
МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

DOI:10.25743/ICT.2024.29.3.002

Гиперзвуковой пограничный слой при полете в атмосфере Марса

Ю. Н. ГРИГОРЬЕВ^{1,*}, И. В. ЕРШОВ^{1,2}, А. Г. ГОРОБЧУК^{1,3}

¹Федеральный исследовательский центр информационных и вычислительных технологий,
630090, Новосибирск, Россия

²Новосибирский государственный аграрный университет, 630039, Новосибирск, Россия

³Новосибирский государственный университет, 630090, Новосибирск, Россия

*Контактный автор: Григорьев Юрий Николаевич, e-mail: grigor@ict.nsc.ru

Поступила 27 июля 2023 г., доработана 29 августа 2023 г., принята в печать 19 сентября 2023 г.

Исследуется структура пограничного слоя на плоской поверхности в условиях посадки на Марс. Вводится двухтемпературная модель колебательно возбужденной диссоциирующей трехкомпонентной газовой смеси CO_2 , CO , O , позволяющая адекватно воспроизвести основные характеристики гиперзвукового полета в атмосфере Марса. Для двух точек траектории посадки на Марс выполнены расчеты плоского пограничного слоя на пластине с изотермической некаталитической поверхностью. Выполнено сравнение профилей газодинамических величин, рассчитанных на основе локально автомодельных уравнений с профилями, полученными конечно-разностным методом на основе полных уравнений пограничного слоя. Показано, что с точностью, приемлемой для последующих расчетов устойчивости, имеет место выход профилей, полученных из полных уравнений, на локально автомодельные решения. Проведено сравнение фазовых скоростей нейтральных (растущих) возмущений, вычисленных на основе известного критерия “обобщенной” точки перегиба и соответствующего обобщения, явно учитывающего условия развитой диссоциации.

Ключевые слова: атмосфера Марса, гиперзвуковой пограничный слой, диссоциация, локально автомодельные решения, конечно-разностная схема, численные расчеты.

Цитирование: Григорьев Ю.Н., Ершов И.В., Горобчук А.Г. Гиперзвуковой пограничный слой при полете в атмосфере Марса. Вычислительные технологии. 2024;29(3):5–24. DOI:10.25743/ICT.2024.29.3.002.

Введение

Во многих специальных исследованиях [1] прогнозируется, что в следующем десятилетии начнутся пилотируемые полеты к Марсу. Эскизные проекты обитаемых космических аппаратов (КА), предназначенных для посадки на планету, показывают, что в любом случае это будут конструкции с характерными размерами в десятки метров. Подобные КА как на траектории баллистического спуска при однократном проходе в атмосфере Марса, так и при многократном ее пересечении в процессе построения круговой орбиты или плавного спуска (aerobraking) будут использовать аэродинамическое торможение. При этом на характерных для них протяженных поверхностях малой кри-

визны за головной ударной волной будут развиваться гиперзвуковые пограничные слои (ПС).

Несмотря на разреженность и низкую температуру атмосферы Марса, более 95 % которой составляет углекислый газ CO_2 , высокие скорости на траектории посадки в пределах 2–6 км/с определяют высокие температуры в ПС за ударной волной, существенно превышающие температуру полной диссоциации CO_2 . В пограничных слоях возникает многокомпонентная термодинамически неравновесная смесь атомов и колебательно возбужденных молекул, для учета свойств которой необходимо выбрать адекватную физико-математическую модель.

В статье для расчетов устойчивости ПС в условиях посадки на Марс предлагается использовать двухтемпературную трехкомпонентную модель $\text{CO}_2 - \text{CO} - \text{O}$, которая в сравнительных расчетах аэродинамических характеристик конического КА [2] показала малое отличие от более сложных моделей. Приводится необходимая параметризация модели, представлена полная система уравнений ПС, а также соответствующая система локально автомодельных уравнений. Для двух точек траектории посадки аппарата Pathfinder на Марс, рассматриваемых как последовательные точки входа в процессе aerobraking, выполнены расчеты плоского ПС на изотермической некаталитической поверхности. Проведено сравнение профилей газодинамических величин, полученных на основе локально автомодельных уравнений с профилями, расчетанными конечно-разностным методом на основе полных уравнений ПС. Показано, что имеет место выход профилей, вычисленных из полных уравнений, на локально автомодельные решения. Проведено сравнение фазовых скоростей нейтральных (растущих) возмущений, полученных на основе известного критерия “обобщенной” точки перегиба и соответствующего обобщения, явно учитывающего условия развитой диссоциации.

1. Выбор модели

Разработка общей структуры модели гиперзвукового пограничного слоя колебательно возбужденного диссоциирующего газа выполнена в [3]. Были выбраны представление реакций диссоциации – рекомбинации, форма записи уравнений для поступательно-вращательной и колебательной энергий с детализацией тепловых потоков и вкладов реакций, способы расчета коэффициентов переноса и констант скоростей реакций для характерных высокотемпературных условий. Развитый подход используется для построения модели ПС при гиперзвуковом полете в атмосфере Марса.

Атмосфера Марса состоит почти на 96 % из углекислого газа CO_2 , который дополняют молекулярный азот N_2 (2.7 %) и аргон Ar (1.6 %). В течениях за ударными волнами основную роль играют CO_2 и продукты его диссоциации – углекислый газ CO и атомарный кислород O [4]. Химическая кинетика высокотемпературной смеси $\text{CO}_2 - \text{CO} - \text{O}$ достаточно хорошо изучена. Показано, что основной реакцией является диссоциация – рекомбинация



где M – партнер по соударению, а обменными реакциями в аэродинамических задачах можно пренебречь [2, 4]. Относительно молекул углекислого газа CO_2 можно принять предположение [5], что в результате диссоциации CO_2 молекула CO мгновенно приходит в термодинамическое равновесие со средой, а ее дальнейшую диссоциацию можно не рассматривать. Это объясняется тем, что время релаксации CO много меньше, а харак-

терное время диссоциации значительно больше, чем соответствующие характеристики углекислого газа.

Колебательная кинетика линейной трехатомной молекулы CO_2 существенно сложнее, чем двухатомных молекул [3]. Молекула имеет три колебательные моды — продольные симметричную и асимметричную и дважды вырожденную изгибную, характеризуемые различными временами релаксации. В многотемпературном приближении им соответствуют три колебательные температуры. Близость характерных частот позволяет объединить симметричную и изгибную моды и предложить модель смеси $\text{CO}_2 - \text{CO} - \text{O}$ с двумя колебательными температурами [5].

В [6] получены экспериментальные данные по структуре ударных волн в CO_2 в диапазоне чисел Маха $M = 5-25$ при температурах 2000–6000 К, что соответствует условиям гиперзвуковых маневров посадки КА в атмосфере Марса. По результатам измерений двумя независимыми методами показано, что в исследованном диапазоне параметров разность характерных времен симметричной, изгибной и асимметричной мод не слишком велика, вследствие чего им можно приписать единое характерное время. Это объясняется резонансным взаимодействием мод при высоких температурах, которое подтверждается и в более поздних работах [7]. Для времени релаксации в [6] предложена универсальная зависимость, хорошо коррелирующая с данными других исследователей при более низких температурах.

Приведенные соображения позволяют рассматривать для моделирования гиперзвукового полета в атмосфере Марса высокотемпературную смесь $\text{CO}_2 - \text{CO} - \text{O}$ с одной реакцией диссоциации – рекомбинации (1) и одной колебательной температурой.

2. Уравнения плоского течения реагирующей газовой смеси

Рассматриваются двумерные по пространству уравнения предлагаемой модели смеси $\text{CO}_2 - \text{CO} - \text{O}$ в декартовых координатах. Пусть (x, y) и (u_x, u_y) — декартовы координаты и скорости смеси соответственно вдоль и поперек потока, t — переменная времени. Система газодинамических уравнений записывается в терминах массовой плотности смеси ρ , массовых концентраций компонентов Y_i , удельной массовой плотности поступательно-вращательной энергии e_t и удельной массовой плотности колебательной энергии e_v . Соответствующие уравнения имеют следующий вид.

