

## О применении специальных адаптивных сеток в задачах нелинейной волоконной оптики

В. И. ПААСОНЕН<sup>1,2,\*</sup>, М. П. ФЕДУРУК<sup>2,1</sup>

<sup>1</sup>Федеральный исследовательский центр информационных и вычислительных технологий,  
630090, Новосибирск, Россия

<sup>2</sup>Новосибирский государственный университет, 630090, Новосибирск, Россия

\*Контактный автор: Паасонен Виктор Иванович, e-mail: [paas@ict.nsc.ru](mailto:paas@ict.nsc.ru)

Поступила 28 августа 2023 г., доработана 23 марта 2024 г., принята в печать 01 апреля 2024 г.

Работа представляет собой продолжение цикла исследований авторов, посвященных компактным схемам для численного решения задач нелинейной волоконной оптики. В качестве средства вычислений на неравномерных сетках предложена двухслойная схема типа предиктор-корректор, построенная по аналогии с хорошо зарекомендовавшей себя безытерационной схемой, ранее предложенной авторами для частного случая равномерной сетки. Изменен способ генерации адаптивной сетки — вместо конструирования управляющей функции по решению разработан явный способ задания сетки со сгущением в зонах больших градиентов, опирающийся на базовое преобразование Бахвалова. Приведены результаты численных экспериментов, выполненных на модельных задачах с известными точными решениями.

**Ключевые слова:** уравнение Шрёдингера, уравнение Гинзбурга–Ландау, компактная схема, адаптивная сетка, волоконная оптика.

**Цитирование:** Паасонен В.И., Федурок М.П. О применении специальных адаптивных сеток в задачах нелинейной волоконной оптики. Вычислительные технологии. 2024; 29(5):43–54. DOI:10.25743/ICT.2024.29.5.005.

### 1. Постановка задачи

Рассмотрим краевую задачу для уравнения Гинзбурга–Ландау (см., например, [1, 2]). В нелинейной оптике оно обычно используется в форме

$$i\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{D}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + |U|^2 U = i\delta U + i\kappa|U|^2 U + i\beta\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + (i\mu - \nu)|U|^4 U, \quad (1)$$

где  $i$  — мнимая единица;  $U$  — комплексный потенциал, зависящий от эволюционной переменной  $t$  (нормированной длины распространения) и “медленного” времени  $x$ ; коэффициент  $D = \pm 1$  определяет тип дисперсии (нормальной или аномальной), а параметры  $\delta, \kappa, \beta \geq 0, \mu, \nu$  в правой части вещественны. В частном случае, когда все они равны нулю, уравнение (1) превращается в нелинейное уравнение Шрёдингера.

Уравнение (1) моделирует процессы, происходящие в различных оптических устройствах (см., например, [3, 4]). Типичные решения таких уравнений имеют слой

в виде волн и солитонов на фоне обширных зон с небольшой вариацией решения. Ввиду наличия чрезвычайно узких слоев шаг равномерной сетки необходимо задавать достаточно малым с целью удовлетворительной аппроксимации мелкомасштабных элементов решения. Эффективным способом экономии вычислительных ресурсов служит повышение порядка точности схем [5–9], позволяющих получать результаты более качественные в сравнении со схемами второго порядка типа Кранка–Николсона [10–12]. Однако даже четвертый порядок точности не представляется достаточным для кардинального решения проблемы, а применение схем еще более высоких порядков сопряжено с расширением шаблонов схем за пределы традиционных трехточечных [13–15] и, следовательно, с весьма существенным усложнением алгоритмов.

Проблема заключается в использовании равномерных сеток, не являющихся оптимальными для задач со слоями, поскольку ограничения на размер шага в силу его постоянства приходится соблюдать тотально во всей области решения. Более подходят для таких задач адаптивные сетки, сгущающиеся лишь в зонах больших градиентов. В работе [8] адаптивная технология применялась к нелинейным задачам для уравнения теплопроводности и уравнения Шрёдингера в сочетании с компактной высокоточной схемой на сетке, перестраиваемой на каждом шаге с помощью управляющей функции, формируемой по вычисленному решению. Применение этой в целом удовлетворительной методики, которая считается более универсальной, чем алгебраический способ, все же омрачалось нежелательным укрупнением шага сетки в окрестности вершин и у основания солитонов, т.е. в областях большой кривизны графиков решения в этих зонах. Для исправления ситуации на каждом шаге дополнительно приходилось корректировать управляющую функцию с целью сгущения сетки именно в окрестности экстремумов второй производной. Корректировка осуществлялась путем решения специальной одномерной краевой задачи. С учетом сказанного ясно, что генерация сетки по явным формулам значительно менее затратна.

Схема в [8] применялась трехслойная, для нее на старте вычислений требовалось задавать решение на двух начальных слоях, тогда как краевая задача предполагает задание лишь одного начального данного. Кроме того, для ее применения предварительно требовалось достаточно точно интерполировать решения на новую сетку сразу на двух предыдущих слоях. Линейная интерполяция (идеальная по устойчивости) не годилась для компактной схемы, поэтому применялась лагранжева интерполяция 3–4-го порядков точности, которая требовала использования достаточно мелкого шага или внимательного контроля устойчивости при умеренных шагах.

