

Модифицированная противопоточная и гибридные схемы на специальных сетках для решения задач со слоями

В. И. ПААСОНЕН^{1,2,*}, В. Д. ЛИСЕЙКИН¹

¹Федеральный исследовательский центр информационных и вычислительных технологий, 630090, Новосибирск, Россия

²Новосибирский государственный университет, 630090, Новосибирск, Россия

*Контактный автор: Паасонен Виктор Иванович, e-mail: paas@ict.nsc.ru

Поступила 03 марта 2023 г., доработана 10 августа 2023 г., принята в печать 17 августа 2023 г.

При решении на адаптивных сетках задач с пограничными и внутренними слоями весьма желательно пользоваться разностными схемами, сходящимися равномерно относительно малого параметра при стремлении шагов сетки к нулю. Однако равномерно сходящиеся схемы обычно имеют лишь первый порядок точности, а схемы высокой точности не сходятся равномерно. В работе исследуются свойства оригинальной модификации противопоточной схемы и построенных на ее основе двух гибридных схем, имеющих второй порядок точности и сходящихся равномерно по малому параметру. На модельной задаче с пограничным слоем экспоненциального типа на специальных адаптивных сетках проведены сравнения численных результатов, подтвердивших эффективность построенных гибридных схем в сравнении с известными однородными схемами.

Ключевые слова: равномерная сходимость, адаптивная сетка, пограничный слой, диагональное преобладание, противопоточная схема, гибридная схема.

Цитирование: Паасонен В.И., Лисейкин В.Д. Модифицированная противопоточная и гибридные схемы на специальных сетках для решения задач со слоями. Вычислительные технологии. 2024;29(3):70–80. DOI:10.25743/ICT.2024.29.3.006.

Введение

Важное место в различных разделах науки занимают задачи, которые описываются системами уравнений с малым параметром (коэффициентом диффузии, вязкости) при старших производных, хорошей и одновременно простой моделью которых является краевая задача

$$-\varepsilon u_{xx} + a(x)u_x + c(x)u = f(x), \quad x \in (0, 1), \quad u(0) = u_0, \quad u(1) = u_1. \quad (1)$$

Таким задачам присущи решения с пограничными и внутренними слоями различных типов, сложные для численного моделирования. При их численной реализации размер шага сетки лимитируется чрезвычайно малой шириной слоя при быстром изменении решения в нем, что в случае равномерных сеток заставляет формировать чрезвычайно густую сетку всюду, в том числе в областях умеренного изменения решения. Следовательно, для проведения успешных и экономичных расчетов целесообразно использовать

неравномерные сетки со сгущениями, характер которых согласован с расположением, видом и масштабом слоев. При этом весьма желательно использовать сеточные методы, имеющие достаточно хорошую точность и сходящиеся равномерно по малому параметру. Обычно эти требования альтернативны: схемы высокой точности не сходятся равномерно по малому параметру, а равномерно сходящиеся схемы имеют лишь первый порядок точности.

Часто при решении краевых задач заранее известны место расположения слоя и характер поведения решения в нем, что позволяет задать явно подходящее преобразование для генерации адаптивной сетки, а не решать совместно с основным уравнением дифференциальное уравнение для координатного отображения. Для уравнений типа (1) первые формулы координатных преобразований с явной зависимостью от малого параметра предложены в работах [1–3]. На их основе были разработаны численные алгоритмы для решения задач с экспоненциальными слоями [4–6]. Однако указанные выше зависимости оказались пригодными исключительно для экспоненциальных слоев. Для неэкспоненциальных слоев (степенных, логарифмических, смешанных) первые результаты по построению координатных отображений с явной зависимостью от ε опубликованы в работах [7–9].

Для всех указанных выше методов построения адаптивных сеток сходимост, равномерная по ε , доказана для классической противопоточной схемы (см., например, [9]). Доказательство опирается на оценки производных решения и на свойство обратной монотонности [9, 10], вытекающее из диагонального преобладания матрицы противопоточной схемы.

Однако известны интересные аналоги противопоточной схемы, которые могут послужить материалом для построения равномерно сходящихся схем второго порядка. Одна из них, известная как схема Булеева [11], отличается от классической наличием специального положительного коэффициента при второй производной, с помощью которого изящно компенсируется главный член погрешности односторонней аппроксимации конвективного члена. В работе [12] предложена другая оригинальная модификация противопоточной схемы, повышающая точность в сравнении с классической схемой. Идея состоит в том, что в уравнении (1) все слагаемые, кроме первого, аппроксимируются симметрично относительно полужелтого узла с той стороны, где аппроксимируется поток. Погрешность схемы составляет величину $O(\varepsilon h)$ формально первого порядка, но при малой вязкости достигающую второго порядка вне слоя. В работе [13] на специальной кусочно-равномерной сетке Шишкина [3] (с мелким шагом $h = O(\varepsilon/N)$ в слое и крупным $H = O(1/N)$ вне слоя, где N — общее число шагов сетки) для сохранения в целом второго порядка предложена гибридная схема, представляющая собой комбинацию схемы [12] вне слоя с центрально-разностной схемой внутри слоя. Равномерная сходимост этой гибридной схемы достигается тем, что диагональное преобладание центрально-разностной схемы обеспечивается именно малостью шага в слое.

