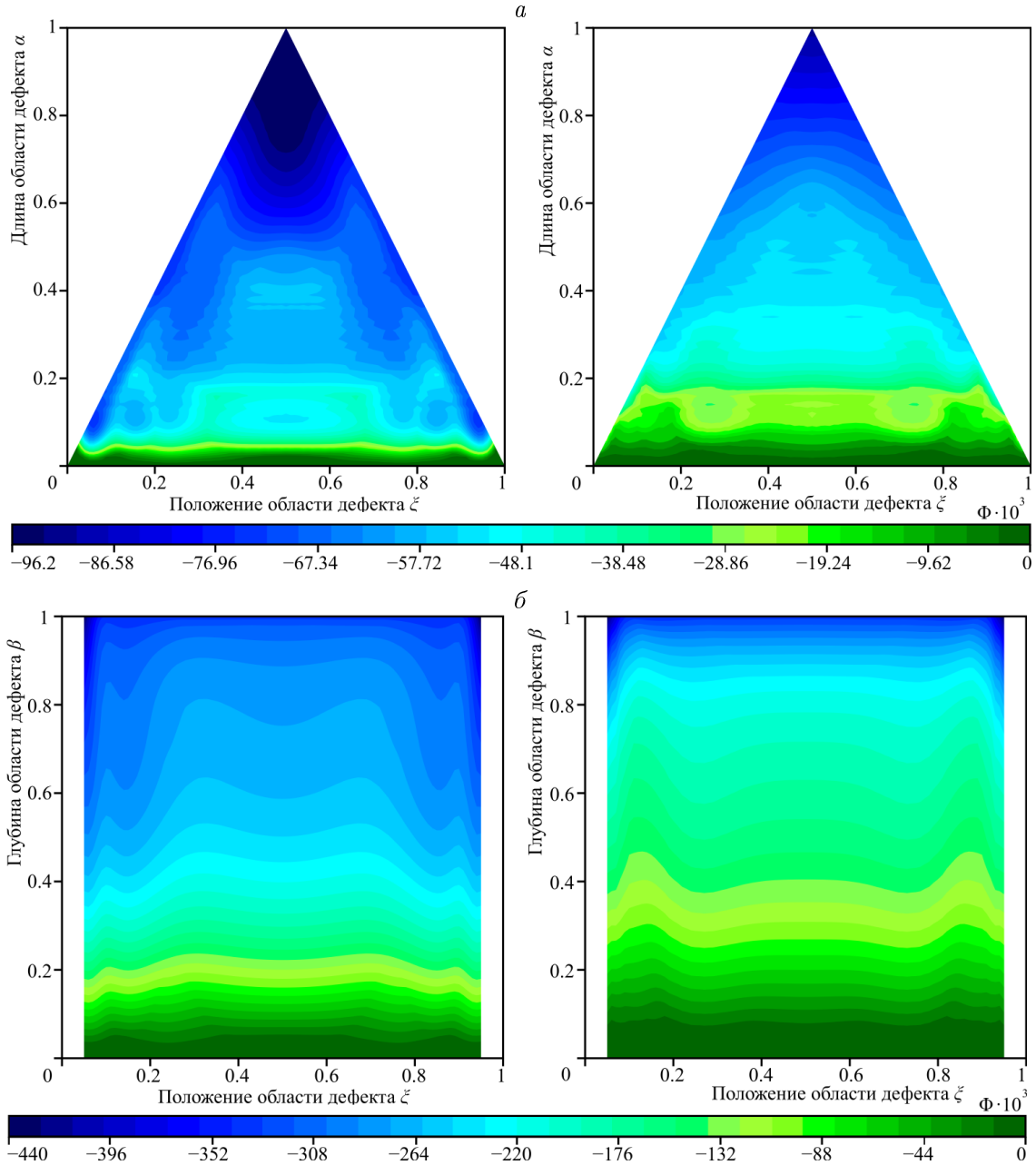


Рис. 8. Изоповерхности относительного изменения критического усилия Φ как функции местоположения ξ и длины α (а) и глубины β (б), полученные для свободно опертой оболочки (SS, $\eta = 1$) в случае размещения области дефекта на внешней (слева) или внутренней (справа) поверхности

Fig. 8. Isosurfaces of the relative change in the critical force Φ as a function of location ξ and length α (a) and depth β (б) for a simply supported shell (SS, $\eta = 1$) when the defect zone is located on the outer (left) or inner (right) surface