Уравнение неразрывности смеси в целом:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho u_y}{\partial y} = 0. \quad (2)$$

Уравнения неразрывности компонентов смеси:

$$\rho \left(\frac{\partial Y_i}{\partial t} + u_x \frac{\partial Y_i}{\partial x} + u_y \frac{\partial Y_i}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho D_i \frac{\partial Y_i}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\rho D_i \frac{\partial Y_i}{\partial y} \right) + W_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad (3)$$

$$\sum_{i=1}^3 Y_i = \sum_{i=1}^3 \frac{\rho_i}{\rho}. \quad (4)$$

Здесь и далее индексы $i = 1, 2, 3$ обозначают компоненты CO_2 , CO , O соответственно; W_i — массовые скорости производства частиц компоненты i .

Уравнения импульсов для смеси

$$\rho \left(\frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y}, \quad (5)$$

$$\rho \left(\frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y}, \quad (6)$$

где компоненты тензора вязких напряжений определяются соотношениями

$$\sigma_{xx} = 2\eta \frac{\partial u_x}{\partial x} + \left(\eta_b - \frac{2}{3}\eta \right) \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right), \quad \sigma_{yy} = 2\eta \frac{\partial u_y}{\partial y} + \left(\eta_b - \frac{2}{3}\eta \right) \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right),$$

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yx} = \eta \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right), \quad (7)$$

η, η_b — коэффициенты сдвиговой и объемной вязкости газовой смеси соответственно.

Уравнение для поступательно-вращательной энергии смеси

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial e_t}{\partial t} + u_x \frac{\partial e_t}{\partial x} + u_y \frac{\partial e_t}{\partial y} \right) + p \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \\ + \sigma_{xx} \frac{\partial u_x}{\partial x} + \sigma_{xy} \frac{\partial u_x}{\partial y} + \sigma_{yx} \frac{\partial u_y}{\partial x} + \sigma_{yy} \frac{\partial u_y}{\partial y} &+ \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho D_i h_{t,i} \frac{\partial Y_i}{\partial x} \right) + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial y} \left(\rho D_i h_{t,i} \frac{\partial Y_i}{\partial y} \right) - \\ - \sum_{i=1}^3 h_{0,i} W_i - \rho Y_1 \left(\frac{e_{v,1}(T) - e_{v,1}(T_v)}{\tau_1} \right) &- e_{v,1} W_1. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь

$$e_t = \sum_{i=1}^3 Y_i e_{t,i} = \sum_{i=1}^3 Y_i c_{V,i} T$$

— массовая плотность поступательно-вращательной энергии смеси;

$$h_{t,i} = \left(c_{V,i} + \frac{R_0}{M_i} \right) T = c_{p,i} T$$

— энталпия компоненты i ; $h_{0,i}$ — стандартная энталпия образования компоненты i ; T — статическая (поступательная) температура потока; λ — коэффициент теплопроводности смеси, соответствующий молекулярному переносу поступательно-вращательной энергии частиц; R_0 — универсальная газовая постоянная; M_i — молекулярная масса компоненты i . Теплоемкости компонентов при постоянном объеме определяются как

$$\begin{aligned} c_{V,1} &= c_{V,CO_2} = c_{V,1}^{tr} + c_{V,1}^{\text{rot}} = \frac{3R_0}{2M_1} + \frac{R_0}{M_1} = \frac{5R_0}{2M_1}, \\ c_{V,2} &= c_{V,CO} = c_{V,2}^{tr} + c_{V,2}^{\text{rot}} + c_{V,2}^{vib} = \frac{3R_0}{2M_2} + \frac{R_0}{M_2} + \frac{R_0}{M_2} = \frac{7R_0}{2M_2}, \\ c_{V,3} &= c_{V,O} = c_{V,3}^{tr} = \frac{3R_0}{2M_3}. \end{aligned}$$

Предполагается, что при диссоциации молекулы CO_2 после столкновения с партнёром образовавшаяся в результате столкновения молекула CO характеризуется равнораспределением энергии по степеням свободы при статической температуре потока T . Энергия ее колебательной моды $e_{v,\text{CO}}$ определяется как

$$e_{v,2} = e_{v,\text{CO}} = \frac{R_0 T}{M_2}.$$

Уравнение для колебательной энергии CO_2

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial Y_1 e_{v,1}}{\partial t} + u_x \frac{\partial Y_1 e_{v,1}}{\partial x} + u_y \frac{\partial Y_1 e_{v,1}}{\partial y} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_v \frac{\partial T_v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda_v \frac{\partial T_v}{\partial y} \right) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho D_1 e_{v,1} \frac{\partial Y_1}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\rho D_1 e_{v,1} \frac{\partial Y_1}{\partial y} \right) + \rho Y_1 \left(\frac{e_{v,1}(T) - e_{v,1}(T_v)}{\tau_1} \right) + e_{v,1} W_1, \end{aligned} \quad (9)$$

где T_v — колебательная температура компонента CO_2 ; λ_v — коэффициент теплопроводности, соответствующий переносу энергии ее колебательных квантов.

Уравнение состояния газовой смеси

$$p = \sum_{i=1}^3 \frac{\rho_i R_0 T}{M_i} = \rho R_0 T \left(\frac{Y_1}{M_1} + \frac{Y_2}{M_2} + \frac{Y_3}{M_3} \right) = \frac{\rho R_0 T}{M_{mix}}, \quad (10)$$

где молярная масса смеси

$$M_{mix} = \left(\sum_{i=1}^3 \frac{Y_i}{M_i} \right)^{-1}.$$

3. Параметризация модели

3.1. Коэффициенты переноса

Коэффициент сдвиговой вязкости компоненты смеси i вычисляется на основе модели вязкости Блотнера, обеспечивающей хорошую точность при температурах до 10^4 К [8]. Соответствующие формулы имеют вид

$$\eta_i = 0.1 \exp [(A_i \ln T + B_i) \ln T + C_i], \quad i = 1, 2, 3,$$

где A_i , B_i , C_i — константы для CO_2 , CO и O , значения которых приведены в табл. 1.

Коэффициенты теплопроводности компонент λ_i , соответствующие молекулярному переносу поступательно-вращательной энергии частиц, вычисляются с использованием модифицированных соотношений Эйкена [9]

Т а б л и ц а 1. Коэффициенты A_i , B_i и C_i вязкой модели Блотнера
Table 1. Coefficients A_i , B_i and C_i for the Blotner viscous model

Компонент смеси	A_i	B_i	C_i
CO_2	-0.01952739	1.047818	-14.32212
CO	-0.01952739	1.013295	-13.97873
O	0.02031440	0.429440	-11.60314

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \left(\frac{5}{2}c_{V,1}^{tr} + \frac{6}{5}c_{V,1}^{rot} \right) \eta_1 = \left[\frac{5}{2} \left(\frac{3R_0}{2M_1} \right) + \frac{6}{5} \frac{R_0}{M_1} \right] \eta_1 = \left(\frac{99R_0}{20M_1} \right) \eta_1, \\ \lambda_2 &= \left(\frac{5}{2}c_{V,2}^{tr} + \frac{6}{5}c_{V,2}^{rot} + \frac{6}{5}c_{V,2}^{vib} \right) \eta_2 = \left[\frac{5}{2} \left(\frac{3R_0}{2M_2} \right) + \frac{6}{5} \frac{R_0}{M_2} + \frac{6}{5} \frac{R_0}{M_2} \right] \eta_2 = \left(\frac{123R_0}{20M_2} \right) \eta_2, \\ \lambda_3 &= \frac{5}{2}c_{V,3}^{tr} \eta_3 = \frac{5}{2} \left(\frac{3R_0}{2M_3} \right) \eta_2 = \left(\frac{15R_0}{4M_3} \right) \eta_3.\end{aligned}$$

Коэффициент теплопроводности, соответствующий переносу энергии колебательных квантов CO₂, выражается как

$$\lambda_v = \frac{6}{5}c_{V,1}^{vib} \eta_1, \quad c_{V,1}^{vib} = \frac{de_{v,1}}{dT_v}.$$

Коэффициенты диффузии D_i принимаются одинаковыми для всех компонент.