В работе [14] проведено сравнение схем до четвертого порядка точности для решения задач со слоями различных типов, а в работе [15] испытано несколько популярных схем на адаптивных сетках, в том числе схема Булеева [11], имеющая формально второй порядок аппроксимации всюду. Однако анализ погрешности схемы при наличии слоев показал [15], что вне слоя ее порядок, к сожалению, падает до первого. По этой причине расчеты по ней при малой вязкости вне слоя не лучше, чем по простой противопоточной схеме первого порядка, хотя внутри слоя реальная точность выше. Это легко наблюдается на решениях, вариация которых вне слоя существенна. Если же слой примыкает

к области покоя, где вариация решения мала, то понижение порядка схемы вне слоя не имеет возможности проявиться.

В целом ряде численных экспериментов [16] показано, что специальные сетки [17] с постепенным изменением шага неизменно дают более качественные расчеты, чем кусочно-равномерные сетки [3] с резкой сменой шага. В связи с этим возник вопрос, возможно ли применение аналога гибридной схемы [13] в общем случае неравномерных сеток. Проблема заключается в том, что при изменении размера шага сетки в пределах слоя (в отличие от его постоянства на сетке [3]) для аналога центрально-разностной схемы сложно гарантировать диагональное преобладание по всей ширине слоя.

Поэтому основным пунктом данной работы стало исследование другой гибридной схемы, в которой внутри слоя вместо центрально-разностной схемы используется схема Булеева [11]. Такой выбор сделан в связи с аппроксимационными свойствами схемы Булеева, имеющей второй порядок в слое, где модификация [12] его теряет, и наоборот, имеющей первый порядок вне слоя, где [12] имеет второй. Этот симбиоз одновременно имеет и второй порядок аппроксимации всюду, и безусловное диагональное преобладание при любой вязкости и любых шагах, оно в свою очередь влечет свойство обратной монотонности, из которого по технологии [9, 10] доказывается сходимость, равномерная относительно малого параметра.

1. Разностные схемы

Существуют различные схемы для решения задачи (1). Обычно входящая в оценку ошибки константа зависит от параметра ε , стремясь к бесконечности при $\varepsilon \rightarrow 0$, что означает неравномерный характер сходимости схемы относительно малого параметра ε . Для решения задач со сломи желательно использовать схемы, равномерно сходящиеся при стремлении к нулю малого параметра. На равномерных, а также и на произвольных неравномерных сетках это невозможно. Однако на некоторых специальных последовательностях неравномерных сеток [1, 3, 8], зависящих от малого параметра, для простейшей противопоточной схемы равномерная сходимость доказана.

Противопоточная классическая схема имеет вид

$$-\varepsilon \Lambda u_i + a_i \Delta_{\pm} u_i + c_i u_i = f_i, \quad (2)$$

где Δ_{\pm} — простейшие односторонние аналоги оператора дифференцирования (Δ_- при $a_i > 0$ и Δ_+ в противном случае), а $\Lambda = 2(\Delta_+ - \Delta_-)/s$ — аналог оператора двойного дифференцирования, $s = h_+ + h_-$ — сумма местных значений шага сетки справа h_+ и слева h_- от данного узла.

Для большинства схем второго порядка, построенных на основе комбинаций левой и правой разделенных разностей, например для схемы

$$-\varepsilon \Lambda u_i + a_i \Delta u_i + c_i u_i = f_i, \quad \Delta = \frac{\Delta_- h_+ + \Delta_+ h_-}{s}, \quad (3)$$

при равномерной сетке, превращающейся в схему с центральной разностью, диагональное преобладание имеет место лишь при достаточно малых шагах сетки. При его нарушении расчеты могут сопровождаться осцилляциями, и чем меньше коэффициент вязкости, тем более детальной должна быть сетка, чтобы осцилляции прекратились. Это определенно свидетельствует об отсутствии равномерной по малому параметру сходимости схемы.

В схеме Булеева [11]

$$-\varepsilon \frac{1}{1+R} \Lambda u_i + a_i \Delta_{\pm} u + c_i u_i = f_i, \quad R = \frac{|a_i| h_{\pm}}{2\varepsilon}, \quad (4)$$

за счет специального коэффициента при второй производной формальный порядок аппроксимации повышается до второго и вместе с тем сохраняется противопоточная структура с присущим ей диагональным преобладанием. Знаки \pm берутся так же, как в схеме (2), в зависимости от знака коэффициента a_i .