ней (рис. 7, а) или внутренней (рис. 7, б) поверхности. Отсюда следует, что наличие на поверхности оболочки области с пониженными характеристиками приводит к уменьшению нагрузки, при которой происходит потеря устойчивости, а степень этого снижения определяется размерами несовершенства. Очевидно, что наибольшее падение критического усилия достигается, когда область дефекта распространяется на весь объем упругого тела. Из двух варьируемых параметров изъясна изменение глубины оказы-

вает большее воздействие на предельные значения. Как и в случае с собственными частотами колебаний, выбор расположения области дефекта на внешней или внутренней поверхности оболочки не оказывает качественного влияния на полученные зависимости. Однако дефект на наружной поверхности приводит к более быстрому снижению критической нагрузки. Немонотонный характер линий равного уровня говорит о смене окружной гармонике, которой отвечает минимальное критическое осевое усилие. В частности, при $\alpha \in [0, 0.2]$ наблюдается область незначительного роста критического усилия Φ с увеличением длины α .

На рис. 8 для аналогичной конфигурации показаны изоповерхности относительного изменения критического усилия Φ , полученные при варьировании положения области дефекта по длине оболочки и одного из параметров, определяющего ее размер: длины (рис. 8, а) или глубины (рис. 8, б). Из представленных зависимостей можно сделать вывод о том, что внешняя поверхность расположения области дефекта более чувствительна к изменению варьируемых параметров, так как в этом случае происходит более резкое снижение зависимых величин от геометрических размеров области дефекта. Симметричность результатов относительно положения $\xi = 0.5$ обусловлена симметрией граничных условий и условий нагружения. По мере увеличения геометрических параметров дефекта (α или β) происходит немонотонное снижение величины критической нагрузки относительно расположения области неоднородности. При изменении длины наибольшее падение наблюдается вдоль центрального расположения дефекта. При варьировании глубины критическая нагрузка снижается только до определенного значения β , после чего зона наибольшего падения усилия наблюдается при расположении дефекта вблизи краев оболочки.

Заключение

Представлены математическая модель и алгоритм ее численной реализации, предназначенные для исследования собственных колебаний и устойчивости цилиндрической оболочки, на краях которой приложено сжимающее осевое усилие. Внутренняя полость тонкостенного тела полностью или частично заполнена идеальной сжимаемой жидкостью. Принято во внимание изменение в напряженно-недеформированном состоянии смоченной поверхности упругого тела, подвергшейся воздействию гидростатического давления, как функции гравитационных сил. На внутренней или внешней поверхности оболочки учтено наличие кольцевого дефекта с прямоугольным сечением, обладающего собственным набором физико-механических параметров. Детально оценено влияние различных геометрических параметров дефекта (положение, ширина, глубина) на характеристики колебательного процесса и границы устойчивости. Продемонстрировано, что наличие дефекта, происхождение которого может быть связано с коррозионным воздействием, приводит к уменьшению как частоты колебаний, так и критических усилий. Степень этого снижения зависит не только от геометрических размеров области дефекта, ее положения в меридиональном направлении и поверхности расположения, но и от заданной комбинации краевых условий на торцах оболочки. Установлено, что дефект на внешней поверхности приводит к более сильному ухудшению динамических свойств оболочки с жидкостью. На основании выполненных расчетов можно заключить, что защита промышленных конструкций от внешних воздействий должна быть так же обязательна, как и от содержимого, с которым они контактируют.

Благодарности. Работа выполнена в рамках государственного задания; номер государственной регистрационной темы 124020700047-3.