Для вычисления коэффициентов вязкости η и теплопроводности λ смеси используются полуэмпирические формулы Вильке [10]:

$$\mathbf{f} = \sum_{i=1}^3 \frac{X_i \mathbf{f}_i}{\phi_i}, \quad \phi_i = \sum_{j=1}^3 \frac{X_j \left[1 + \sqrt{\mathbf{f}_i / \mathbf{f}_j} (M_j / M_i)^{1/4} \right]^2}{\sqrt{8(1 + M_i / M_j)}}, \quad \mathbf{f} = (\eta, \lambda), \quad \mathbf{f}_i = (\eta_i, \lambda_i), \quad X_i = \frac{Y_i M_{\text{mix}}}{M_i}.$$

3.2. Процессы диссоциации – рекомбинации

Принимается, что для рассматриваемых здесь реакций по схеме (1) константы скоростей прямой k_f и обратной k_b реакций не зависят от вида партнера по столкновению и определяются формулами [11]

$$k_f = C_f T^f \exp(\theta_f / T), \quad k_b = C_b T^b \exp(\theta_b / T),$$

где размерность константы скорости диссоциации k_f – м³(кмоль·с)⁻¹, размерность константы скорости рекомбинации k_b – м⁶(кмоль²·с)⁻¹.

Массовые скорости производства компонент вида выражаются как

$$W_1 = -M_1 \left(k_f \frac{\rho_1}{M_1} - k_b \frac{\rho_2}{M_2} \frac{\rho_3}{M_3} \right) \left(\frac{\rho_1}{M_1} + \frac{\rho_2}{M_2} + \frac{\rho_3}{M_3} \right), \quad W_2 = -\frac{M_2}{M_1} W_1, \quad W_3 = -\frac{M_3}{M_1} W_1.$$

Значения коэффициентов скоростей химических реакций и стандартные энталпии образования компонентов смеси представлены в табл. 2 [11] и табл. 3 [12] соответственно.

Т а б л и ц а 2. Коэффициенты скоростей химических реакций

Table 2. Coefficients of chemical reaction rate

C_f	f	θ_f	C_b	b	θ_b
$3.70 \cdot 10^{11}$	0.0	52 500	$6.10 \cdot 10^3$	0.75	-10 240

Т а б л и ц а 3. Стандартные энталпии образования

Table 3. The standard formation enthalpies

Компонент смеси	CO ₂	CO	O
$h_{0,i}$, кДж/моль	-393.51	-110.52	249.18

Т а б л и ц а 4. Характеристические температуры колебательных мод молекулы CO₂
Table 4. The characteristic temperatures of vibrational modes for CO₂ molecule

Мода	1	2	3
$\theta_{v,1}^{(i)}$, K	1903	945	3329

3.3. Колебательная кинетика

Колебательная энергия молекулы CO₂ вычисляется в приближении гармонического осциллятора [9]. Массовая плотность суммарной колебательной энергии симметричной, дважды вырожденной изгибной и антисимметричной мод вычисляется по формуле

$$e_{v,1} = \frac{R_0}{M_1} \left[\frac{\theta_{v,1}^{(1)}}{\exp(\theta_{v,1}^{(1)}/T_v) - 1} + \frac{2\theta_{v,1}^{(2)}}{\exp(\theta_{v,1}^{(2)}/T_v) - 1} + \frac{\theta_{v,1}^{(3)}}{\exp(\theta_{v,1}^{(3)}/T_v) - 1} \right],$$

где $\theta_{v,1}^{(i)}$ ($i = 1, 2, 3$) – характеристические температуры колебательных мод, значения которых приведены в табл. 4 [11].

Время колебательной релаксации τ_1 рассчитывается в соответствии с зависимостью, предложенной в [6]:

$$p\tau_1 = \exp(36.5T^{-1/3} - 17.71),$$

где τ_1 вычисляется в секундах, давление p определяется в атмосферах.

4. Уравнения пограничного слоя реагирующей газовой смеси

Для перехода от исходной системы (2)–(10) к безразмерным уравнениям пограничного слоя в приближении Прандтля производится обезразмеривание с использованием следующих характерных величин:

$$\begin{aligned} x \rightarrow L, \quad y \rightarrow \delta, \quad u_x \rightarrow U_\infty, \quad u_y \rightarrow \delta \frac{U_\infty}{L}, \quad t \rightarrow \frac{L}{U_\infty}, \quad \rho \rightarrow \rho_\infty, \quad T, T_v \rightarrow T_\infty, \quad W_i \rightarrow \frac{\rho_\infty^2 C_f}{M_1}, \\ p \rightarrow \rho_\infty U_\infty^2, \quad \eta, \quad \eta_i \rightarrow \eta_{1\infty}, \quad \lambda, \quad \lambda_i \rightarrow \lambda_{1\infty}, \quad e_t, e_{t,i}, e_{v,1}, h_{t,i}, h_{0,i} \rightarrow \frac{R_0 T_\infty}{M_1}, \quad \delta = \sqrt{\frac{\eta_{1\infty} L}{\rho_\infty U_\infty}}. \end{aligned} \quad (11)$$

Вводятся характерное время процесса релаксации

$$\tau_{1\infty} = p_\infty^{-1} \exp(36.5T_\infty^{-1/3} - 17.71)$$

и характерное время химической реакции

$$\tau_{R\infty} = \frac{M_1}{\rho_\infty C_f}.$$

Индексом “ ∞ ” обозначены соответствующие значения величин на условной верхней границе ПС.

В случае асимптотического вывода уравнений ПС в (11) для продольной координаты x выбран масштаб длины L и масштаб δ для поперечной координаты y , для которых принимается, что $\delta \ll L$. Для масштабов соответствующих скоростей u_x, u_y выбирается

аналогичное отношение. В обезразмеренной с помощью (11) исходной системе сохраняются только члены нулевого порядка по δ . В результате система ПС, в которой для безразмерных переменных используются исходные обозначения, в стационарном безградиентном случае имеет вид

$$\frac{\partial \rho u_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho u_y}{\partial y} = 0, \quad (12)$$

$$\rho u_x \frac{\partial Y_i}{\partial x} + \rho u_y \frac{\partial Y_i}{\partial y} = \frac{1}{Sc} \frac{\partial}{\partial y} \left(\eta \frac{\partial Y_i}{\partial y} \right) + W_i, \quad \sum_{i=1}^3 Y_i = \sum_{i=1}^3 \frac{\rho_i}{\rho}, \quad (13)$$

$$\rho u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + \rho u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\eta \frac{\partial u_x}{\partial y} \right), \quad (14)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \rho u_x \frac{\partial e_t}{\partial x} + \rho u_y \frac{\partial e_t}{\partial y} + \gamma(\gamma-1)M^2 p \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) &= \frac{7}{2Pr} \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \gamma(\gamma-1)M^2 \eta \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} \right)^2 + \\ + \frac{1}{Sc} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial y} \left(\eta c_{p,i} T \frac{\partial Y_i}{\partial y} \right) - Da_R \sum_{i=1}^3 h_{0,i} W_i - Da_{VT} \rho Y_1 \left(\frac{e_{v,1}(T) - e_{v,1}(T_v)}{\tau_1} \right) - Da_R e_{v,1} W_1, \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \rho u_x \frac{\partial Y_1 e_{v,1}}{\partial x} + \rho u_y \frac{\partial Y_1 e_{v,1}}{\partial y} &= \frac{6}{5} \frac{\partial}{\partial y} \left(\eta_1 \frac{\partial T_v}{\partial y} \right) + \\ + \frac{1}{Sc} \frac{\partial}{\partial y} \left(\eta e_{v,1} \frac{\partial Y_1}{\partial y} \right) + Da_{VT} \rho Y_1 \left(\frac{e_{v,1}(T) - e_{v,1}(T_v)}{\tau_1} \right) + Da_R e_{v,1} W_1, \end{aligned} \quad (17)$$

$$\rho T = \frac{M_{mix}}{M_{mix,\infty}}, \quad (18)$$

где

$$\begin{aligned} W_1 &= -\rho^2 \left(Y_1 f(T) - \rho b(T) \left[\frac{\rho_\infty C_b}{C_f M_1} \right] \frac{Y_2 M_1}{M_2} \frac{Y_3 M_1}{M_3} \right) \left(Y_1 + \frac{Y_2 M_1}{M_2} + \frac{Y_3 M_1}{M_3} \right), \\ W_2 &= -\frac{M_2}{M_1} W_1, \quad W_3 = -\frac{M_3}{M_1} W_1, \quad M_{mix,\infty} = \left(\sum_{i=1}^3 \frac{Y_{i,\infty}}{M_i} \right)^{-1}. \end{aligned}$$

Входящие в систему (12)–(18) критерии подобия определены следующим образом: число Шмидта

$$Sc = \frac{\eta_\infty}{\rho_\infty D_\infty};$$

число Маха

$$M = \frac{U_\infty}{\sqrt{\gamma R_0 T_\infty / M_1}}, \quad \gamma = \frac{c_{p,1}}{c_{V,1}};$$

числа Дамкеллера химической реакции и релаксационое соответственно

$$Da_R = \frac{L}{U_\infty \tau_{R\infty}}, \quad Da_{VT} = \frac{L}{U_\infty \tau_{1\infty}};$$

число Прандтля

$$Pr = \frac{c_{p,1} \eta_{1\infty}}{\lambda_{1\infty}}.$$

Для смеси CO₂, CO, O принималось [13]: Sc = 0.5, Pr = 0.707, γ = 1.4. В уравнении состояния (18) учтено равенство (15), определяющее постоянство давления поперек ПС.