Модификация [12] классической противопоточной схемы (2) имеет вид

$$-\varepsilon \Lambda u_i + a_{i\pm 1/2} \Delta_{\pm} u_i + (cu)_{i\pm 1/2} = f_{i\pm 1/2}, \quad (5)$$

где все величины на полушаге определяются как полусуммы $v_{i\pm 1/2} = (v_i + v_{i\pm 1})/2$, а в индексах \pm означает минус при $a_i > 0$ и плюс — в противном случае.

Очевидно, в полуцелой точке $x_i \pm h_{\pm}/2$ все слагаемые схемы (5), кроме первого, аппроксимированы симметрично, а следовательно со вторым порядком. Разложение первого слагаемого в центральной точке шаблона имеет вид

$$\Lambda u_i = \left(u_{xx} + \frac{h_+ - h_-}{3} u_{xxx} \right) (x_i) + O(h^2), \quad (6)$$

в полуцелом узле $z_i = x_i \pm h_{\pm}/2$ ввиду равенства $x_i = z_i \mp h_{\pm}/2$ оно преобразуется к виду

$$\Lambda u_i = \left(u_{xx} \mp \frac{h_{\pm} + 2h_{\mp}}{6} u_{xxx} \right) (z_i) + O(h^2).$$

Отсюда следует формальная аппроксимация схемы (5) с погрешностью $O(\varepsilon h + h^2)$.

Главные члены разложения погрешности схемы Булеева (4) и модифицированной противопоточной схемы (5) имеют соответственно вид

$$\Psi_1 = -\varepsilon \frac{R^2}{1+R} u_{xx} + \frac{|a(x_i)| h_{\pm}^2 - 2(h_+ - h_-) \varepsilon}{6} u_{xxx} + \dots \quad \Psi_2 = -\varepsilon \frac{h_{\pm} + 2h_{\mp}}{6} u_{xxx} + \dots$$

В экспоненциальном слое масштаба k производные решения $u^{(m)} = O(1/\varepsilon^{k+m-1})$, шаги сетки $h_{\pm} = O(\varepsilon/N)$, разность соседних шагов $h_+ - h_- = O(\varepsilon/N^2)$, где N — общее число шагов сетки, поэтому внутри слоя схемы имеют соответственно второй и первый порядки:

$$\Psi_1 = \frac{1}{N^2 \varepsilon^k}, \quad \Psi_2 = \frac{1}{N \varepsilon^k}.$$

Вне слоя производные ограничены константами, не зависящими от малого параметра, шаги сетки $h_{\pm} = O(1/N)$, а их разность $h_+ - h_- = O(1/N^2)$, поэтому здесь

$$\Psi_1 = \frac{1}{N^2 \varepsilon + N}, \quad \Psi_2 = \frac{\varepsilon}{N} + \frac{1}{N^2}.$$

Тогда при умеренных $\varepsilon = O(1)$ вне слоя погрешности имеют соответственно второй и первый порядки, но при малых $\varepsilon \sim 1/N$ и ниже, наоборот, первый и второй.

С учетом сказанного выше представляет интерес исследовать численно две гибридные схемы. Первая — это прямое обобщение на случай неравномерных сеток комбинации [13], состоящей из модификации (5) вне слоя и схемы (3) с центральной разностью

в слое. В оригинальной реализации [13] используется равномерная сетка в слое, и диагонального преобладания легко добиться, ограничив шаг в слое. При неравномерной сетке шаг от самого малого постепенно увеличивается по мере удаления от границы, и в этом случае следует контролировать диагональное преобладание во всей ширине слоя. Однако следует заметить, что вполне естественное сгущение сетки внутри слоя само по себе является фактором, уменьшающим размеры шагов и способствующим выполнению этого свойства. Во второй гибридной схеме мы намерены вместо схемы с центральной разностью (3) в слое использовать схему Булеева (4). Эта идея представляется полезной, поскольку этим всюду в области достигается и второй порядок аппроксимации, и безусловное диагональное преобладание, не требующее контроля.