В настоящей работе применяются усовершенствованная схема и явный способ генерации сетки. Вместо трехслойной схемы [8] применяется двухслойная, а ее безытерационность достигается путем применения технологии предиктор-корректор [16], когда приближение к решению, полученное явно на промежуточном шаге предиктора, на шаге корректора используется в правой части, ликвидируя тем самым нелинейность схемы. Глобальное координатное преобразование, генерирующее сетку, строится на основе модификации [17] классического базового преобразования Бахвалова [18], предназначенной для схем произвольного порядка точности. Это позволяет на каждом шаге задавать координаты узлов сетки по явным формулам вместо более емкого по числу операций способа генерации сетки по управляющей функции.

## 2. Специальная сетка

Преобразование Бахвалова [18] имеет вид

$$x = B(\xi) = -\frac{\varepsilon}{a} \ln \left( 1 - \frac{\xi}{q} \right), \quad 0 \leq \xi \leq \xi_0, \quad (2)$$

где  $\varepsilon$  — малый параметр,  $q$  и  $a$  — константы преобразования. Обратное преобразование моделирует поведение решения в экспоненциальном пограничном слое в окрестности нуля  $(0, x_0)$ ,  $x_0 = x(\xi_0)$ .

При  $\xi > \xi_0$  преобразование (2) стандартным образом продолжается гладко полиномом, построенным по формуле Тейлора функции  $B(x)$  в окрестности  $\xi_0$  с некоторым остаточным членом. Например, это может быть продолжение класса гладкости  $C^2$  вида

$$B(\xi) = B(\xi_0) + B'(\xi_0)(\xi - \xi_0) + \frac{B''(\xi_0)}{2}(\xi - \xi_0)^2 + c_0(\xi - \xi_0)^3, \quad \xi > \xi_0, \quad (3)$$

где  $c_0$  — мало значимая константа (равная единице). В настоящее время известно много различных составных преобразований, аналогичных (2), (3), используемых в задачах с малым параметром для сгущения сетки в слоях.

Координатное преобразование (2) было предназначено для построения специальных сеток, ориентированных на применение простейших схем первого, а при отсутствии конвективных членов и второго порядка точности. Для методов высоких порядков точности более подходящим является модифицированное преобразование [17], в котором постоянная  $q$  заменена функцией малого параметра  $q = \xi_0/(1 - \varepsilon^{1/n})$ , где  $n$  — такое число, что для моделируемого решения все производные до порядка  $n$  по новой переменной  $\xi$  равномерно ограничены в слое по  $\varepsilon^{1/n}$ . Модифицированное преобразование, таким образом, имеет вид

$$B(\xi) = -\frac{\varepsilon}{a} \ln \left( 1 - (1 - \varepsilon^{1/n}) \frac{\xi}{\xi_0} \right), \quad 0 \leq \xi \leq \xi_0. \quad (4)$$

Именно оно (с продолжением класса гладкости  $C^2$ ) использовалось в данной работе. Параметр  $\xi_0$  при равномерной по  $\xi$  сетке означает долю числа шагов, попадающих в левую ветвь базового преобразования, т. е. в слой, остальные шаги генерируемой сетки лежат в области полиномиального продолжения. Всюду в расчетах  $\xi_0 = 1/2$ ,  $a = 2$ , а число  $n$  соответствовало порядку производной в остаточном члене погрешности аппроксимации схемы.

В случае внутреннего слоя, каковым является солитон, необходимо продолжить функцию нечетным образом на отрицательную область переменной  $\xi$ . В результате функция  $x = B(\xi)$  становится определенной всюду, имеет гладкость  $C^2$ , причем  $B(0) = 0$ , и любая сетка на оси  $\xi$  отображается в сетку с двусторонним сгущением в окрестности  $x = 0$ . Мера сгущения зависит от величины малого параметра  $\varepsilon$ .

В течениях вязкой жидкости естественным малым параметром является коэффициент вязкости  $\varepsilon = 1/\text{Re}$ , а в задачах нелинейной волоконной оптики малый параметр в уравнение явно не входит, но может быть определен как  $\varepsilon = 1/L$  при переходе к безразмерной переменной  $x' = x/L$ . Например, модуль решения для фундаментального солитона тогда запишется в виде  $|U| = \text{sech}(x'/\varepsilon)$ , откуда видно, что слой является экспоненциальным.

В случае, когда требуется сгустить сетку в окрестности единственной точки  $x_1$  из промежутка  $-L < x < L$ , строится отображение вида

$$x = \phi(\xi) = x_1 + m(\xi)B(\xi - \xi_1), \quad m(\xi) = a + b(\xi - \xi_1), \quad \xi_1 = x_1/L, \quad (5)$$

в котором коэффициенты линейного множителя  $m(\xi)$  однозначно определяются из требований, чтобы отрезок  $(-1 < \xi < 1)$  отобразился бы функцией  $\phi(\xi)$  на отрезок  $-L < x < L$ . При этом точка  $\xi_1 = x_1/L \in (-1, 1)$  отображается в  $x_1$ , и любая сетка на отрезке  $-1 \leq \xi \leq 1$  генерирует сетку на  $-L \leq x \leq L$ , сгущающуюся с обеих сторон в окрестности  $x_1$ . Геометрически это представляется как перенос графика преобразования (3), (4) из точки  $(0, 0)$  в точку  $(\xi_1, x_1)$  с предварительным сжатием (или растяжением) его по  $x$  с помощью однозначно определяемого линейного множителя  $m(\xi)$ . Как вариант рассматривался также квадратичный множитель вида  $m(\xi) = 1 + a(\xi - \xi_1) + b(\xi - \xi_1)^2$ , равный единице в точке сгущения, а на границах удовлетворяющий условиям  $\phi(\pm 1) = \pm L$ . В обоих случаях сформулированными условиями коэффициенты  $a, b$  определяются однозначно и построенное глобальное отображение проецирует равномерную сетку по  $\xi$  в специальную сетку по  $x$  с двухсторонним сгущением в окрестности  $x_1$ .

