

АВТОМАТИЗИРОВАННАЯ ТРИАНГУЛЯЦИЯ МНОГОСВЯЗНЫХ ОБЛАСТЕЙ СО СГУЩЕНИЕМ И РАЗРЕЖЕНИЕМ УЗЛОВ*

Ю. В. НЕМИРОВСКИЙ

Институт теоретической и прикладной механики СО РАН

Новосибирск, Россия

e-mail: shulgin@itam.nsc.ru

С. Ф. ПЯТАЕВ

Институт вычислительного моделирования СО РАН

Красноярск, Россия

e-mail: kiv@cc.krascience.rssi.ru

Algorithms of fragmentation of arbitrary piecewise smooth closed boundary contours of multiply connected domain and its triangulation are developed. In the course of fragmentation of the boundary of domain and its triangulation a function of steps is used, which adjusts the sizes of one-dimensional and triangular finite elements according to their position in the domain. Any positive function can appear as the function of steps. The process of triangulation is a consecutive filling of domain with triangular elements. The process of filling starts from the boundary that is preliminarily fragmented into one-dimensional finite elements. Samples of grids for some domains are presented.

Широкое применение метода конечных элементов для решения различного класса задач повышает требования к уровню автоматизации разбиения областей. Известны алгоритмы и программы, позволяющие получать равномерные сетки на односвязных областях [1–4]. Идея алгоритма триангуляции многосвязной области со сгущением сетки, описанная в [5], избавляя от необходимости деления области на совокупность подобластей, сохраняет вместе с тем недостаток, связанный с ручным разбиением каждого контура (за исключением простейших элементов контуров — прямолинейных участков и дуг окружностей). Кроме того, расплывчатость введенных в работе требований относительно качества нового строящегося узла (близость к ранее построенному узлу, близость к одномерному конечному элементу, одновременная близость к узлу и элементу и т. д.) существенно затрудняет программирование и вынуждает пользователя либо разрабатывать условия на новый строящийся узел, либо вовсе отказаться от алгоритма.

С целью построения полностью автоматизированного процесса триангуляции произвольных двумерных многосвязных областей в данной работе разработан алгоритм раз-

* Доклад на Международной школе-семинаре “Информационные технологии в задачах математического моделирования”, Новосибирск, 13–18 сентября 1998 г.

© Ю. В. Немировский, С. Ф. Пятаев, 2000.

биения произвольных кусочно-гладких замкнутых контуров границы области, который приводится в разделе 1.

В разделе 2 на основе схемы, предложенной в [4, 5] и представляющей собой последовательное заполнение области треугольными элементами, построен процесс триангуляции области. Начало процесса заполнения идет от границы, предварительно разбитой на одномерные конечные элементы. По мере построения треугольных элементов граница еще не триангулированной области (следуя [4], будем называть ее текущей границей сетки ТГС) представляет собой ряд непрерывных замкнутых ломаных кривых с возможными самопересечениями.

В процессе разбиения границы области и ее триангуляции используется функция шагов, корректирующая размеры одномерного и треугольного конечных элементов в зависимости от их положения в области. Функцией шагов может быть любая положительная функция. В [5] предлагается один из ее вариантов

$$h(x, y) = h_0 + \sum_{i=1}^n \frac{h_i - h_0}{1 + \left(\frac{\tilde{x}_i}{A_i}\right)^{N_i} + \left(\frac{\tilde{y}_i}{B_i}\right)^{N_i}},$$

где h_0 — основной шаг сетки, n — количество сгущений или разрежений сетки, h_i — шаг сетки в центре i -го сгущения, A_i, B_i — размеры области сгущения, N_i — показатель степени, характеризующий градиент сгущения,

$$\tilde{x}_i = (x - x_i) \cos \alpha_i + (y - y_i) \sin \alpha_i,$$

$$\tilde{y}_i = -(x - x_i) \sin \alpha_i + (y - y_i) \cos \alpha_i,$$

(x_i, y_i) — координаты центра i -го сгущения, α_i — угол поворота осей i -го сгущения.