2. Специальные сетки

Алгоритмы построения специальных (явно задаваемых и сгущающихся в слоях) сеток, используемых в данной работе, подробно описаны в [14, 15] и основаны на методах, изложенных в монографии [17]. Для генерации разностных сеток, сгущающихся в экспоненциальных слоях возле точки $x_0 = 0$, строится преобразование класса $C^l[0, 1]$, устраняющее в слое экспоненциальные особенности масштаба k до порядка n (т. е. обеспечивающее ограниченность производных решения до порядка n по новой переменной). С этой целью вблизи $\xi = 0$ определим функцию $x = X(\xi, \varepsilon, \dots)$ в виде

$$x = X(\xi, \varepsilon, k, n, a) = \varepsilon^k ((1 - d\xi)^{-1/a} - 1), \quad 0 \leq \xi \leq \xi_0, \quad (7)$$

где $d = (1 - \varepsilon^{k\beta})/\xi_0 \geq 1 + m_1 > 1$, $\beta = a/(1 + na)$, при этом a — константа, отделенная от нуля ($a \geq m_2 > 0$). Для экспоненциальных слоев константа a может быть задана произвольно, а для степенных слоев первого рода должна удовлетворять некоторому ограничению сверху. Такое преобразование в частном случае $a = 1$ было впервые опубликовано в [2], а при произвольном $a > 1$ — в [7]. Для других типов слоев (степенных второго рода, логарифмических, смешанных) вместо функции (7) необходимо использовать иные зависимости. Подробности изложены в [14, 15].

На оставшуюся часть отрезка $\xi_0 < \xi \leq 1$ функция $x = X(\xi, \dots)$ с заданной степенью гладкости l в точке склейки продолжается полиномом, который строится как разложение в окрестности точки ξ_0 по формуле Тейлора функции $X(\xi, \dots)$ со специальным остаточным членом, сформированной по функции и ее производным, явно определяемым. Затем построенная таким образом составная функция нормируется к значению $X(1, \dots)$, в результате получается отображение $x = \phi(\xi, \dots) = X(\xi, \dots)/X(1, \dots)$ на единичный отрезок, которое генерирует сетку на отрезке $0 \leq x \leq 1$. При этом узлы исходной сетки, расположенные левее точки ξ_0 , отображаются в слой, а остальные узлы отображаются в область вне слоя. Очевидно, при равномерной исходной сетке число ξ_0 означает долю числа шагов сетки, попадающих в слой. В случае $\xi_0 = 1$ функция $x = \phi(\xi, \dots)$ определяется на всем промежутке без склейки с полиномом, это иногда целесообразно в случае логарифмических и смешанных слоев.

3. Результаты численных экспериментов

Все численные эксперименты проведены на тестовой задаче

$$-\varepsilon u_{xx} - u_x + (2x + 1)u = \sin(\pi x), \quad u(0) = 0, \quad u(1) = 0.$$

Коэффициент при первой производной отрицателен и отделен от нуля, поэтому (см. [17]) около нуля решение имеет единственный экспоненциальный пограничный слой масштаба $k = 1$. Результаты расчета на сетке с числом шагов $N = 20$ при вязкости $\varepsilon = 10^{-3}$ и значениях параметров преобразования $a = 2$, $\xi_0 = 0.5$, $l = 1$, $n = 2$ приведены на рис. 1. Сплошными линиями изображено точное решение в исходных физических $u(x)$ и в новых $U(\xi) = u(x(\xi))$ переменных, а решения разностных схем изображены пунктирами и маркерами в новых переменных. Результаты в полной мере соответствуют ожиданиям.

Противопоточная схема (2) и схема с центральной разностью (3) имеют большие ошибки всюду, причем последняя сильно осциллирует, схема Булеева (4) точнее в слое, чем вне слоя, а модифицированная схема (5) — наоборот. Комбинация модифицированной схемы со схемой с центральной разностью несколько точнее однородной модифицированной схемы. Но лучше всех других результатов выглядит расчет по гибридной схеме, составленной из схемы Булеева и модифицированной противопоточной схемы. На рис. 2 представлены результаты решения этой же задачи, но на сетке с удвоенным числом шагов. Результаты расчетов на более детальной сетке расположились более компактно, однако легко заметить, что и здесь схемы ранжируются по точности в том же порядке.

В табл. 1 приведены оценки ошибок в C -норме, полученные по четырем однородным схемам и двум гибридным — модифицированной вне слоя, скомбинированной в слое со схемой с центральными разностями (комбинация 1) или со схемой Булеева (комбинация 2). Из таблицы видно, что результаты по гибридным схемам точнее результатов по однородным схемам, причем наиболее точной оказалась вторая гибридная схема.