Если на отрезке  $-L < x < L$  имеется несколько (упорядоченных в естественном порядке) точек  $x_j$  ( $j = 1, \dots, m$ ), где требуется локальное сгущение сетки, то сначала им назначаются прообразы  $\xi_j = x_j/L$  ( $j = 1, \dots, m$ ) и в окрестности каждой точки  $(\xi_j, x_j)$  строится аналогичное (5) локальное двустороннее отображение так, чтобы образом точки  $\xi_j$  была бы точка  $x_j$ , встречные ветви соседних локальных отображений с номерами  $j$  и  $j + 1$  гладко склеивались бы в серединах между точками сгущения  $\xi_j$  и  $\xi_{j+1}$ , а крайние ветви подтягивались бы к значениям  $\pm L$  при  $\xi = \pm 1$  соответственно. В результате получается гладкое глобальное отображение, генерирующее специальную сетку со сгущением во всех заданных точках.

### 3. Компактная разностная схема на неравномерной сетке

Зафиксируем произвольно узел неравномерной сетки по переменной  $x$  и обозначим через  $h_+$  и  $h_-$  локальные значения шагов сетки справа и слева от этого узла, а через  $\Delta_+$  и  $\Delta_-$  — соответствующие простейшие разделенные разности “вперед” и “назад”. Введем также обозначения для разности, суммы и произведения соседних шагов  $h_+$  и  $h_-$ :

$$d = h_+ - h_-, \quad s = h_+ + h_-, \quad p = h_+ h_-.$$

Для разностных операторов

$$\Delta = \frac{h_- \Delta_+ + h_+ \Delta_-}{s}, \quad \Lambda = \frac{\Delta_+ - \Delta_-}{s/2},$$

аппроксимирующих операторы одно- и двукратного дифференцирования, справедливы разложения

$$\Delta w = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{p}{6} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + O(h^4), \quad \Lambda w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{d}{3} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{p}{12} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + O(h^4).$$

Если при этом сетка квазиравномерна [19] (т.е. является образом равномерной при гладком координатном преобразовании отрезка в отрезок), то для нее разность соседних

шагов  $d = O(h^2)$ , поэтому  $\Lambda$  аппроксимирует двойное дифференцирование не с первым порядком (как на произвольной неравномерной сетке), а со вторым.

Умножив уравнение (1) на  $-i$ , приведем его к виду

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + f(U),$$

где в случае уравнения Гинзбурга – Ландау

$$c = \beta + \frac{D}{2}i, \quad f(U) = \delta U + (\kappa + i)|U|^2 U + (\mu + \nu i)|U|^4 U,$$

а в случае уравнения Шрёдингера

$$c = \frac{D}{2}i, \quad f(U) = i|U|^2 U.$$

Двухслойная схема, аппроксимирующая уравнение (3) с погрешностью  $O(\tau^2 + h^4)$ , является обобщением схемы Микеладзе [20] на случай квазиравномерной сетки и имеет вид (см. [8]):

$$\Sigma \frac{U^{n+1} - U^n}{\tau} = \Lambda \frac{U^{n+1} + U^n}{2} + \Sigma \frac{f^{n+1} + f^n}{2}, \quad \Sigma = E + \frac{d}{3}\Delta + \frac{p}{12}\Lambda. \quad (6)$$

Эта схема имеет нелинейность на верхнем шаге  $f^{n+1} = f(U^{n+1})$  относительно искомой функции. В работе [8] безытерационная схема построена из схемы (6) путем записи ее по слоям с номерами  $n - 1$  и  $n + 1$  с удвоенным шагом  $2\tau$  и одновременной заменой полусуммы правой части с точностью  $O(\tau^2)$  значением  $f^n$  на среднем слое. В результате получается трехслойная схема, не требующая итераций. Однако ее недостатком является то обстоятельство, что начальное условие в краевой задаче ставится лишь на нулевом слое, а для старта вычислений требуется знать решение также и на первом слое. Более предпочтительным представляется иной подход, основанный на технологии предиктор-корректор.

На основе разложения

$$U(t + \tau) = U(t) + \tau \frac{\partial U}{\partial t}(t) + O(\tau^2) = U(t) + \tau \left( c \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(t) + f(U(t)) \right) + O(\tau^2)$$

построим предиктор

$$\tilde{U} = U^n + \tau(c\Lambda U^n + f^n),$$

явно вычисляющий предварительное значение  $U^{n+1}$  с погрешностью  $O(\tau^2 + h^4)$ .