Список литературы

- [1] **Groysman A.** Corrosion for everybody. Dordrecht: Springer; 2010: 377. DOI:10.1007/978-90-481-3477-9.
- [2] **Овчинников И.И., Овчинников И.Г., Занин А.А., Зеленцов Д.Г., Короткая Л.И.** Проблема оптимального проектирования нагруженных конструкций, подвергающихся воздействию агрессивных сред (обзор). Наукоедение. 2012; 4(13):109ТВН412.
- [3] **Локощенко А.М., Фомин Л.В.** Моделирование поведения материалов и элементов конструкций, находящихся под воздействием агрессивных сред (обзор). Проблемы прочности и пластичности. 2018; 80(2):145–179. DOI:10.32326/1814-9146-2018-80-2-145-179.
- [4] **Гутман Э.М.** Механохимия металлов и защита от коррозии. М.: Металлургия; 1981: 271.
- [5] **Gutman E., Haddad J., Bergman R.** Stability of thin-walled high-pressure vessels subjected to uniform corrosion. Thin-Walled Structures. 2000; 38(1):43–52. DOI:10.1016/S0263-8231(00)00024-0.
- [6] **Пронина Ю.Г.** Оценка устойчивости упругой трубы под давлением коррозионных сред. Вестник СПбГУ. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2006; (3):55–63.
- [7] **Bergman R.M., Levitsky S.P., Haddad J., Gutman E.M.** Stability loss of thin-walled cylindrical tubes, subjected to longitudinal compressive forces and external corrosion. Thin-Walled Structures. 2006; 44(7):726–729. DOI:10.1016/j.tws.2006.08.006.
- [8] **Пронина Ю.Г.** Расчет долговечности упругой трубы под действием продольной силы, давления и осесимметричного нагрева в условиях равномерной коррозии. Проблемы прочности и пластичности. 2009; (71):129–135. DOI:10.32326/1814-9146-2009-71-1-129-135.
- [9] **Овчинников И.И., Мавзовин В.С.** Коррозионно-механическое поведение оболочек вращения в силовом и температурном поле. Инженерно-строительный вестник Прикаспия. 2020; 1(31):38–43.
- [10] **Shokrzadeh A.R., Sohrabi M.R.** Buckling of ground based steel tanks subjected to wind and vacuum pressures considering uniform internal and external corrosion. Thin-Walled Structures. 2016; (108):333–350. DOI:10.1016/j.tws.2016.09.007.
- [11] **Błachut J.** Load bearing of corroded shells under external/internal pressure. Journal of Structural Integrity and Maintenance. 2018; 3(4):217–226. DOI:10.1080/24705314.2018.1535752.
- [12] **Wang H., Yu Y., Yu J., Xu W., Chen H., Wang Z., Han M.** Effect of pitting defects on the buckling strength of thick-wall cylinder under axial compression. Construction and Building Materials. 2019; (224):226–241. DOI:10.1016/j.conbuildmat.2019.07.074.
- [13] **Филиппенко Г.В., Зиновьева Т.В.** Модальный анализ трубы, поврежденной водородом, как неоднородной по толщине оболочки. Вестник ПНИПУ. Механика. 2022; (3):170–182. DOI:10.15593/perm.mech/2022.3.17.
- [14] **Filippenko G.V., Zinovieva T.V.** Analysis of axisymmetric vibrations of a hydrogen weakened pipe in a layered shell model. In: Evgrafov A.N. (Ed.) Advances in Mechanical Engineering. Lecture Notes in Mechanical Engineering. Springer, Cham: 2022; 78–85. DOI:10.1007/978-3-030-91553-7_9.
- [15] **Zhu W., Sun D., Xie F., Wu M., Xu Y., Ren S.** Effects of corrosion defect growth on submarine pipeline under operating pressure and axial displacement. Ocean Engineering. 2023; (267):113297. DOI:10.1016/j.oceaneng.2022.113297.