В табл. 2 даны результаты серии расчетов, проведенной для этой же задачи по всем вышеперечисленным схемам на сетках с довольно большим, но фиксированным числом шагов $N = 640$. Переменным в этой серии является стремящийся к нулю параметр вязкости ε . Из табл. 2 видно, что по всем схемам, за исключением схемы с центральной разностью, ошибки крайне слабо зависят от значения ε , что свидетельствует об их равномерной сходимости по малому параметру. Схема с центральной разностью при

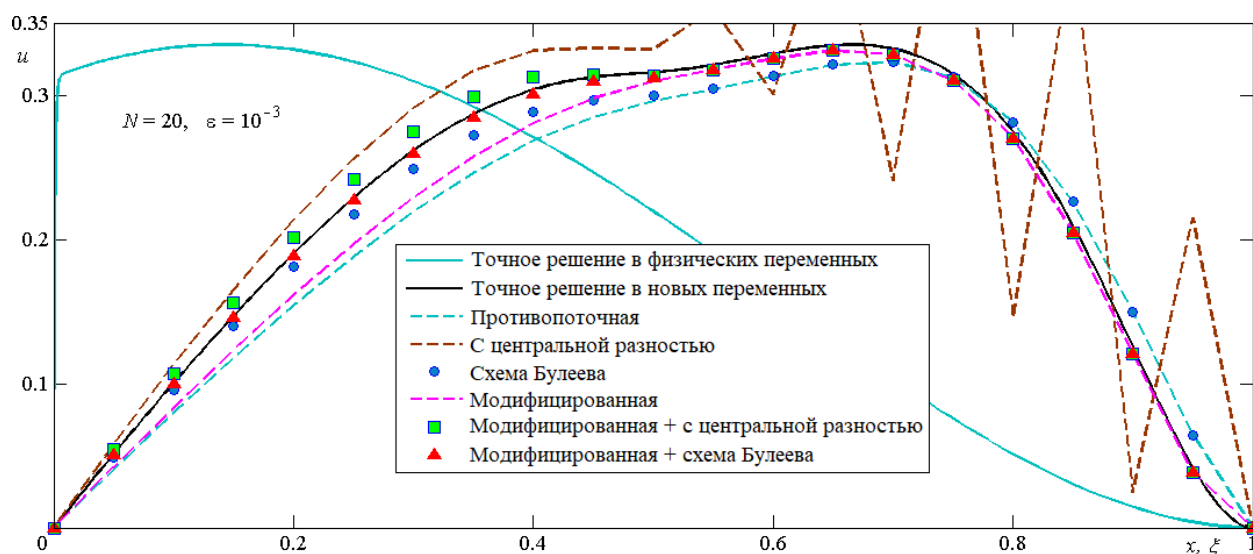
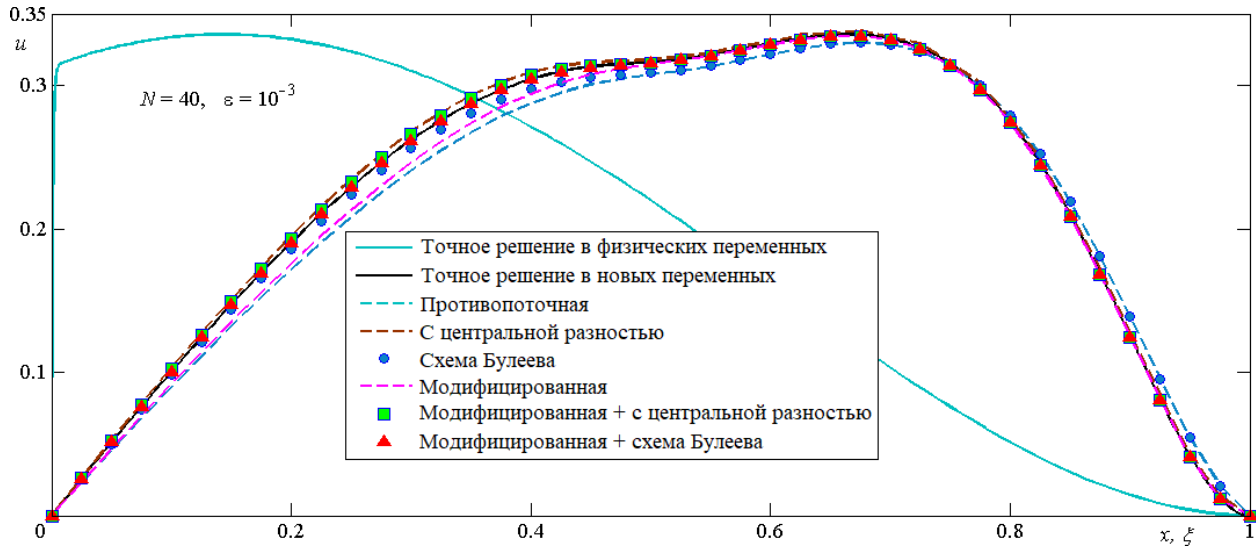


Рис. 1. Расчет экспоненциального слоя на сетке с $N = 20$

Fig. 1. Calculation of the exponential layer on a grid with $N = 20$

Рис. 2. Расчет экспоненциального слоя на сетке с $N = 40$ Fig. 2. Calculation of the exponential layer on a grid with $N = 40$ Т а б л и ц а 1. Оценки ошибок на сгущающихся сетках при $\varepsilon = 10^{-3}$ Table 1. Error estimates on condensing grids at $\varepsilon = 10^{-3}$