5. Численные методы

Для численных расчетов профилей газодинамических параметров ПС использованы два альтернативных метода [3]. В расчетах устойчивости ПС для получения профилей газодинамических величин стационарного течения зачастую используется переход от полной системы уравнений (12)–(18) к системе локально автомодельных уравнений [14]. В последние годы при учете реальных свойств газов в расчетах невозмущенного течения стали использоваться численные схемы для полных уравнений ПС и расширенных уравнений Навье–Стокса, как оригинальные авторские, так и в рамках коммерческих пакетов.

5.1. Локально автомодельные уравнения

Преимущество локально автомодельных решений связано с простотой их расчета из системы обыкновенных дифференциальных уравнений, параметризованных по продольной координате x . В работах [3, 15] показано, что для химически реагирующих потоков может отсутствовать выход численных решений полных уравнений ПС (12)–(18) на локально автомодельные профили концентраций и даже просто сходимость последних к некоторым стационарным профилям. Тем не менее локально автомодельные решения можно использовать в предварительных расчетах устойчивости для простых моделей с одной химической реакцией или в качестве начальных данных для численных расчетов полной системы ПС.

Вывод локально автомодельных уравнений ПС из системы (12)–(18) аналогичен выводу автомодельных уравнений для однокомпонентного колебательно возбужденного газа [16]. Для двухатомного колебательно возбужденного диссоциирующего газа соответствующая система представлена в [3]. В данном случае система уравнений ПС в записи (12)–(18) является переопределенной. С вычислительной точки зрения с целью упрощения расчетов целесообразно отказаться от уравнения (13) при $i = 3$ для атомарного кислорода, концентрацию которого Y_3 можно определять из равенства $Y_3 = 1 - Y_1 - Y_2$.

При выводе системы локально автомодельных уравнений стационарное уравнение неразрывности (12) удовлетворяется тождественно. В принятой безразмерной форме система имеет вид

$$(\rho\eta Y'_i)' + \text{Sc}\varphi Y'_i + \text{Sc}\text{Da}_R \left(\frac{4\xi W_i}{\rho} \right) = 0, \quad i = 1, 2, \quad (19)$$

$$(\rho\eta\varphi'')' + \varphi\varphi'' = 0, \quad (20)$$

$$(\rho\lambda T')' + \frac{2\text{Pr}}{7}\varphi \sum_{i=1}^3 (Y_i c_{p,i} T)' + \left(\frac{\gamma \text{Pr} M^2}{14} \right) \rho\eta\varphi''^2 + \left(\frac{2\text{Pr}}{7\text{Sc}} \right) \sum_{i=1}^3 (\rho\eta c_{p,i} T Y'_i)' - \\ - \left(\frac{8\xi \text{Pr}}{7\rho} \right) \left[\text{Da}_R \sum_{i=1}^3 h_{0,i} W_i + \text{Da}_{VT} \rho Y_1 \left(\frac{e_{v,1}(T) - e_{v,1}(T_v)}{\tau_1} \right) + \text{Da}_R e_{v,1} W_1 \right] = 0, \quad (21)$$

$$(\rho\eta_1 e'_{v,1})' + \frac{5}{6}\varphi(Y_1 e_{v,1})' + \frac{5}{6\text{Sc}}\varphi(\rho\eta Y'_1 e_{v,1})' + \\ + \left(\frac{10\xi}{3\rho} \right) \left[\text{Da}_{VT} \rho Y_1 \left(\frac{e_{v,1}(T) - e_{v,1}(T_v)}{\tau_1} \right) + \text{Da}_R e_{v,1} W_1 \right] = 0 \quad (22)$$

и замыкается уравнением состояния (18). Штрихи в уравнениях (19)–(22) означают дифференцирование по поперечной автомодельной координате

$$\zeta = \frac{\mu}{2\sqrt{\xi}}, \quad (23)$$

величины

$$\xi = x, \quad \mu = \int_0^y \rho(z) dz$$

представляют собой переменные Дородницина–Хоуарта [17], вспомогательная функция, связанная с функцией тока, записывается как

$$\varphi(\zeta) = 2 \int_0^\zeta U(z) dz.$$

Видно, что уравнение импульсов (20) совпадает с соответствующим автомодельным уравнением для совершенного газа [17], а в остальные уравнения координата $\xi \equiv x$ входит как параметр, что придает им локально автомодельную форму.

Для численных расчетов локально автомодельных решений система (18), (19)–(22) приводится к нормальной форме введением вспомогательных функций

$$\begin{aligned} Z_1 &= \varphi, & Z_2 &= \varphi', & Z_3 &= \varphi'', & Z_4 &= Y_1, & Z_5 &= Y'_1, & Z_6 &= Y_2, & Z_7 &= Y'_2, \\ Z_8 &= T, & Z_9 &= T', & Z_{10} &= T_v, & Z_{11} &= T'_v. \end{aligned}$$

Для полученной нормальной системы методом “стрельбы” на интервале $[0, \delta]$ с помощью процедуры Рунге–Кутты четвертого порядка решается двухточечная краевая задача. Точкой “прицеливания” служит середина интервала $\zeta_c = \delta/2$, где требовалось совпадение значений вычисляемых величин с точностью до 10^{-8} .

5.2. Численная схема для полной системы уравнений ПС

Для численного решения полной системы уравнений стационарного ПС используется обобщение алгоритма, предложенного авторами [18] для случая простого совершенного газа. В работах [3, 16] алгоритм был применен для модели колебательно возбужденного и двухатомного диссоциирующего газа.

Вычислительная трудоемкость данной численной схемы значительно больше, чем схемы Рунге–Кутты для системы (18), (19)–(22). Поэтому для ее реализации кроме предложенного выше сокращения системы (12)–(18) следует использовать возможность ее дальнейшего упрощения. Хотя при диссоциации CO_2 в отличие от двухатомной молекулы образуются разные компоненты, их молярные концентрации остаются равными:

$$\frac{Y_2}{M_2} = \frac{Y_3}{M_3} = C_M.$$

При этом уравнение состояния (18) можно переписать в виде

$$\rho T = \frac{1}{M_{mix,\infty}} \left(\frac{Y_1}{M_1} + 2C_M \right)$$

и получить отсюда выражение

$$C_M = \frac{1}{2} \left(\rho T M_{mix,\infty} - \frac{Y_1}{M_1} \right).$$

Безразмерная скорость производства CO_2 выражается как

$$W_1 = -\rho^2 M_1^2 \left[\frac{Y_1}{M_1} f(T) - \rho b(T) \left(\frac{\rho_\infty C_b}{C_f} \right) C_M^2 \right] \left(\frac{Y_1}{M_1} + 2C_M \right).$$

Подставив в W_1 выражение для C_M , получаем из (13) замкнутое относительно Y_1/M_1 уравнение. Таким образом, система (12)–(18) сокращается еще на одно уравнение, что эквивалентно переходу к случаю двухатомного газа [3].

В любом варианте сокращенная система полных уравнений ПС может быть представлена в обобщенном виде

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} = 0, \quad (24)$$

$$a_i \frac{\partial f_i}{\partial x} + b_i \frac{\partial f_i}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(g_i \frac{\partial f_i}{\partial y} \right) + h_i f_i + d_i. \quad (25)$$

Здесь уравнения (13), (14), (16), (17) записаны в форме системы квазилинейных параболических уравнений, в которых переменной времени (маршевой) служит продольная координата x . Для этого уравнения (16), (17) с помощью подстановки выражений для плотностей внутренней и колебательной энергий разрешаются относительно производных статической и колебательной температур по переменным (x, y) . Кроме того, в предположении относительной малости вклада от диффузионных потоков соответствующие члены формально включаются в свободные слагаемые d_3, d_4, d_5 .