-
- [16] **Dehghan Manshadi S.H., Maheri M.R.** The effects of long-term corrosion on the dynamic characteristics of ground based cylindrical liquid storage tanks. *Thin-Walled Structures*. 2010; 48(12):888–896. DOI:10.1016/j.tws.2010.05.003.
- [17] **Maheri M.R., Abdollahi A.** The effects of long term uniform corrosion on the buckling of ground based steel tanks under seismic loading. *Thin-Walled Structures*. 2013; (62):1–9. DOI:10.1016/j.tws.2012.06.004.
- [18] **Бочкарёв С.А., Лекомцев С.В., Сенин А.Н.** Численное исследование влияния дефектов поверхности на устойчивость цилиндрической трубы с жидкостью. *Вестник Самарского государственного технического университета. Серия Физико-математические науки*. 2018; 22(3):557–573. DOI:10.14498/vsgtu1625.
- [19] **Zhang H., Xu C., Shen X., Jiang J.** Study on the effect of corrosion defects on VIV behavior of marine pipe using a new defective pipe element. *International Journal of Naval Architecture and Ocean Engineering*. 2020; (12):552–568. DOI:10.1016/j.ijnaoe.2020.06.004.
- [20] **Chegeni B., Jayasuriya S., Das S.** Effect of corrosion on thin-walled pipes under combined internal pressure and bending. *Thin-Walled Structures*. 2019; (143):106218. DOI:10.1016/j.tws.2019.106218.
- [21] **Вольмир А.С.** Оболочки в потоке жидкости и газа. Задачи гидроупругости. М.: Наука; 1979: 320.
- [22] **Бочкарёв С.А., Матвеев В.П.** Численное исследование влияния граничных условий на динамику поведения цилиндрической оболочки с протекающей жидкостью. *Известия Российской академии наук. Механика твердого тела*. 2008; (3):189–199.
- [23] **Вольмир А.С.** Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука; 1967: 984.
- [24] **Бочкарёв С.А.** Собственные колебания вращающейся круговой цилиндрической оболочки с жидкостью. *Вычислительная механика сплошных сред*. 2010; 3(2):24–33. DOI:10.7242/1999-6691/2010.3.2.14.
- [25] **Бочкарёв С.А., Матвеев В.П.** Численное моделирование устойчивости нагруженных оболочек вращения при внутреннем течении жидкости. *Прикладная механика и техническая физика*. 2008; 49(2):185–195.
- [26] **Zienkiewicz O.C.** The finite element method in engineering science. N.Y.: McGrawHill; 1971: 521.
- [27] **Lehoucq R.B., Sorensen D.C.** Deflation techniques for an implicitly restarted Arnoldi iteration. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*. 1996; 17(4):789–821. DOI:10.1137/S0895479895281484.
- [28] **Sabri F., Lakis A.A.** Hydroelastic vibration of partially liquid-filled circular cylindrical shells under combined Internal pressure and axial compression. *Aerospace Science and Technology*. 2011; 15(4):237–248. DOI:10.1016/j.ast.2010.07.003.
- [29] **Бочкарёв С.А.** Численное моделирование собственных колебаний покоящейся на упругом основании цилиндрической оболочки, частично заполненной жидкостью. *Вычислительные технологии*. 2022; 27(4):15–32. DOI:10.25743/ICT.2022.27.4.003.
- [30] **Бочкарёв С.А., Лекомцев С.В., Матвеев В.П.** Собственные колебания композитных цилиндрических оболочек, частично заполненных жидкостью. *Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия*. 2023; 10(4):616–631. DOI:10.21638/spbu01.2023.403.
- [31] **Горшков А.Г., Морозов В.И., Пономарев А.Т., Шклярчук Ф.Н.** Аэрогидроупругость конструкций. М.: Физматлит; 2000: 591.
-

 MATHEMATICAL MODELLING

DOI:10.25743/ICT.2024.29.6.002

Investigation of the influence of surface defects on the vibration frequencies and stability of a cylindrical shell that contains fluid

S. A. BOCHKAREV*, A. N. SENIN

Institute of Continuous Media Mechanics of the Ural Branch of RAS, 614068, Perm, Russia

*Corresponding author: Sergey A. Bochkarev, e-mail: bochkarev@icmm.ru*Received December 16, 2023, revised February 28, 2024, accepted March 11, 2024.***Abstract**

The paper presents the results of numerical investigation of vertical circular cylindrical shells with a defect on their outer or inner surface. The inner cavity of the thin-walled shell is completely or partially filled with an ideal compressible fluid. The dynamic behavior of the examined fluid-solid system does not account for the effects of sloshing on the free surface of the fluid. The defect in the form of a ring with rectangular cross-section is modeled using its own set of physical and mechanical parameters. The behavior of the fluid medium and multilayered elastic structure subjected to a combined action of axial forces and hydrostatic pressure is described in the framework of both potential theory and classical shell theory. To determine the hydrodynamic pressure exerted by the fluid on the inner surface of the shell (defect), the Bernoulli equation is used. A mathematical formulation of the dynamic problem for the elastic body is developed using the variational principle of virtual displacements, and the system of equations for the fluid medium is constructed using the Bubnov-Galerkin method. For the numerical implementation of the algorithm, a semi-analytical version of the finite element method is employed. The stability of the system is estimated using the calculation and analysis of complex eigenvalues for the coupled system of equations. The validity of the obtained results is confirmed by comparison with known numerical solutions. The dependences of the lowest vibration frequencies and critical loads, provoking the loss of the system stability are analyzed in detail as functions of the defect parameters and the level of fluid in the shell under different types of boundary conditions.