N	Противо- поточная	Модифици- рованная	Центрально- разностная	Схема Булеева	Комбинация 1	Комбинация 2
20	3.24e-01	3.29e-01	3.32e-01	3.24e-01	3.29e-01	3.29e-01
40	2.10e-02	1.67e-02	1.93e-01	1.09e-02	9.47e-03	3.55e-03
80	1.10e-02	8.38e-03	3.75e-03	6.58e-03	2.38e-03	8.96e-04
160	5.58e-03	4.17e-03	9.76e-04	3.58e-03	6.03e-04	2.36e-04
320	2.81e-03	2.08e-03	2.48e-04	1.85e-03	1.47e-04	6.96e-05
640	1.41e-03	1.04e-03	6.23e-05	9.20e-04	3.43e-05	2.11e-05
1280	7.06e-04	5.19e-04	1.56e-05	4.30e-04	7.41e-06	6.79e-06

Т а б л и ц а 2. Оценки ошибок при $\varepsilon \rightarrow 0$ на сетках с 640 шагамиTable 2. Error estimates at $\varepsilon \rightarrow 0$ on grids with 640 steps

ε	Противо- поточная	Модифици- рованная	Центрально- разностная	Схема Булеева	Комбинация 1	Комбинация 2
10^{-2}	1.22e-03	9.38e-04	6.37e-05	3.84e-04	1.62e-04	1.72e-04
10^{-4}	1.47e-03	1.07e-03	6.88e-05	9.98e-04	3.85e-05	1.68e-05
10^{-6}	1.50e-03	1.09e-03	3.05e-01	1.02e-03	3.84e-05	1.70e-05
10^{-8}	1.50e-03	1.10e-03	4.60e+00	1.02e-03	3.84e-05	1.71e-05
10^{-10}	1.51e-03	1.10e-03	4.60e+00	1.02e-03	3.84e-05	1.71e-05

Т а б л и ц а 3. Оценки порядка точности при $\varepsilon \rightarrow 0$ на сетках с 640 шагамиTable 3. Accuracy order estimates at $\varepsilon \rightarrow 0$ on grids with 640 steps

ε	Противо- поточная	Модифици- рованная	Центрально- разностная	Схема Булеева	Комбинация 1	Комбинация 2
1.0e-02	0.990	0.996	1.993	1.508	1.018	1.099
1.0e-04	0.995	1.002	10.552	0.966	1.996	1.888
1.0e-06	0.994	1.001	3.893	0.963	1.979	1.910
1.0e-08	0.994	1.001	0.813	0.963	1.888	1.911
1.0e-10	0.994	1.001	0.813	0.963	1.774	1.911

умеренной вязкости имеет неплохую точность, однако при уменьшении вязкости теряет ее ввиду нарушения диагонального преобладания. Точность второй гибридной схемы более чем вдвое выше точности первой.

В табл. 3 приведены апостериорные оценки порядка точности, достигнутого различными схемами на сетках равной мощности, в широком интервале изменения вязкости от 10^{-2} до 10^{-10} . Данные таблицы свидетельствуют об определенной стабильности в целом значений реальных порядков точности при изменении вязкости и об их соответствии теоретическим ожиданиям, подтверждая равномерную сходимость. Колебания и падение порядка точности центрально-разностной схемы при изменении малого параметра связано с ее немонотонностью, отсутствием равномерной сходимости и поэтому склонностью к осцилляциям.

Заключение

Резюмируя сказанное выше, можно сделать следующие выводы.

1. Первая гибридная схема, предложенная в [13] для частного случая кусочно равномерных адаптивных сеток [3], может успешно применяться также и на специальных неравномерных сетках с более естественным плавным изменением шага сетки в слое. Однако на неравномерных сетках диагональное преобладание аналога центрально-разностной схемы, используемой с слое, не гарантируется автоматически, его необходимо специально контролировать. Эта гибридная схема на сетках [17] имеет второй порядок и в экспериментах дает более точные результаты, чем известные однородные схемы, обнаруживая при этом признаки сходимости, равномерной по малому параметру.
2. Предложенная в данной работе вторая гибридная схема, использующая вместо центрально-разностного аналога схемы монотонную схему Булеева, имеет всюду второй порядок аппроксимации и, как показывают расчеты, несколько превосходит по точности первую гибридную схему. При любых значениях вязкости эта схема всюду имеет безусловное диагональное преобладание, что гарантирует свойство обратной монотонности и, как следствие, равномерную по малому параметру сходимость.
3. Результаты численных экспериментов показали для всех схем с диагональным преобладанием весьма слабую зависимость ошибки от стремящегося к нулю малого параметра и стабильность реальных порядков точности, близких к теоретическим ожиданиям, что свидетельствует о равномерной по ε сходимости схем и подтверждает их порядки точности.
4. Синтез удачно скомбинированных гибридных схем и специальных сеток, построенных с использованием априорной информации о поведении решений в слоях, дает возможность достигать равномерной по ε сходимости со вторым порядком и практически без усложнения алгоритмов существенно повышать реальную точность приближенных решений задач со слоями в широком диапазоне изменения малого параметра.