1. Разбиение границы многосвязной области

Пусть граница многосвязной области образована N кусочно-гладкими замкнутыми контурами, заданными в некоторой декартовой системе координат Oxy в параметрическом виде. Рассмотрим некоторый кусочно-гладкий контур Γ (индекс контура опущен), образованный L гладкими кривыми γ_n , $n = 1, \dots, L$, параметрические уравнения которых есть

$$(x(t), y(t)) \equiv \vec{x}(t) = \vec{x}_n(t), \quad t_n^- \leq t \leq t_n^+, \quad (1)$$

где t_n^-, t_n^+ — границы изменения параметра t для γ_n . Из условия непрерывности и замкнутости контура Γ следует:

$$\vec{x}_n(t_n^+) = \vec{x}_{n+1}(t_{n+1}^-), \quad n = \overline{1, L-1}, \quad \vec{x}_1(t_1^-) = \vec{x}_L(t_L^+).$$

Параметризация (1) должна быть такой, чтобы для внутренних контуров Γ направление обхода при возрастании параметра t было по часовой стрелке, для внешнего контура — против часовой стрелки.

Разбиение Γ осуществляется последовательно, начиная с первой гладкой кривой γ_1 : $\vec{x} = \vec{x}_1(t)$. Первый узел на Γ есть $\vec{y}_1 = \vec{x}_1(t_1^-)$. Предположим, что $l-1$ первых кривых контура Γ уже разбито, последний построенный узел на этих кривых есть $\vec{y}_{l-1} = \vec{x}_{l-1}(t_{l-1}^+) = \vec{x}_l(t_l^-)$

и разбита часть кривой γ_l с последним узлом $\vec{y}_{n_{l-1}+k} = \vec{x}_l(t_k^l)$, где t_k^l — значение параметра t для последнего узла, $t_k^l \in [t_l^-, t_l^+]$.

1.1. Обозначим через $s_l(t_k^l, t)$ длину части кривой γ_l , соответствующей значениям t_k^l, t :

$$s_l(t_k^l, t) = \int_{t_k^l}^t |\dot{\vec{x}}(t)| dt, \quad t \in [t_k^l, t_l^+],$$

где $\dot{\vec{x}}(t)$ — производная по t от $\vec{x}(t)$.

Новый узел $\vec{y}_{n_{l-1}+k+1}$ строится следующим образом: вычисляется значение функции шагов $h(x, y)$ в последнем построенном узле $\vec{y}_{n_{l-1}+k}$ и ищется решение \tilde{t}_{k+1}^l уравнения

$$s_l(t_k^l, t) = h(\vec{y}_{n_{l-1}+k}), \quad t \in [t_k^l, t_l^+]. \quad (2)$$

Если решение этого уравнения существует (обратное рассматривается в **1.2**), то оно единственно в силу $|\dot{\vec{x}}_l(t)| > 0$. По найденному значению \tilde{t}_{k+1}^l вычисляется $\vec{x}_l(\tilde{t}_{k+1}^l)$ и ищется решение t_{k+1}^l уравнения

$$s_l(t_k^l, t) = \frac{1}{2}[h(\vec{y}_{n_{l-1}+k}) + h(\vec{x}_l(\tilde{t}_{k+1}^l))]. \quad (3)$$

Предположим, что это уравнение также имеет решение (обратное рассматривается в **1.3**). Рассмотрим неравенство

$$\left| \frac{d - s_l(t_k^l, t_{k+1}^l)}{s_l(t_k^l, t_{k+1}^l)} \right| \leq \varepsilon, \quad d = |\vec{y}_{n_{l-1}+k} - \vec{x}_l(t_{k+1}^l)|, \quad (4)$$