Keywords: classical shell theory, potential compressible fluid, finite element method, axial load, hydrostatic pressure, natural vibrations, stability.

Citation: Bochkarev S.A., Senin A.N. Investigation of the influence of surface defects on the vibration frequencies and stability of a cylindrical shell that contains fluid. Computational Technologies. 2024; 29(6):16–34. DOI:10.25743/ICT.2024.29.6.002. (In Russ.)

Acknowledgements. The research was carried out within the framework of a state assignment (registration number of theme 124020700047-3).

References

1. **Groysman A.** Corrosion for everybody. Dordrecht: Springer; 2010: 377. DOI:10.1007/978-90-481-3477-9.
2. **Ovchinnikov I.I., Ovchinnikov I.G., Zanin A.A., Zelentsov D.G., Korotkaya L.I.** Problem of optimum design of the loaded constructions which are exposed to influence of aggressive environments (review). Naukovedenie. 2012; 4(13):109TBH412. (In Russ.)
3. **Lokoshchenko A.M., Fomin L.V.** Modeling the behavior of materials and structural elements under the impact of aggressive environments (review). The Problems of Strength and Plasticity. 2018; 80(2):145–179. DOI:10.32326/1814-9146-2018-80-2-145-179. (In Russ.)

4. **Gutman E.M.** Mekhanokhimiya i zashchita metallov ot korrozii [Mechanochemistry and protection of metals against corrosion]. Moscow: Metallurgiya; 1981: 271. (In Russ.)
5. **Gutman E., Haddad J., Bergman R.** Stability of thin-walled high-pressure vessels subjected to uniform corrosion. *Thin-Walled Structures*. 2000; 38(1):43–52. DOI:10.1016/S0263-8231(00)00024-0.
6. **Pronina Yu.G.** Estimation of stability of an elastic tube under the pressure of corrosive environments. *Bulletin of St. Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Management Processes*. 2006; (3):55–63. (In Russ.)
7. **Bergman R.M., Levitsky S.P., Haddad J., Gutman E.M.** Stability loss of thin-walled cylindrical tubes, subjected to longitudinal compressive forces and external corrosion. *Thin-Walled Structures*. 2006; 44(7):726–729. DOI:10.1016/j.tws.2006.08.006.
8. **Pronina Yu.G.** The analysis of the service life of an elastic pipe loaded by a longitudinal force, pressure and axisymmetric heating in the conditions of uniform corrosion. *Problems of Strength and Plasticity*. 2009; (71):129–135. DOI:10.32326/1814-9146-2009-71-1-129-135. (In Russ.)
9. **Ovchinnikov I.I., Mavzovin V.S.** Corrosion-mechanical behavior of the rotation shells in a power and temperature field. *Engineering and Construction Bulletin of the Caspian Region*. 2020; 1(31):38–43. (In Russ.)
10. **Shokrzadeh A.R., Sohrabi M.R.** Buckling of ground based steel tanks subjected to wind and vacuum pressures considering uniform internal and external corrosion. *Thin-Walled Structures*. 2016; (108):333–350. DOI:10.1016/j.tws.2016.09.007.
11. **Blachut J.** Load bearing of corroded shells under external/internal pressure. *Journal of Structural Integrity and Maintenance*. 2018; 3(4):217–226. DOI:10.1080/24705314.2018.1535752.
12. **Wang H., Yu Y., Yu J., Xu W., Chen H., Wang Z., Han M.** Effect of pitting defects on the buckling strength of thick-wall cylinder under axial compression. *Construction and Building Materials*. 2019; (224):226–241. DOI:10.1016/j.conbuildmat.2019.07.074.
13. **Filippenko G.V., Zinovieva T.V.** Modal analysis of a hydrogen-damaged pipe as shell inhomogeneous on thickness. *PNRPU Mechanics Bulletin*. 2022; (3):170–182. DOI:10.15593/perm.mech/2022.3.17. (In Russ.)
14. **Filippenko G.V., Zinovieva T.V.** Analysis of axisymmetric vibrations of a hydrogen weakened pipe in a layered shell model. In: Evgrafov A.N. (Ed.) *Advances in Mechanical Engineering. Lecture Notes in Mechanical Engineering*. Springer, Cham: 2022; 78–85. DOI:10.1007/978-3-030-91553-7_9.
15. **Zhu W., Sun D., Xie F., Wu M., Xu Y., Ren S.** Effects of corrosion defect growth on submarine pipeline under operating pressure and axial displacement. *Ocean Engineering*. 2023; (267):113297. DOI:10.1016/j.oceaneng.2022.113297.
16. **Dehghan Manshadi S.H., Maheri M.R.** The effects of long-term corrosion on the dynamic characteristics of ground based cylindrical liquid storage tanks. *Thin-Walled Structures*. 2010; 48(12):888–896. DOI:10.1016/j.tws.2010.05.003.
17. **Maheri M.R., Abdollahi A.** The effects of long term uniform corrosion on the buckling of ground based steel tanks under seismic loading. *Thin-Walled Structures*. 2013; (62):1–9. DOI:10.1016/j.tws.2012.06.004.
18. **Bochkarev S.A., Lekomtsev S.V., Senin A.N.** Numerical study of the influence of surface defects on the stability of a cylindrical pipe containing fluid. *Journal of Samara State Technical University, Physical and Mathematical Sciences*. 2018; 22(3):557–573. DOI:10.14498/vsgtu1625. (In Russ.)
19. **Zhang H., Xu C., Shen X., Jiang J.** Study on the effect of corrosion defects on VIV behavior of marine pipe using a new defective pipe element. *International Journal of Naval Architecture and Ocean Engineering*. 2020; (12):552–568. DOI:10.1016/j.ijnaoe.2020.06.004.
20. **Chegeni B., Jayasuriya S., Das S.** Effect of corrosion on thin-walled pipes under combined internal pressure and bending. *Thin-Walled Structures*. 2019; (143):106218. DOI:10.1016/j.tws.2019.106218.
21. **Vol'mir A.S.** Obolochki v potoke zhidkosti i gaza [Shells in fluid and gas flow]. *Zadachi Gidrouprugosti*. Moscow: Nauka; 1979: 320. (In Russ.)
22. **Bochkarev S.A., Matveenko V.P.** Numerical study of the influence of boundary conditions on the dynamic behavior of a cylindrical shell conveying a fluid. *Mechanics of Solids*. 2008; (43):477–486. DOI:10.3103/S0025654408030187.
23. **Vol'mir A.S.** Ustoychivost' deformiruemyykh sistem [Stability of deformable systems]. Moscow: Nauka; 1967: 984. (In Russ.)
24. **Bochkarev S.A.** Natural vibrations of a rotating circular cylindrical shell containing fluid. *Computational Continuum Mechanics*. 2010; 3(2):24–33. DOI:10.7242/1999-6691/2010.3.2.14. (In Russ.)