Благодарности. Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки России для Федерального исследовательского центра информационных и вычислительных технологий.

Список литературы

- [1] **Bakhvalov N.S.** On the optimization of the methods for solving boundary value problems in the presence of a boundary layer. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 1969; 9(4):139–166. DOI:10.1016/0041-5553(69)90038-X.
 - [2] **Vulanovich R.** Mesh construction for numerical solution of a type of singular perturbation problems. *Conference Paper on Numerical Methods and Approximation Theory, Lis, September 26–28; 1985: 137–142.*
 - [3] **Шишкин Г.И.** Разностная схема для сингулярно возмущенного уравнения параболического типа с разрывным начальным условием. *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 1988; 28(11):1649–1662.
 - [4] **Roos H.-G., Stynes M., Tobiska L.** Numerical methods for singularly perturbed differential equations. *Convection-diffusion and flow problems*. N.Y.: Springer; 2010: 604.
 - [5] **Linss T.** Layer-adapted meshes for reaction-convection-diffusion problems. Berlin: Springer Verlag; 2010: 320.
 - [6] **Miller J.J.K., O’Riordan E., Shishkin G.I.** Fitted numerical methods for singular perturbation problems. Singapore, N.J., London, Hong Kong: World Scientific; 2012: 191.
 - [7] **Лисейкин В.Д.** О численном решении уравнений со степенным погранслоем. *Численные методы механики сплошной среды*. 1984; 15(2):90–97.
 - [8] **Лисейкин В.Д.** О численном решении уравнений со степенным пограничным слоем. *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 1986; 26(12):1813–1820.
 - [9] **Liseikin V.D.** Layer resolving grids and transformations for singular perturbation problems. Utrecht: VSP; 2001: 284.
 - [10] **Багаев Б.М., Каропова Е.Д., Шайдуров В.В.** Сеточные методы решения задач с пограничным слоем. Ч. 2. Новосибирск: Наука; 2001: 224.
 - [11] **Булеев Н.И.** О численном решении двумерных уравнений эллиптического типа. *Численные методы механики сплошной среды*. 1975; 6(3):8–28.
 - [12] **Stynes M., Roos H.-G.** The midpoint upwind scheme. *Applied Numerical Mathematics*. 1997; (23):361–374.
 - [13] **Gupta V., Sahoo S.K., Dubey R.K.** Robust higher order finite difference scheme for singularly perturbed turning point problem with two outflow boundary layers. *Computational and Applied Mathematics*. 2021; 40(179):1–23. DOI:10.1007/s40314-021-01564-w.
 - [14] **Лисейкин В.Д., Паасонен В.И.** Компактные разностные схемы и адаптивные сетки для численного моделирования задач с пограничными и внутренними слоями. *Сибирский журнал вычислительной математики*. 2019; 22(1):41–56.
 - [15] **Лисейкин В.Д., Паасонен В.И.** Характер сходимости схем при расчете на адаптивных сетках задач со слоями. *Вычислительные технологии*. 2020; 25(5):66–79. DOI:10.25743/ICT.2020.25.5.006.
 - [16] **Liseikin V.D., Karaculjić S., Paasonen V.I.** Numerical grids and high-order schemes for problems with boundary and interior layers. *Nobosibirsk: Novosibirskiy Gosudarstvennyy Universitet*; 2021: 179.
 - [17] **Liseikin V.D.** Grid generation for problems with boundary and interior layers. *Novosibirsk: Novosibirsk State University*; 2018: 296.
-

Modified upwind and hybrid schemes on special grids for solving layered problemsV. I. PAASONEN^{1,2,*}, V. D. LISEIKIN¹¹Federal Research Center for Information and Computational Technologies, 630090, Novosibirsk, Russia²Novosibirsk State University, 630090, Novosibirsk, Russia*Corresponding author: Viktor I. Paasonen, e-mail: paas@ict.nsc.ru*Received March 03, 2023, revised August 10, 2023, accepted August 17, 2023.***Abstract**

Boundary and interior layers present serious difficulties for the efficient calculation of equations modelling many technical applications, in particular, those having a small parameter before the higher derivatives. Due to this phenomenon, developing uniformly convergent algorithms for solving such problems are difficult.