Для аппроксимации уравнений (25) используется явно-неявная конечно-разностная схема Кранка–Николсон [18], реализуемая на основной и вспомогательной прямоугольных сетках с целыми и полуцелыми индексами узлов. Схема приводится к виду

$$\alpha_{i,j} f_{i,j-1}^n + \beta_{i,j} f_{i,j}^n + \gamma_{i,j} f_{i,j+1}^n = \delta_{i,j}. \quad (26)$$

Система разностных уравнений (26) имеет трехдиагональную матрицу и эффективно решается методом скалярной прогонки. В процессе прогонки используется схема Зейделя. В частности, рассчитанные на данном шаге концентрации компонент Y_i^n ($i = 1, 2, 3$) включаются далее в диффузионные потоки в уравнениях энергий. При вычислении коэффициентов переноса и плотности смеси в пределах данного шага используются внутренние итерации. Поперечная компонента скорости находится из разностного уравнения, аппроксимирующего уравнение неразрывности (24).

В результате на очередном шаге по маршевой переменной x находятся все значения гидродинамических переменных по толщине пограничного слоя. Порядок аппроксимации численной схемы исследовался на основе сравнения численных решений на последовательности вложенных сеток с изменяемым в два раза шагом. Расчеты показали, что по пространственным переменным схема имеет порядок аппроксимации, близкий ко второму.

6. Численные расчеты пограничного слоя на пластине

В рамках предлагаемой модели аэродинамики гиперзвукового полета в атмосфере Марса были выполнены расчеты ПС на пластине с использованием локально автомодельных (18), (19)–(22) и полных уравнений (23), (24). Для сравнения выбраны две точки в средней (режим 1) и нижней (режим 2) частях траектории посадки аппарата Pathfinder [19]. Параметры набегающего потока в расчетных точках траектории приведены в табл. 5.

6.1. Условия на верхней границе ПС

В качестве граничных условий на верхней границе ПС использовались параметры потока за косым скачком уплотнения на головной части аппарата в форме клина с углом

Т а б л и ц а 5. Параметры набегающего потока в расчетных точках траектории посадки аппарата Pathfinder

Table 5. Free flow parameters at calculated points of the landing trajectory Pathfinder

Параметр атмосферы	Режим 1	Режим 2
Скорость аппарата U_a , м/с	6596	3704
Число Маха аппарата M_a	33.8	18.4
Температура T_a , К	169	179
Плотность ρ_a , кг/м ³	$2.8 \cdot 10^{-4}$	$1.24 \cdot 10^{-3}$

Т а б л и ц а 6. Параметры набегающего потока за косым скачком уплотнения

Table 6. Free flow parameters behind an oblique shock wave

Параметр за ударной волной	Режим 1	Режим 2
Скорость потока U_∞ , м/с	2445.5	1378
Число Маха потока M	12.6	6.9
Статическая температура T_∞ , К	2583	946
Давление p_∞ , Па	1549.5	1062.85
Колебательная температура $T_{v\infty}$, К	169	179
Число Дамкелера VT-релаксации Da_{VT}	$5.32 \cdot 10^{-3}$	$1.27 \cdot 10^{-3}$
Число Дамкелера реакции Da_R	$6.7 \cdot 10^{-4}$	≈ 0
Массовая концентрация CO_2 $Y_{1\infty}$	0.9	0.9
Массовая концентрация CO $Y_{2\infty}$	0.05	0.05
Массовая концентрация O $Y_{3\infty}$	0.05	0.05

$\theta = 40^\circ$. Параметры рассчитывались на основе асимптотических формул теории косого скачка [17] при больших числах Маха. Рассчитанные значения даны в табл. 6.

В силу конечных характерных времен релаксации колебательных мод и реакций диссоциации – рекомбинации принимается, что колебательная температура равна температуре атмосферы в данной точке траектории. Соответственно, концентрации компонентов также выбраны близкими к данным по составу атмосферы Марса. Скорость, статическая температура, давление (плотность) из табл. 6 использовались в качестве характерных величин для оберразмеривания.

На условной верхней границе ПС задавались следующие безразмерные значения.

Режим 1

$$U(\delta) = 1, \quad Y_1(\delta) = 0.9, \quad Y_2(\delta) = 0.05, \quad Y_3(\delta) = 0.05, \quad T(\delta) = 1, \quad T_v(\delta) = 0.065.$$

Режим 2

$$U(\delta) = 1, \quad Y_1(\delta) = 0.9, \quad Y_2(\delta) = 0.05, \quad Y_3(\delta) = 0.05, \quad T(\delta) = 1, \quad T_v(\delta) = 0.189.$$

В расчетах использовалось значение $\delta = 8$.

6.2. Границные условия на поверхности пластины

Условия на пластине соответствовали непроницаемой, абсолютно некаталитической, поддерживаемой при постоянной температуре изотермической стенке. В безразмерной форме условия имели следующий вид.

Режим 1

$$U(0) = 0, \quad T(0) = T_v(0) = 0.774, \quad \left. \frac{dY_i}{dy} \right|_{y=0} = 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

Режим 2

$$U(0) = 0, \quad T(0) = T_v(0) = 1.163, \quad \left. \frac{dY_i}{dy} \right|_{y=0} = 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

В численных расчетах использовались алгоритмы, разработанные и тестируемые в предыдущих работах авторов [3, 16]. В данной работе локально автомодельные решения рассчитывались с шагом $h_\zeta = 0.01$ по автомодельной координате в интервале $[0, 8]$. Численная схема для полных уравнений ПС реализовывалась в расчетной области $0 \leq x \leq 20$, $0 \leq y \leq 200$ с шагами $h_x = 0.025$, $h_y = 0.02$ по продольной и поперечной координатам.

Расчеты показали, что локально автомодельные решения в режиме 1 демонстрируют достаточно быструю внутреннюю сходимость к значениям на координате $\xi = 20$. Максимальные относительные отклонения профилей газодинамических параметров, кроме концентрации СО, рассчитанные по формуле

$$\varepsilon_F(\zeta) = \max_{\zeta} \left| 1 - \frac{F(\zeta, \xi)}{F(\zeta, \xi = 20)} \right|, \quad (27)$$

уже на координате $\xi = 6.5$ не превышают 2.5–4 %. Максимальное относительное отклонение на профиле концентрации не превышает 6 %. В то же время численные решения полных уравнений ПС сходятся к значениям на той же координате $\xi = 20$ значительно медленнее. Даже при $\xi = 15$ только часть параметров имеет рассчитанные в соответствии с (27) отклонения в пределах 2.5–4 %. Максимальное относительное отклонение на профиле концентрации СО, не превышающее 6 %, достигается только при $\xi = 17.5$.

Процесс развитой диссоциации сильно влияет на внутреннюю сходимость обоих методов. Это особенно проявляется при сравнении результатов для режима 1 с результатами для режима 2, где диссоциация отсутствует. При этом максимальные отклонения на профилях локально автомодельных решений, вычисляемые по формуле (27) по отношению к профилям при $\xi = 6.5$, не превышают сотых долей процента. Соответственно, максимальные отклонения численных решений полных уравнений ПС, отнесенные к значениям на той же координате, составляют менее 1 %.