Представим правую часть в схеме (6) с точностью до членов  $O(\tau^2 + h^4)$  в виде

$$\Sigma \frac{f^{n+1} + f^n}{2} \simeq \Sigma f^n + \frac{\tau}{2} \frac{f^{n+1} - f^n}{\tau},$$

а затем заменим  $f^{n+1} = f(U^{n+1}) \mapsto f(\tilde{U})$  с той же точностью. В результате получим неявный шаг корректор без нелинейности:

$$\Sigma \frac{U^{n+1} - U^n}{\tau} = \Lambda \frac{U^{n+1} + U^n}{2} + \Sigma f^n + \frac{\tau}{2} \frac{f(\tilde{U}) - f^n}{\tau}.$$

Если заменить разностный оператор  $\Sigma$  тождественным оператором  $E$ , то порядок погрешности по пространственной переменной понизится до второго и результатом будет схема типа предиктор-корректор на неравномерной сетке, аналогичная схеме Кранка – Николсона.

#### 4. Результаты численных экспериментов

В качестве первого теста решена задача для уравнения Шрёдингера в области  $(-L < x < L) \times (0 < t < 10)$ , имеющая точное решение в виде солитона

$$U(x, t) = \exp(-it/2) \operatorname{sech} x.$$

Варианты расчетов отличались размерами отрезка  $L = 10, 100, 1000$  (иначе говоря, значениями малого параметра  $\varepsilon = 1/L = 0.1, 0.01, 0.001$ ), порядком точности схемы и типом сетки — равномерной и адаптивной, построенной по описанной выше технологии.

В табл. 1–3 приведены ошибки модуля решения в С-норме на последовательности сгущающихся сеток ( $N$  — число шагов) при трех указанных значениях малого параметра  $\varepsilon = 1/L$ . При  $L = 10$  ширина солитона в сравнении шириной области не слишком мала, следовательно, градиенты решения обезразмеренной задачи в слое умеренные, именно поэтому адаптивная сетка практически не имеет преимуществ перед равномерной (см. табл. 1). При увеличении  $L$  преимущество адаптивной сетки проявляется все заметнее, так как упомянутые градиенты возрастают в 10 раз (см. табл. 2) и 100 раз (см. табл. 3) соответственно. Результаты свидетельствуют также о том, что реальная ошибка много меньше при высоком порядке точности.

Точное решение уравнения Шрёдингера во второй задаче представляет собой взаимодействие двух солитонов [5, 10], движущихся навстречу друг другу:

$$U(x, t) = \operatorname{sech}(w_+) \exp(iv_+) + \operatorname{sech}(w_-) \exp(-iv_-), \quad (7)$$

где

$$w_{\pm} = w_{\pm}(x, t) = x \pm (10 - 4t), \quad v_{\pm} = v_{\pm}(x, t) = 2x \pm (20 - 3t).$$

В начале процесса (отсчет ведется от  $t_0 = 0.5$ ) центры солитонов занимают положение  $x_1 = -8, x_2 = 8$ .

На рис. 1 представлены результаты численного решения этой задачи (при значении параметра  $L = 10$ ) до сближения солитонов (рис. 1, а), в момент их встречи в точке  $x = 0$  (рис. 1, б) и после расхождения (рис. 1, в). Сетка намеренно выбрана достаточно грубой ( $N = 80$ ), чтобы численные решения визуальнo не сливались с точным и маркеры разных результатов различались.

До встречи солитонов (рис. 1, а) решение реально выглядит гладким, в этом случае удовлетворительная точность расчета соответствует гладкости. В точке встречи солитонов (рис. 1, б) имеет место наибольший хаос: проявляется интерференция с возникновением нескольких взаимодействующих пиков, сосредоточенных вблизи нуля, и хотя

Т а б л и ц а 1. С-норма ошибки, полученная при  $L = 10$

Table 1. C-norm of error obtained when  $L = 10$

$N$	Схема $O(h^2)$		Схема $O(h^4)$	
	Равно- мерная	Адап- тивная	Равно- мерная	Адап- тивная
20	2.247e-00	1.023e-00	1.588e-00	3.084e-01
40	3.126e-01	2.306e-01	1.918e-02	1.227e-02
80	6.443e-02	5.811e-02	1.071e-03	7.454e-04
160	1.561e-02	1.453e-02	1.821e-04	1.834e-04