левая часть которого есть относительная разность между длиной дуги и длиной d соответствующего ей отрезка и которое характеризует отклонение дуги от отрезка прямой. Значение параметра ε задается пользователем (например, $\varepsilon = 0.01$). Если неравенство (4) выполнено, то точку $\vec{x}_l(t_{k+1}^l)$ объявляем новым узлом $\vec{y}_{n_{l-1}+k+1}$ и переходим к построению следующего узла. При невыполнении неравенства (4) правую часть уравнения (3) последовательно уменьшаем на некоторую величину (например, на одну десятую от правой части) до тех пор, пока (4) не будет выполнено. Эта ситуация возникает, когда длина d одномерного элемента, вычисленная в соответствии с функцией шагов, достаточно “велика” для приемлемой аппроксимации этим элементом соответствующей ему дуги, и поэтому производится последовательное уменьшение этой длины до требуемой неравенством (4). Затем переходим к построению следующего узла $\vec{y}_{n_{l-1}+k+2}$.

Окончание процедуры построения новых узлов на l -й кривой контура Γ связано с отсутствием решения уравнения (2) и описано в **1.2**.

1.2. Уравнение (2) не имеет решения, т. е. $s_l(t_k^l, t_l^+) < h(\vec{y}_{n_{l-1}+k})$. Это означает, что последний узел $\vec{y}_{n_{l-1}+k}$ “близок” к $\vec{x}_l(t_l^+)$ и построение нового узла через $h(x, y)$ невозможно. Обозначим через δ_l длину остатка γ_l , через d_k длину последнего построенного элемента:

$$\delta_l = s_l(t_k^l, t_l^+), \quad d_k = |\vec{y}_{n_{l-1}+k-1} - \vec{y}_{n_{l-1}+k}|.$$

Если невязка δ_l удовлетворяет неравенству

$$\delta_l < \varepsilon_1 d_k, \quad (5)$$

где $\varepsilon_1 \approx 0.1$, то последний узел $\vec{y}_{n_{l-1}+k}$ смещаем в крайнюю точку γ_l , т. е. $\vec{y}_{n_{l-1}+k} = \vec{x}_l(t_l^+)$ и переходим к построению узлов на следующей кривой γ_{l+1} . При невыполнении (5) рассматриваем неравенство

$$\delta_l < 0.5d_k. \quad (6)$$

Если (6) имеет место, то число узлов на γ_l остается прежним, невязка δ_l разносится по всем построенным на γ_l дугам пропорционально их длинам. Если обозначить через \tilde{s}_l длину пройденной при построении узлов части кривой γ_l

$$\tilde{s}_l = \sum_{i=0}^{k-1} s_{i,i+1}^l, \quad s_{i,i+1}^l \equiv s_l(t_i^l, t_{i+1}^l), \quad t_0^l \equiv t_l^-, \quad (7)$$

то длины новых дуг $s_{i,i+1}^{*l}$ определяются через длины старых дуг $s_{i,i+1}^l$ по формулам

$$s_{i,i+1}^{*l} = s_{i,i+1}^l (1 + \delta_l / \tilde{s}_l), \quad i = \overline{0, k-1}. \quad (8)$$

Разрешая последовательно уравнения

$$s_l(t_i^{*l}, t_{i+1}^{*l}) = s_{i,i+1}^{*l}, \quad t_0^{*l} \equiv t_l^-, \quad i = \overline{0, k-1}, \quad (9)$$

определяем новые значения t_n^{*l} , полагая $t_k^{*l} = t_l^+$, и вычисляем новые узлы на γ_l :

$$\vec{y}_{n_{l-1}+i}^* = \vec{x}_l(t_i^{*l}), \quad i = \overline{0, k-1}, \quad \vec{y}_{n_{l-1}+k}^* = \vec{x}_l(t_l^+), \quad (10)$$

после чего переходим к построению узлов на следующей кривой γ_{l+1} .