Внутренняя сходимость каждого из двух методов является необходимым условием их корректного применения. Вместе с тем основной практический интерес представляет сопоставление результатов обоих подходов. В частности, вопрос выхода решений полных уравнений ПС на локально автомодельные профили. На рис. 1 приведены профили газодинамических параметров, рассчитанных обоими методами в режиме 1. Максимальные отклонения профилей газодинамических параметров на координате $\xi = 20$, полученные двумя методами и отнесенные к значениям локально автомодельных решений, определенные как

$$\varepsilon_{af}(\zeta) = \max_{\zeta} \left| 1 - \frac{F_f(\zeta, \xi)}{F_a(\zeta, \xi = 20)} \right|, \quad (28)$$

для некоторых параметров лежат в пределах 10–13 %. Сравнение этих результатов со случаем слабо диссоциирующего азота [3], где предельные отклонения всех параметров,

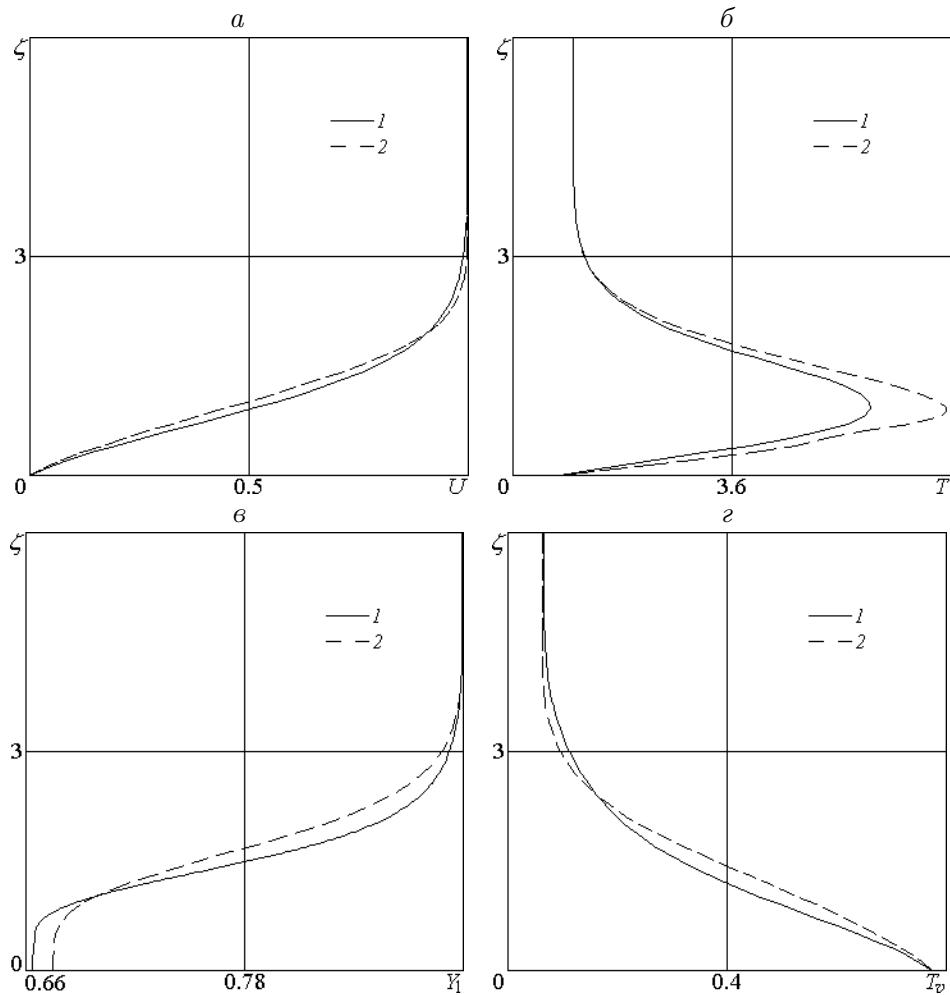


Рис. 1. Профили газодинамических параметров для режима 1: *a* — скорость; *б* — статическая температура; *в* — массовая концентрация CO₂; *г* — колебательная температура; 1 — решение полных уравнений пограничного слоя, 2 — решение локально автомодельных уравнений при $\xi = 20$

Fig. 1. The gas-dynamic parameters profiles for regime 1: *a* — speed; *б* — static temperature; *в* — mass concentration CO₂; *г* — vibrational temperature; 1 is solution of complete equations of boundary layer, 2 is solution of local self-similar equations at $\xi = 20$

кроме концентрации атомарного азота, не превышали 3–5 %, показывает, что в условиях развитой диссоциации с образованием трехкомпонентной среды расхождение двух методов существенно возрастает. Однако более объективную оценку близости результатов двух методов дают средние и среднеквадратичные относительные отклонения профилей газодинамических параметров при $\xi = 20$, вычисляемые соответственно по формулам

$$\langle \Delta_{af} \rangle = \frac{1}{\delta} \int_0^\delta |\varepsilon_{af}(\zeta)| d\zeta, \quad \langle \overline{\Delta}_{af} \rangle = \sqrt{\frac{1}{\delta} \int_0^\delta \varepsilon_{af}^2(\zeta) d\zeta}.$$

Численное интегрирование проводилось по формуле трапеций на интервале $\xi = [0, \delta]$ с шагом $\Delta\zeta = 10^{-3}$, $\delta = 8$. Числовые значения величин $\langle \Delta_{af} \rangle$, $\langle \overline{\Delta}_{af} \rangle$ приведены в табл. 7.

В режиме 2 полностью отсутствует диссоциация, вследствие чего концентрации компонентов не меняются по толщине ПС. Полученные двумя методами распределения

Т а б л и ц а 7. Относительные отклонения профилей газодинамических параметров
Table 7. Relative deviations of the gas-dynamic parameters profiles

Газодинамический параметр	U	ρ	T	T_v	Y_1	Y_2
<i>Режим 1</i>						
$\langle \Delta_{af} \rangle$	0.0165	0.0324	0.0236	0.0531	0.0045	0.0246
$\langle \Delta_{af} \rangle$	0.0458	0.0781	0.0565	0.0794	0.0107	0.0560
<i>Режим 2</i>						
$\langle \Delta_{af} \rangle$	0.0009	0.0057	0.0059	0.0014	$4.4 \cdot 10^{-6}$	$4.0 \cdot 10^{-5}$
$\langle \Delta_{af} \rangle$	0.0028	0.0155	0.0162	0.0023	$6.7 \cdot 10^{-6}$	$6.0 \cdot 10^{-5}$

Т а б л и ц а 8. Критические точки и фазовые скорости нейтральных возмущений для режима 1
Table 8. Critical points and phase velocities of neutral disturbances for regime 1

Критерий	Координата критического слоя, \tilde{y}_{kp}	Фазовая скорость, c_{kp}
$Kr_{gen}(\tilde{y})$	0.2615	0.9509
$Kr_{chem}(\tilde{y})$	0.2042	0.8386

остальных газодинамических параметров для этого случая даны на рис. 2. Из-за малых концентраций СО, О этот режим фактически сводится к случаю однокомпонентного колебательно возбужденного газа, который рассматривался в [16]. Несмотря на то, что режим 2 значительно отличается от рассчитанных в [16] гиперзвуковым числом Маха и сильной колебательной неравновесностью, здесь так же имеет место очевидный выход решений полных уравнений ПС на локально автомодельные профили. При этом максимальные отклонения на координате $\xi = 20$, вычисленные по формуле (28), лежат в пределах 2–7 %. Для полноты информации для режима 2 в табл. 7 также приведены средние и среднеквадратичные относительные отклонения, которые малы по сравнению с режимом 1.

Эти результаты позволяют заключить, что в расчетах устойчивости безградиентного ПС колебательно возбужденного диссоциирующего газа на пластине можно использовать профили стационарного течения, полученные любым из двух подходов. Тем не менее в случае развитой диссоциации следует отдавать предпочтение численному решению полных уравнений ПС, особенно если необходима повышенная точность расчетов.

Представляет интерес на основе газодинамических параметров режима 1 в условиях развитой диссоциации провести сравнение фазовых скоростей нейтральных (растущих) возмущений, полученных на основе известного критерия “обобщенной” точки перегиба [20]

$$Kr_{gen} = \frac{d}{d\zeta} \left(\rho^2 \frac{dU}{d\zeta} \right) \quad (29)$$

и обобщения этого критерия, полученного в [21], которое явно учитывает условия развитой диссоциации

$$Kr_{chem} = Kr_{gen} + \rho \max_{\zeta} \left\{ \Lambda \left[\rho \left(h_{0,1} \frac{dY_1}{d\zeta} - \frac{de_t}{d\zeta} \right) + N \frac{d\rho}{d\zeta} \right] \right\} \frac{dU}{d\zeta},$$

где

$$\Lambda = \frac{\rho}{\rho N - \gamma M_{\infty}^2 p}, \quad N = (1+Y_1)(h_{0,1}-e_t) + [e_t, T + (1+Y_1)(h_{0,1}-e_t)] \frac{(1+Y_1)W_{1,Y_1} - \rho W_{1,\rho}}{(1+Y_1)W_{1,Y_1} - TW_{1,T}}. \quad (30)$$

Уравнения (29), (30) в данном случае для удобства расчетов записаны в терминах автомодельной переменной (23). Символы зависимых переменных в нижних индексах в (30) означают соответствующие производные.