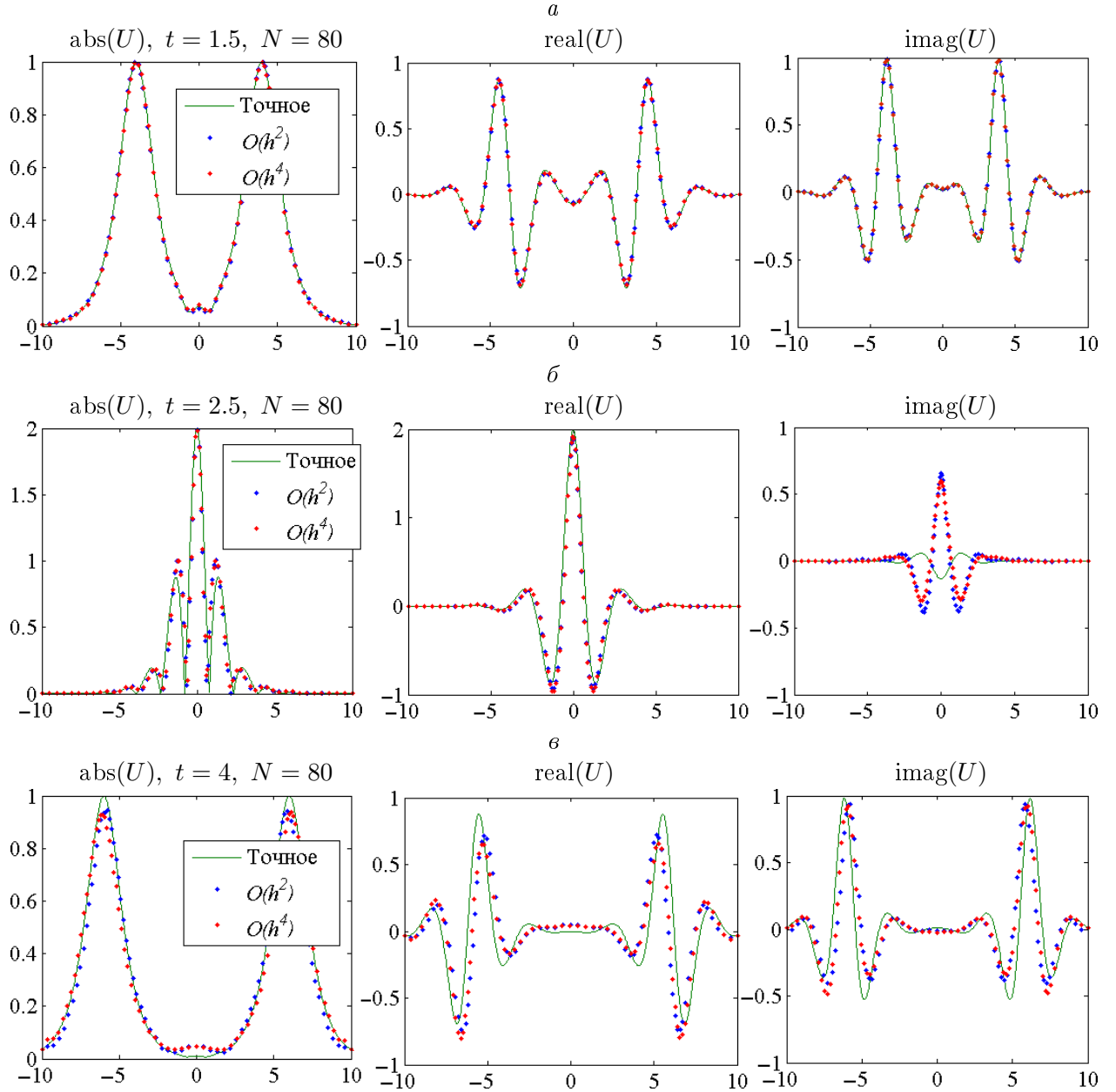
Т а б л и ц а 2. С-норма ошибки, полученная при  $L = 100$

Table 2. C-norm of error obtained when  $L = 100$

$N$	Схема $O(h^2)$		Схема $O(h^4)$	
	Равно- мерная	Адап- тивная	Равно- мерная	Адап- тивная
100	2.094e-00	8.685e-01	2.074e-00	1.734e-01
200	2.275e-00	1.914e-01	1.286e-00	1.041e-02
400	3.046e-01	2.088e-02	1.610e-02	6.529e-04
800	6.497e-02	1.165e-02	9.006e-04	4.087e-05

Т а б л и ц а 3. С-норма ошибки, полученная при  $L = 1000$ Table 3. C-norm of error obtained when  $L = 1000$ 

$N$	Схема $O(h^2)$		Схема $O(h^4)$	
	Равномерная	Адаптивная	Равномерная	Адаптивная
1000	8.582e-01	5.901e-02	8.183e-01	5.173e-03
2000	6.754e-01	1.480e-02	5.583e-01	3.142e-04
4000	5.047e-01	3.670e-03	1.957e-01	1.967e-05

Рис. 1. Численные решения при  $t = 1.5$  (а),  $t = 2.5$  (б) и  $t = 4$  (в), полученные по схемам  $O(\tau^2 + h^2)$  и  $O(\tau^2 + h^4)$ Fig. 1. Numerical solutions at  $t = 1.5$  (а),  $t = 2.5$  (б) and  $t = 4$  (в) obtained by  $O(\tau^2 + h^2)$  and  $O(\tau^2 + h^4)$  schemes

точное решение согласно (7) остается формально гладким, градиенты на пиках все же довольно велики. Поэтому возникают значительные локальные ошибки (это особенно заметно на графике мнимой части решения), аналогичные ошибкам в задачах газовой динамики в области ударных переходов. После прохождения солитонов друг через друга (рис. 1, в) решение снова становится более плавным, качественно близким к точному, но возникает слабое различие в скорости перемещения пиков приближенного решения и точного.

Заметим, что ввиду особенностей спектра схем пики модуля численного решения по схеме типа Кранка – Николсон несколько отстают от точного местоположения солитона, а по компактной схеме, напротив, несколько опережают его. Заметим, что аналогичное отклонение от истинной скорости движения волны известно в газовой динамике. Малые ошибки в скорости перемещения пиков ввиду чрезвычайно малой ширины солитона являются причиной, не позволяющей эффективно оценивать точность расчетов в  $C$ -норме ни по одной схеме, ни по другой, так как небольшое смещение решения по оси абсцисс влечет заметную локальную ошибку по ординате. Однако до сближения солитонов ошибка в положении пиков незначительна. В табл. 4 приведены результаты на момент  $t = 1.5$ , соответствующий решению, изображенному на рис. 1, а.