25. **Bochkarev S.A., Matveenko V.P.** Numerical modelling of the stability of loaded shells of revolution containing fluid flows. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2008; 49(2):313–322. DOI:10.1007/s10808-008-0043-1.
26. **Zienkiewicz O.C.** The finite element method in engineering science. N.Y.: McGrawHill; 1971: 521.
27. **Lehoucq R.B., Sorensen D.C.** Deflation techniques for an implicitly restarted Arnoldi iteration. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*. 1996; 17(4):789–821. DOI:10.1137/S0895479895281484.
28. **Sabri F., Lakis A.A.** Hydroelastic vibration of partially liquid-filled circular cylindrical shells under combined Internal pressure and axial compression. *Aerospace Science and Technology*. 2011; 15(4):237–248. DOI:10.1016/j.ast.2010.07.003.
29. **Bochkarev S.A.** Numerical simulation of natural vibrations of a cylindrical shell partially filled with fluid and embedded in an elastic foundation. *Computational Technologies*. 2022; 27(4):15–32. DOI:10.25743/ICT.2022.27.4.003. (In Russ.)
30. **Bochkarev S.A., Lekomtsev S.V., Matveenko V.P.** Natural vibrations of composite cylindrical shells partially filled with fluid. *Vestnik St. Petersburg University, Mathematics*. 2023; 56(4):435–445. DOI:10.1134/S1063454123040052.
31. **Gorshkov A.G., Morozov V.I., Ponomarev V.I., Shklyarchuk F.N.** Aerogidrouprugost' konstruktsiy [Aerohydroelasticity of structures]. Moscow: Fizmatlit; 2000: 591. (In Russ.)