Для дозвуковых возмущений, фазовые скорости которых удовлетворяют неравенству

$$1 - \frac{1}{M_\infty} < c_{kp} < 1,$$

данные расчета приведены в табл. 8, где

$$\tilde{y} = \frac{2\sqrt{\xi}}{\delta} \int_0^\zeta \frac{dz}{\rho(z)}$$

и продольная автомодельная координата $\xi = 6.5$. Видно, что использование классического критерия (29) при наличии развитой диссоциации может привести к существенной переоценке фазовой скорости растущего невязкого возмущения.

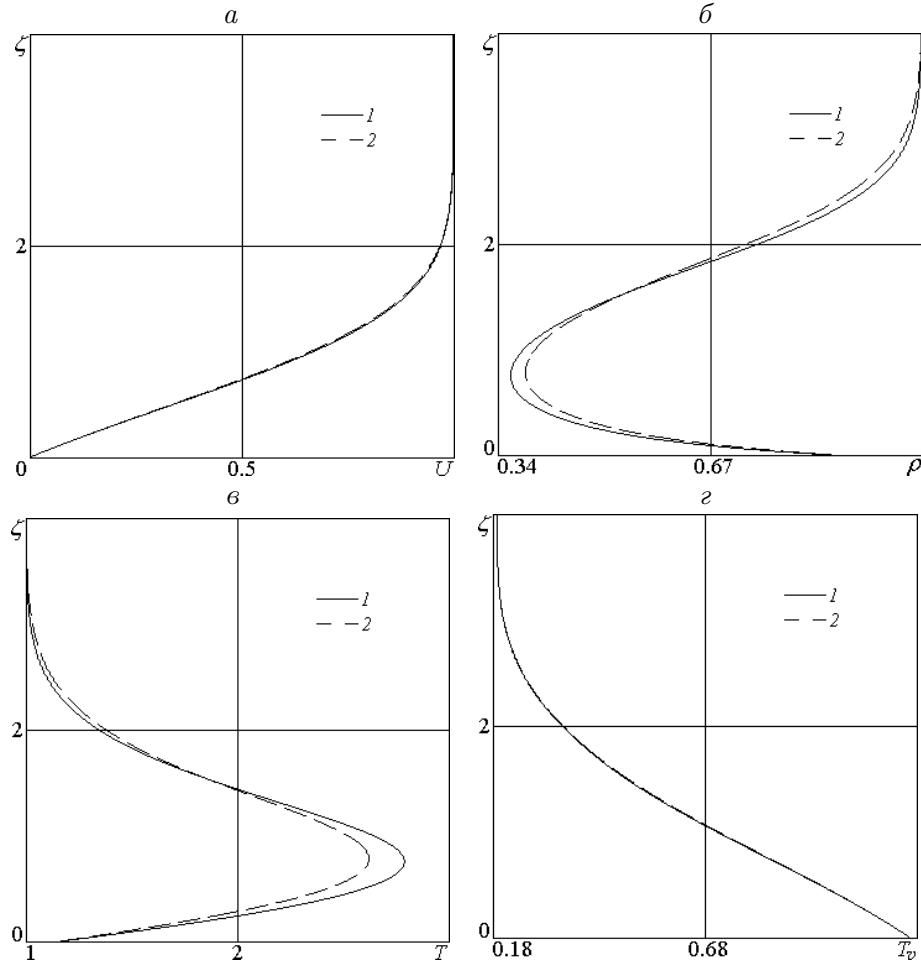


Рис. 2. Профили газодинамических параметров для режима 2: *a* — скорость смеси; *б* — плотность смеси; *в* — статическая температура; *г* — колебательная температура; 1 — решение полных уравнений пограничного слоя, 2 — решение локально автомодельных уравнений при $\xi = 20$

Fig. 2. The gas-dynamic parameters profiles for regime 2: *a* — speed; *б* — density; *в* — static temperature; *г* — vibrational temperature; 1 is solution of complete equations of boundary layer, 2 is solution of local self-similar equations at $\xi = 20$

Заключение

Введена двухтемпературная модель колебательно возбужденной диссоциирующей трехкомпонентной газовой смеси CO_2 , CO , O гиперзвукового пограничного слоя, позволяющая адекватно рассчитывать газодинамические характеристики гиперзвукового полета в атмосфере Марса.

Для двух точек реальной траектории посадки на Марс выполнены расчеты плоского пограничного слоя на пластине с изотермической некаталитической поверхностью.

Проведено сравнение профилей газодинамических величин, полученных на основе локально автомодельных уравнений с профилями, построенными конечно-разностным методом на основе полных уравнений пограничного слоя. Из результатов расчетов следует, что в условиях развитой диссоциации с образованием трехкомпонентной среды расхождение двух методов существенно возрастает. Вместе с тем показано, что с точностью, приемлемой для последующих расчетов устойчивости, имеет место выход профилей, полученных из полных уравнений, на локально автомодельные решения.

Проведено сравнение фазовых скоростей нейтральных (растущих) возмущений, рассчитанных на основе известного критерия “обобщенной” точки перегиба и соответствующего обобщения, явно учитывающего условия развитой диссоциации. Показано, что использование классического критерия “обобщенной” точки перегиба при наличии развитой диссоциации может привести к существенной переоценке фазовой скорости растущего невязкого возмущения.

Благодарности. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-11-00027, <https://rscf.ru/project/23-11-00027/>.

Список литературы

- [1] **Reynier Ph.** Survey of aerodynamics and aerothermodynamics efforts carried out in the frame of Mars exploration projects. *Progress in Aerospace Sciences*. 2014; (70):1–27. DOI:10.1016/j.paerosci.2014.03.004.
- [2] **Armenise I., Reynier Ph., Kustova E.** Advanced models for vibrational and chemical kinetics applied to Mars entry aerothermodynamics. *Journal of Thermophysics and Heat Transfer*. 2016; (30):705–720. DOI:10.2514/1.T4708.
- [3] **Григорьев Ю.Н., Горобчук А.Г., Ершов И.В.** Модель пограничного слоя колебательно возбужденного диссоциирующего газа. *Теплофизика и аэромеханика*. 2021; (28):667–689.
- [4] **Park C., Howe J.T., Jaffe R.L., Candler G.V.** Review of chemical-kinetic problems of future NASA missions. II. Mars entries. *Journal of Thermophysics and Heat Transfer*. 1994; (8):9–23. DOI:10.2514/3.496.
- [5] **Kustova E.V., Nagnibeda E.A.** On correct description of a multi-temperature dissociating CO_2 flow. *Chemical Physics*. 2006; (321):293–310. DOI:10.1016/j.chemphys.2005.08.026.
- [6] **Camac M.** CO_2 relaxation processes in shock waves: fundamental phenomena in hypersonic flow. Ithaca, N.Y.: Cornell Univ. Press; 1966: 195–215.
- [7] **Kustova E., Mekhanoshina M.** Multi-temperature vibrational energy relaxation rates CO_2 . *Physics of Fluids*. 2020; (32):09610(16). DOI:10.1063/5.0021654.
- [8] **Blottner F.G., Johnson M., Ellis M.** Chemically reacting viscous flow program for multicomponent gas mixtures. *Research Report SC-RR-70-754*. Albuquerque: Sandia Laboratories; 1971: 320.