Попытки использования равномерной сетки для решения задачи с двумя солитонами при  $L = 10$  показали, что при числе узлов  $N = 640$  (т.е. на сетке с таким же числом узлов, как в результативных расчетах на адаптивной сетке) численные решения как по схеме Кранка – Николсон, так и по компактной схеме оказались совершенно неудовлетворительными. Качественное совпадение численного решения компактной схемы с точным решением на равномерной сетке достигалось лишь с  $N = 2560$ . Это свидетельствует о том, что в сложных задачах, в частности в задачах со взаимным проникновением движущихся слоев, формальное повышение порядка точности схемы является менее значимым фактором эффективности метода, чем использование разумно построенных сеток.

На рис. 2 представлена динамика изменения специальной сетки ( $N = 80$ ) в задаче с двумя солитонами. В горизонтальных сечениях при различных значениях эволюционной переменной  $t$  изображены узлы сетки и положение центров солитонов. Из рисунка заметна некоторая асимметрия в характере сгущения сетки слева и справа от вершин солитонов. Очевидно, что выбранный способ склейки четырех базовых преобразований (от двух вершин солитона влево и вправо) оказался не самым идеальным: функции-множители при базовых преобразованиях, используемые для построения глобального гладкого отображения, различны на разных склонах солитонов при различных расстояниях от центра солитона до ближайшей границы и до середины области. Эти расстояния оказываются равными лишь при  $t = 1.25$  и при  $t = 3.75$ , когда асимметрия исчезает.

Т а б л и ц а 4.  $C$ -норма ошибки при  $t = 1.5$  для двух схем

Table 4.  $C$ -norm of error obtained at  $t = 1.5$  for two schemes

$N$	Линейная интерполяция		Кубическая интерполяция		Сплайновая интерполяция	
	$O(h^2)$	$O(h^4)$	$O(h^2)$	$O(h^4)$	$O(h^2)$	$O(h^4)$
80	3.453e-01	3.568e-01	4.854e-02	5.246e-02	4.250e-02	1.040e-02
160	2.475e-01	2.510e-01	1.327e-02	2.056e-02	9.293e-03	9.099e-04
320	1.492e-01	1.501e-01	5.384e-03	7.181e-03	2.462e-03	3.665e-04
640	8.234e-02	8.256e-02	1.796e-03	2.273e-03	8.479e-04	7.350e-05

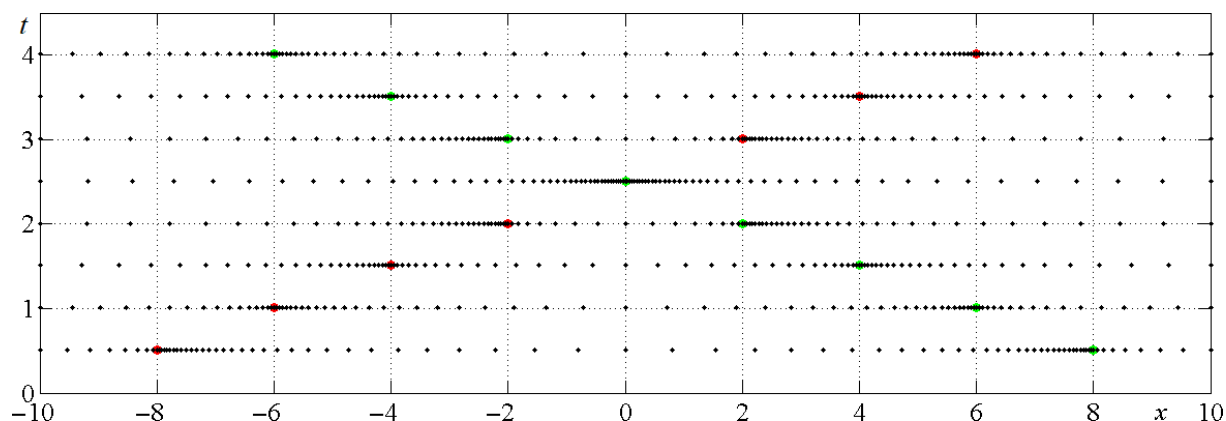


Рис. 2. Изменение адаптивной сетки в процессе счета

Fig. 2. Evolution of the adaptive grid during the computation process

Расчеты проводились на сетке в физических координатах. На сетке  $n$ -го слоя по схеме находилось решение на следующий момент эволюционной переменной. Оно интерполировалось на сетку слоя с номером  $(n + 1)$ . При этом испытывались различные способы интерполяции решения — линейная, кусочно-кубическая, сохраняющая форму геометрии кривой, и кубическая сплайновая. Численные результаты существенно зависели от способа интерполяции. В табл. 4 приведены результаты сравнения С-норм ошибок решения, полученного в момент  $t = 1.5$  на сгущающихся адаптивных сетках при различных интерполяционных процедурах. Из таблицы видно, что использование линейной интерполяции практически сводит на нет преимущество компактной схемы, и, наоборот, сплайновая интерполяция оказалась полезной не только для компактной схемы, но также и для схемы второго порядка точности.

**Благодарности.** Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 20-11-20040, <https://rscf.ru/project/20-11-20040/>).