Resources provided by numerical schemes and adaptive grids can significantly reduce the adverse effects on the accuracy of numerical experiments due to the layers. An efficient and popular scheme for solving two-point singularly-perturbed problems with layers is the upwind difference scheme. However, this scheme provides convergence of the first order only.

In this paper, we are focused on two second-order uniformly convergent finite difference algorithms for solving two-point singularly-perturbed problems. The proposed algorithms apply a hybrid scheme based on the midpoint upwind approximation, Buleev's scheme and special layer-resolving grids designed for solving problems with exponential and power layers of the first type.

Numerical experiments conducted out for singularly perturbed problems confirm the efficiency of the algorithms for various values of the small parameter and show that the proposed method provides competitive results compared to other methods available in the literature.

Keywords: uniform convergence, adaptive grid, boundary layer, diagonal dominance, upwind scheme, hybrid scheme.

Citation: Paasonen V.I., Liseikin V.D. Modified upwind and hybrid schemes on special grids for solving layered problems. Computational Technologies. 2024; 29(3):70–80. DOI:10.25743/ICT.2024.29.3.006. (In Russ.)

Acknowledgements. The research was carried out within the state assignment of Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation for Federal Research Center for Information and Computational Technologies.

References

1. **Bakhvalov N.S.** On the optimization of the methods for solving boundary value problems in the presence of a boundary layer. USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics. 1969; 9(4):139–166. DOI:10.1016/0041-5553(69)90038-X.
2. **Vulanovich R.** Mesh construction for numerical solution of a type of singular perturbation problems. Conference Paper on Numerical Methods and Approximation Theory, Lis, September 26–28; 1985: 137–142.
3. **Shishkin G.I.** A difference scheme for a singularly perturbed equation of parabolic type with discontinuous boundary condition. USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics. 1988; 28(6):32–41. DOI:10.1016/0041-5553(88)90039-0.
4. **Roos H.-G., Stynes M., Tobiska L.** Numerical methods for singularly perturbed differential equations. Convection-diffusion and flow problems. N.Y.: Springer; 2010: 604.

5. **Linss T.** Layer-adapted meshes for reaction-convection-diffusion problems. Berlin: Springer Verlag; 2010: 320.
6. **Miller J.J.K., O’Riordan E., Shishkin G.I.** Fitted numerical methods for singular perturbation problems. Singapore, N.J., London, Hong Kong: World Scientific; 2012: 191.
7. **Liseikin V.D.** On the numerical solution of equations with a power-law boundary layer. *Chislennyye Methody Mekhaniki Sploshnoy Sredy*. 1984; 15(2):90–97. (In Russ.)
8. **Liseikin V.D.** Numerical solution of equations with a power boundary layer. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 1986; 26(6):133–139.
9. **Liseikin V.D.** Layer resolving grids and transformations for singular perturbation problems. Utrecht: VSP; 2001: 284.
10. **Bagaev B.M., Karepova E.D., Shaydurov V.V.** Setochnyye metody resheniya zadach s pogranichnym sloem. Ch. 2 [Grid methods for solving boundary layer problems. Pt 2]. Novosibirsk: Nauka; 2001: 224. (In Russ.)
11. **Buleev N.I.** On numerical solution of two-dimensional equations of elliptic type. *Chislennyye Methody Mekhaniki Sploshnoi Sredy*. 1975; 6(3):8–28. (In Russ.)
12. **Stynes M., Roos H.-G.** The midpoint upwind scheme. *Applied Numerical Mathematics*. 1997; (23):361–374.
13. **Gupta V., Sahoo S.K., Dubey R.K.** Robust higher order finite difference scheme for singularly perturbed turning point problem with two outflow boundary layers. *Computational and Applied Mathematics*. 2021; 40(179):1–23. DOI:10.1007/s40314-021-01564-w.
14. **Liseikin V.D., Paasonen V.I.** Compact difference schemes and layer resolving grids for numerical modeling of problems with boundary and interior layers. *Numerical Analysis and Applications*. 2019; 12(1):37–50.
15. **Liseikin V.D., Paasonen V.I.** Convergence behavior of popular schemes in case of calculating on adaptive grids problems with layers. *Computational Technologies*. 2020; 25(5):66–79. DOI:10.25743/ICT.2020.25.5.006. (In Russ.)
16. **Liseikin V.D., Karaculjić S., Paasonen V.I.** Numerical grids and high-order schemes for problems with boundary and interior layers. Novosibirsk: Novosibirskiy Gosudarstvennyy Universitet; 2021: 179.
17. **Liseikin V.D.** Grid generation for problems with boundary and interior layers. Novosibirsk: Novosibirsk State University; 2018: 296.