Если невязка δ_l не удовлетворяет условию (6), то рассматриваем новое неравенство

$$\delta_l \leq d_k. \quad (11)$$

Если это неравенство выполнено, т. е. длина неотработанной части γ_l меньше длины последнего построенного одномерного конечного элемента, но больше его полудлины в силу невыполнения (6), то число узлов на γ_l увеличивается на единицу, вводится новая невязка δ_l :

$$\delta_l = s_l - \tilde{s}_l, \quad \tilde{s}_l = \sum_{i=0}^{k-1} s_{i,i+1}^l + s_{k-1,k}^l,$$

где s_l — длина γ_l , и переходим к (8)–(10) с новыми δ_l , \tilde{s}_l и с дополнением еще одной дуги, длина которой $s_{k,k+1}^l$ равна длине последней построенной дуги $s_{k-1,k}^l$. При этом необходимо в (8)–(10) увеличить значение k на единицу.

В случае, когда (11) не выполнено, рассматриваем уравнение

$$s_l(t_k^l, t) = d_k, \quad t \in [t_k^l, t_l^+], \quad (12)$$

решение которого существует в силу

$$s_l(t_k^l, t_l^+) \equiv \delta_l > d_k, \quad s_l(t_k^l, t_k^l) = 0 < d_k.$$

Найденное из (12) значение t_{k+1}^l проверяется на выполнение неравенства (4) и далее по алгоритму с той лишь разницей, что в случае невыполнения (4) последовательно уменьшается правая часть не (3), а (12).

1.3. Уравнение (3) не имеет решения. После нахождения \tilde{t}_{k+1}^l из уравнения (2) переходим к неравенству (4), в котором t_{k+1}^l заменяется на \tilde{t}_{k+1}^l . В случае его выполнения точку $\vec{x}_l(\tilde{t}_{k+1}^l)$ объявляем новым узлом $\vec{y}_{n_{l-1}+k+1}$ и переходим к построению нового узла на γ_l , в противном случае последовательно уменьшаем правую часть уравнения (2) до тех пор, пока не будет выполнено (4), после чего переходим к построению следующего узла.

2. Триангуляция области

2.1. Найдем звено z_{\min} ТГС, имеющее минимальную длину l_{\min} и узлы $\vec{x}_{\min}^1, \vec{x}_{\min}^2$. Обозначим через z_{\min}^-, z_{\min}^+ соответственно предыдущее и последующее по отношению к z_{\min} звенья. Выберем из z_{\min}^-, z_{\min}^+ звено z_{\min}^* , образующее с z_{\min} наименьший угол β_{\min} ($\beta_{\min} = \min(\beta_1, \beta_2)$; углы β_1 и β_2 измеряются против часовой стрелки от z_{\min} к z_{\min}^- и от z_{\min}^+ к z_{\min} соответственно). Обозначим узлы выбранной пары звеньев (это либо z_{\min}^-, z_{\min} либо z_{\min}, z_{\min}^+) через $\vec{x}_1^{\min}, \vec{x}_2^{\min}, \vec{x}_3^{\min}$. Если $\beta_{\min} \leq 80^\circ$ (в противном случае переходим к процедуре **2.4**), то:

2.2. Проводим проверку на попадание узлов ТГС в треугольник $\Delta(z_{\min}, z_{\min}^*)$. Если таких узлов нет, то переходим к процедуре **2.3**, в противном случае из всех попавших в $\Delta(z_{\min}, z_{\min}^*)$ узлов выбираем узел \vec{y}_* , наиболее близкий к z_{\min} , и переходим к процедуре **2.12**.

2.3. Рассмотрим круг радиуса $\frac{1}{2} |\vec{x}_3^{\min} - \vec{x}_1^{\min}|$ с центром \vec{x}_c , $\vec{x}_c = (\vec{x}_1^{\min} + \vec{x}_3^{\min})/2$. Если во внешнюю по отношению к треугольнику $\Delta(z_{\min}, z_{\min}^*)$ половину круга узлы ТГС не попадают, то переходим к процедуре **2.13**. В противном случае из всех попавших узлов выбираем наиболее близкий к отрезку $[\vec{x}_1^{\min}, \vec{x}_3^{\min}]$ узел \vec{x}_m и четырехугольник $\square(z_{\min}, z_{\min}^*, \vec{x}_m)$ разбиваем на два треугольника так, чтобы минимальный угол получающихся треугольников был максимален. Оба полученных треугольника объявляем элементами, из ТГС удаляем z_{\min}, z_{\min}^* , определяем связность области, добавляем два новых звена $[\vec{x}_1^{\min}, \vec{x}_m], [\vec{x}_m, \vec{x}_3^{\min}]$ и переходим к процедуре **2.1**.