## Список литературы

- [1] Akhmediev N.N., Afanasiev V.V. Singularities and special soliton solutions of the cubicquintic complex Ginsburg–Landau equation. *Physical Review E*. 1996; 53(1):1190–1201.
- [2] Кившарь Ю.С., Агравал Г.П. Оптические солитоны. От волоконных световодов к фотонным кристаллам. М.: Физматлит; 2005: 647.
- [3] Agrawal G.P. *Nonlinear fiber optics*. N.Y.: Academic Press; 2001: 446.
- [4] Agrawal G.P. *Applications of nonlinear fiber optics*. N.Y.: Academic press; 2001: 458.
- [5] Xie S.-S., Li G.-X., Yi S. Compact finite difference schemes with high accuracy for one-dimensional nonlinear Schrödinger equation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2009; (198):1052–1061.
- [6] Паасонен В.И., Федорук М.П. Компактная диссипативная схема для нелинейного уравнения Шрёдингера. *Вычислительные технологии*. 2011; 16(6):68–73.
- [7] Паасонен В.И., Федорук М.П. Компактная безытерационная схема для нелинейного уравнения Шрёдингера. *Вычислительные технологии*. 2012; 17(3):83–90.
- [8] Паасонен В.И. Компактные схемы третьего порядка точности на неравномерных адаптивных сетках. *Вычислительные технологии*. 2015; 20(2):56–64.

- [9] **Паасонен В.И., Федорук М.П.** Трехслойная безытерационная схема повышенного порядка точности для уравнения Гинзбурга–Ландау. *Вычислительные технологии*. 2015; 20(3):46–57.
- [10] **Chang Q., Jia E., Sun W.** Difference schemes for solving the generalized nonlinear Schrödinger equation. *Journal of Computational Physics*. 1999; (48):397–415.
- [11] **Xu Q.B., Chang Q.S.** Difference methods for computing the Ginzburg–Landau equation in two dimensions. *Numerical Methods Partial Differential Equation*. 2011; (27):507–528.
- [12] **Wang T.C., Guo B.L.** Analysis of some finite difference schemes for two dimensional Ginzburg–Landau equation. *Numerical Methods Partial Differential Equation*. 2011; (27):1340–1363.
- [13] **Wang T.** Convergence of an eighth-order compact difference schemes for the nonleniar Shrödinger equation. *Advances in Numerical Analysis*. 2012; Art.ID 913429.:24.
- [14] **Паасонен В.И.** Классификация разностных схем максимально возможной точности на расширенных симметричных шаблонах для уравнения Шрёдингера и уравнения теплопроводности. *Сибирский журнал вычислительной математики*. 2020; 23(1):99–114.
- [15] **Паасонен В.И., Федорук М.П.** Об эффективности высокоточных разностных схем для уравнения Шрёдингера. *Вычислительные технологии*. 2021; 26(6):68–81. DOI:10.25743/ICT.2021.26.6.006.
- [16] **Паасонен В.И., Федорук М.П.** Компактная разностная схема без итераций для двумерного уравнения Гинзбурга–Ландау. *Вычислительные технологии*. 2022; 27(6):58–69. DOI:10.25743/ICT.2022.27.6.006.
- [17] **Liseikin V.D.** Grid generation for problems with boundary and interior laers. Novosibirsk: NGU; 2018: 296. (In Russ.)
- [18] **Бахвалов Н.С.** К оптимизации методов решения краевых задач при наличии пограничного слоя. *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 1969; 9(4):841–859.
- [19] **Калиткин Н.Н., Альшин А.Б., Альшина Е.А., Рогов В.Б.** Вычисления на квазиравномерных сетках. М.: Физматлит; 2005: 224.
- [20] **Микеладзе Ш.Е.** О численном интегрировании уравнений эллиптического и параболического типов. *Известия АН СССР. Серия математика*. 1941; 5(1):57–74.

## On application of special adaptive grids in problems of nonlinear fiber optics

V. I. PAASONEN<sup>1,2,\*</sup>, M. P. FEDORUK<sup>2,1</sup>

<sup>1</sup>Federal Research Center for Information and Computing Technologies, 630090, Novosibirsk, Russia

<sup>2</sup>Novosibirsk State University, 630090, Novosibirsk, Russia

\*Corresponding author: Viktor I. Paasonen, e-mail: [paas@ict.nsc.ru](mailto:paas@ict.nsc.ru)

*Received August 28, 2023, revised March 23, 2024, accepted April 01, 2024.*

### Abstract

The paper is a further development of the authors' research cycle on high-precision difference methods for numerical solution of nonlinear fiber optics problems (for the Schrödinger equation and the Ginzburg–Landau equation). A two-layer predictor-corrector type scheme is chosen as the

apparatus for computations on non-uniform meshes, which is constructed by analogy with the well-proven noniterative scheme previously proposed by the authors for the special case of a uniform grid. In contrast to the frequently used three-layer scheme, which requires setting initial conditions on the first two layers on the evolutionary variable, the two-layer technique has no problems when a computation is started.

Instead of the frequently used method of adaptive mesh generation relying on the construction of a control function based on a dynamically varying solution, an explicit method of setting the denser mesh in the zones of large gradients, based on the classical basic Bakhvalov transformation and on the knowledge of soliton locations, is applied. The global coordinate transformation is constructed by smooth conjugation of elementary basic transformations. It allows saving computational resources and avoiding undesirable larger grid step near extrema of the second derivative of the solution, for example, near the soliton peak or base.