- [9] **Нагнибеда Е.А., Кустова Е.В.** Кинетическая теория процессов переноса и релаксации в потоках неравновесных реагирующих газов. СПб.: Изд-во С.-Петербургского ун-та; 2003: 272.
- [10] **Wilke C.R.** A viscosity equation for gas mixtures. *The Journal of Chemical Physics*. 1950; (18):517–519. DOI:10.1063/1.1747673.
- [11] **Rock S.G., Candler G.V., Hornung H.G.** Analysis of thermochemical nonequilibrium models for carbon dioxide flows. *AIAA Journal*. 1993; (31):2255–2262. DOI:10.2514/3.11923.
- [12] Термические константы веществ. Справочник / Под ред. акад. В.П. Глушко. Т. 1. М.: ВИНИТИ АН СССР; 1971: 266.
- [13] **Candler G.V.** Computation of thermo-chemical nonequilibrium martian atmospheric entry flows. *AIAA Paper 90-1695*. DOI:10.2514/6.1990-1695.
- [14] **Гапонов С.А., Петров Г.В.** Устойчивость пограничного слоя неравновесного диссоциирующего газа. Новосибирск: Наука; 2013: 95.
- [15] **Blottner F.G.** Similar and nonsimilar solutions for nonequilibrium laminar boundary layer. *AIAA Journal*. 1963; (1):2156–2157. DOI:10.2514/3.2015.
- [16] **Григорьев Ю.Н., Горобчук А.Г., Ершов И.В.** Расчеты сверхзвукового пограничного слоя в полной и локально автомодельной постановках. *Вычислительные технологии*. 2020; (25):50–62. DOI:10.25743/ICT.2020.25.2.005.
- [17] **Лойцянский Л.Г.** Механика жидкости и газа. М.; Л.: Гос. изд-во технико-теорет. лит.; 1950: 676.
- [18] **Браиловская И.Ю., Чудов Л.А.** Решение уравнений пограничного слоя разностным методом: вычислительные методы и программирование. М.: МГУ; 1962: 167–182.
- [19] **Milos F.S., Chen Y.-K., Congdon W.M., Thomas J.M.** Mars Pathfinder entry temperature data, aerothermal, and heatshield material response. *Journal of Spacecraft and Rockets*. 1999; (36):380–391. DOI:10.2514/2.3457.
- [20] **Lees L.** The stability of the laminar boundary layer in a compressible fluid. *NACA Technical Note*, No. 1360. Washington: NACA; 1947: 169.
- [21] **Григорьев Ю.Н., Ершов И.В.** Необходимые условия развития невязких неустойчивостей в колебательно возбужденном диссоциирующем газе. *Журнал прикладной математики и механики*. 2023; (87):409–422. DOI:10.31857/S0032823523030049.

Hypersonic boundary layer when flying in the atmosphere of Mars

YU. N. GRIGORYEV^{1,*}, I. V. ERSHOV^{1,2}, A. G. GOROBCHUK^{1,3}

¹Federal Research Center for Information and Computational Technologies, 630090, Novosibirsk, Russia

²Novosibirsk State Agrarian University, 630039, Novosibirsk, Russia

³Novosibirsk State University, 630090, Novosibirsk, Russia

*Corresponding author: Yurii N. Grigoryev, e-mail: grigor@ict.nsc.ru

Received July 27, 2023, revised August 29, 2023, accepted September 19, 2023.

Abstract

The structure of the boundary layer on a flat surface under conditions of landing on Mars is studied. A two-temperature model of a vibrationally excited dissociating three-component gas

comprising of CO₂, CO and O mixture is introduced, which allows adequately reproducing the main characteristics of hypersonic flight in the Martian atmosphere. For two points of the landing trajectory on Mars, calculations of a flat boundary layer on a plate with an isothermal non-catalytic surface were performed. The profiles of gas-dynamic quantities obtained on the basis of locally self-similar equations are compared with the profiles obtained by the finite-difference method based on the complete equations of the boundary layer. It is shown that, with acceptable accuracy for subsequent stability calculations, the profiles obtained from the complete equations yield locally self-similar solutions. A comparison is made of the phase velocities of neutral (growing) perturbations obtained on the basis of the well-known criterion of the “generalized” inflection point and the corresponding generalization, which explicitly takes into account the conditions of developed dissociation.

Keywords: atmosphere of Mars, hypersonic boundary layer, dissociation, locally self-similar solutions, finite difference scheme, numerical calculations.

Citation: Grigoryev Yu.N., Ershov I.V., Gorobchuk A.G. Hypersonic boundary layer when flying in the atmosphere of Mars. Computational Technologies. 2024; 29(3):5–24. DOI:10.25743/ICT.2024.29.3.002. (In Russ.)

Acknowledgements. The study was supported by a grant of the Russian Science Foundation No. 23-11-00027, <https://rscf.ru/project/23-11-00027/>.

References

1. **Reynier Ph.** Survey of aerodynamics and aerothermodynamics efforts carried out in the frame of Mars exploration projects. Progress in Aerospace Sciences. 2014; (70):1–27. DOI:10.1016/j.paerosci.2014.03.004.
2. **Armenise I., Reynier Ph., Kustova E.** Advanced models for vibrational and chemical kinetics applied to Mars entry aerothermodynamics. Journal of Thermophysics and Heat Transfer. 2016; (30):705–720. DOI:10.2514/1.T4708.
3. **Grigoryev Yu.N., Gorobchuk A.G., Ershov I.V.** Model of the boundary layer of a vibrationally excited dissociating gas. Thermophysics and Aeromechanics. 2021; (28):635–647. DOI:10.1134/S0869864321050048.
4. **Park C., Howe J.T., Jaffe R.L., Candler G.V.** Review of chemical-kinetic problems of future NASA missions. II. Mars entries. Journal of Thermophysics and Heat Transfer. 1994; (8):9–23. DOI:10.2514/3.496.
5. **Kustova E.V., Nagnibeda E.A.** On correct description of a multi-temperature dissociating CO₂ flow. Chemical Physics. 2006; (321):293–310. DOI:10.1016/j.chemphys.2005.08.026.
6. **Camac M.** CO₂ relaxation processes in shock waves: fundamental phenomena in hypersonic flow. Ithaca, N.Y.: Cornell Univ. Press; 1966: 195–215.
7. **Kustova E., Mekhanoshina M.** Multi-temperature vibrational energy relaxation rates CO₂. Physics of Fluids. 2020; (32):09610(16). DOI:10.1063/5.0021654.
8. **Blottner F.G., Johnson M., Ellis M.** Chemically reacting viscous flow program for multicomponent gas mixtures. Research Report SC-RR-70-754. Albuquerque: Sandia Laboratories; 1971: 320.
9. **Nagnibeda E.A., Kustova E.V.** Non-equilibrium reacting gas flows. Kinetic theory of transport and relaxation processes. Berlin: Springer; 2009: 252.
10. **Wilke C.R.** A viscosity equation for gas mixtures. The Journal of Chemical Physics. 1950; (18):517–519. DOI:10.1063/1.1747673.
11. **Rock S.G., Candler G.V., Hornung H.G.** Analysis of thermochemical nonequilibrium models for carbon dioxide flows. AIAA Journal. 1993; (31):2255–2262. DOI:10.2514/3.11923.
12. Termicheskie konstanty veshchestv. Spravochnik / Pod red. akad. V.P. Glushko. T. 1 [Thermal constants of substances. Handbook / Ed. acad. V.P. Glushko. Vol. 1]. Moscow: VINITI AN SSSR; 1971: 266. (In Russ.)
13. **Candler G.V.** Computation of thermo-chemical nonequilibrium martian atmospheric entry flows. AIAA Paper 90-1695. DOI:10.2514/6.1990-1695.
14. **Gaponov S.A., Petrov G.V.** Ustoychivost' pogranichnogo sloya neravnovesnogo dissotsiiruyushchego gaza [Stability of the boundary layer of a nonequilibrium dissociating gas]. Novosibirsk: Nauka; 2013: 95. (In Russ.)

15. **Blottner F.G.** Similar and nonsimilar solutions for nonequilibrium laminar boundary layer. *AIAA Journal*. 1963; (1):2156–2157. DOI:10.2514/3.2015.
16. **Grigoryev Yu.N., Gorobchuk A.G., Ershov I.V.** Calculations of supersonic boundary layer in the full and locally self-similar formulations. *Computational Technologies*. 2020; (25):50–62. (In Russ.)
17. **Loitsyanskii L.G.** Mechanics of liquids and gases. Oxford: Pergamon; 1966: 804.
18. **Brailovskaya I.Yu, Chudov L.A.** Reshenie uravneniy pogranichnogo sloya raznostnym metodom: vychislitel'nye metody i programmirovaniye [Solution of boundary layer equations by the difference method: computational methods and programming]. Moscow: MSU; 1962: 167–182. (In Russ.)
19. **Milos F.S., Chen Y.-K., Congdon W.M., Thomas J.M.** Mars Pathfinder entry temperature data, aerothermal, and heatshield material response. *Journal of Spacecraft and Rockets*. 1999; (36):380–391. DOI:10.2514/2.3457.
20. **Lees L.** The stability of the laminar boundary layer in a compressible fluid. *NACA Technical Note*, No. 1360. Washington: NACA; 1947: 169.
21. **Grigoryev Yu.N., Ershov I.V.** Necessary conditions for development of inviscid instabilities in a vibrationally excited dissociating gas. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 2023; (87):409–422. DOI:10.31857/S0032823523030049. (In Russ.)