On two test problems the comparison of schemes of the fourth and second order of accuracy on constructed special grids and on uniform grids with the same number of steps is carried out. The order of accuracy of the schemes at moderate gradients of the solution is numerically confirmed. It is shown that at large gradients a reasonably constructed adaptive grid is a more important factor of computational efficiency than the order of accuracy of the schemes.

*Keywords:* Schrödinger equation, Ginzburg–Landau equation, compact difference scheme, adaptive grid, nonlinear fiber optics.

*Citation:* Paasonen V.I., Fedoruk M.P. On application of special adaptive grids in problems of nonlinear fiber optics. Computational Technologies. 2024; 29(5):43–54. DOI:10.25743/ICT.2024.29.5.005. (In Russ.)

**Acknowledgements.** The research was funded by the Russian Science Foundation (project No. 20-11-20040, <https://rscf.ru/project/20-11-20040/>).

## References

1. **Akhmediev N.N., Afanasiev V.V.** Singularities and special soliton solutions of the cubicquintic complex Ginsburg–Landau equation. Physical Review E. 1996; 53(1):1190–1201.
2. **Kivshar Yu.S., Agrawal G.P.** Opticheskie solitony. Ot volokonnykh svetovodov k fotonnym kristallam [Optical solitons. From fiber light guides to photon crystals]. Moscow: Fismatlit; 2005: 647. (In Russ.)
3. **Agrawal G.P.** Nonlinear fiber optics. N.Y.: Academic Press; 2001: 446.
4. **Agrawal G.P.** Applications of nonlinear fiber optics. N.Y.: Academic press; 2001: 458.
5. **Xie S.-S., Li G.-X., Yi S.** Compact finite difference schemes with high accuracy for one-dimensional nonlinear Schrödinger equation. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 2009; (198):1052–1061.
6. **Paasonen V.I., Fedoruk M.P.** A compact dissipative scheme for nonlinear Schrödinger equation. Computational Technologies. 2011; 16(6):68–73. (In Russ.)
7. **Paasonen V.I., Fedoruk M.P.** A compact noniterative scheme with artificial dissipation for nonlinear Schrödinger equation. Computational Technologies. 2012; 17(3):83–90.
8. **Paasonen V.I.** Compact third-order accuracy schemes on non-uniform adaptive grids. Computational Technologies. 2015; 20(2):56–64.
9. **Paasonen V.I., Fedoruk M.P.** Three-level non-iterative high accuracy scheme for Ginzburg–Landau equation. Computational Technologies. 2015; 20(3):46–57.
10. **Chang Q., Jia E., Sun W.** Difference schemes for solving the generalized nonlinear Schroödinger equation. Journal of Computational Physics. 1999; (48):397–415.
11. **Xu Q.B., Chang Q.S.** Difference methods for computing the Ginzburg–Landau equation in two dimensions. Numerical Methods Partial Differential Equation. 2011; (27):507–528.
12. **Wang T.C., Guo B.L.** Analysis of some finite difference schemes for two dimensional Ginzburg–Landau equation. Numerical Methods Partial Differential Equation. 2011; (27):1340–1363.
13. **Wang T.** Convergence of an eighth-order compact difference schemes for the nonleniar Shrödinger equation. Advances in Numerical Analysis. 2012; Art.ID 913429.:24.

14. **Paasonen V.I.** Classification of difference schemes of maximum possible accuracy on extended symmetric stencils for the Schrödinger equation and the heat conduction equation. *Numerical Analysis and Applications*. 2020; 13(1):82–94. DOI:10.1134/S1995423920010073. Available at: [https://www.researchgate.net/publication/339518138\\_Classification\\_of\\_Difference\\_Schemes\\_of\\_Maximum\\_Possible\\_Accuracy\\_on\\_Extended\\_Symmetric\\_Stencils\\_for\\_the\\_Schrodinger\\_Equation\\_and\\_the\\_Heat\\_Conduction\\_Equation](https://www.researchgate.net/publication/339518138_Classification_of_Difference_Schemes_of_Maximum_Possible_Accuracy_on_Extended_Symmetric_Stencils_for_the_Schrodinger_Equation_and_the_Heat_Conduction_Equation).
15. **Paasonen V.I., Fedoruk M.P.** On the efficiency of high-order difference schemes for the Schrödinger equation. *Computational Technologies*. 2021; 26(6):68–81. DOI:10.25743/ICT.2021.26.6.006. (In Russ.)
16. **Paasonen V.I., Fedoruk M.P.** The compact iteration-free difference scheme for the two-dimensional Ginzburg–Landau equation. *Computational Technologies*. 2022; 27(6):58–69. DOI:10.25743/ICT.2022.27.6.006. (In Russ.)
17. **Liseikin V.D.** Grid generation for problems with boundary and interior laers. Novosibirsk: NGU; 2018: 296. (In Russ.)
18. **Bakhvalov N.S.** On the optimization of the methods for solving boundary value problems in the presence of a boundary layer. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 1969; 9(4):139–166. DOI:10.1016/0041-5553(69)90038-X.
19. **Kalitkin N.N., Alshin A.B., Alshina E.A., Rogov V.B.** Vychisleniya na kvaziravnomernykh setkakh [Computation on quaziuniform grids]. Moscow: Fizmatlit; 2005: 224. (In Russ.)
20. **Mikeladze Sh.E.** On the numerical integration of the equations of elliptic and parabolic types. *Isvestiya AN SSSR. Seriya Matematika*. 1941; 5(1):57–74. (In Russ.)