2.4. Построим точку \vec{x}_* :

$$\vec{x}_* = \vec{x}_{\min}^c + h\vec{n}, \quad \vec{x}_{\min}^c = \frac{1}{2}(\vec{x}_{\min}^1 + \vec{x}_{\min}^2), \quad (13)$$

где \vec{n} — нормаль к z_{\min} , направленная внутрь области:

$$(\vec{x}_{\min}^2 - \vec{x}_{\min}^1) \times \vec{n} = l_{\min} \vec{e}_3, \quad \vec{e}_3 = (0, 0, 1),$$

$$h_{cp} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 h(\vec{\xi}_i), \quad \vec{\xi}_j = \vec{x}_{\min}^j, \quad j = 1, 2; \quad \vec{\xi}_3 = \vec{x}_{\min}^c + \frac{\sqrt{3}}{2} l_{\min} \vec{n}.$$

На базе звена z_{\min} построим прямоугольник Ω , одна из сторон которого есть z_{\min} , а другая направлена по нормали и ее длина равна $2h$, где h — высота в $\Delta(z_{\min}, \vec{x}_*)$, опущенная на z_{\min} . Установим с помощью контрольной области Ω критерии близости строящегося нового узла \vec{x}_* к ранее построенным узлам и звеньям. Если \vec{x}_* в определенном смысле близок к узлам или звеньям, то от построения нового узла отказываемся и из близких узлов для построения нового элемента выбираем наилучший.

Определим два множества M_0 и M_1 :

M_0 — множество номеров узлов ТГС, попавших в Ω , за исключением номеров узлов \vec{x}_{\min}^1 и \vec{x}_{\min}^2 :

$$M_0 = \{n : \vec{x}_n \in \Omega, \vec{x}_n \neq \vec{x}_{\min}^i, \quad i = 1, 2\};$$

M_1 — множество номеров звеньев ТГС, пересекающих $\partial\Omega$, за исключением номера минимального звена z_{\min} :

$$M_1 = \{n : z_n \cap \partial\Omega \neq \emptyset, z_n \neq z_{\min}\}.$$

Введем две дополнительные точки \vec{z}_1 и \vec{z}_2 :

$$\vec{z}_i = \vec{x}_{\min}^i + (-1)^i \Delta l \vec{\tau}, \quad i = 1, 2,$$

$$\vec{\tau} = \frac{1}{l_{\min}} (\vec{x}_{\min}^2 - \vec{x}_{\min}^1), \quad \Delta l = \frac{1}{4} (h(\vec{x}_{\min}^c) - l_{\min}).$$

Определим в равнобедренном треугольнике $\Delta(\vec{x}_*, \vec{z}_1, \vec{z}_2)$ угол ξ при основании $[\vec{z}_1, \vec{z}_2]$ и положим $\vec{z}_\xi = \vec{z}_1$, если $z_{\min}^* = z_{\min}^-$, и $\vec{z}_\xi = \vec{z}_2$, если $z_{\min}^* = z_{\min}^+$ (см. **2.1**).

Если $M_0 \neq \emptyset$ или $M_1 \neq \emptyset$, то переходим к процедуре **2.5**.

Определим угол α_1 при вершине \vec{x}_* в треугольнике $\Delta(\vec{z}_1, \vec{z}_2, \vec{x}_*)$. Если $\alpha_1 \geq 30^\circ$ и $\beta_{\min} - \xi \geq 20^\circ$, то точку \vec{x}_* объявляем новым узлом и переходим к процедуре **2.14**. Если $\alpha_1 < 30^\circ$, то точку \vec{x}_* переопределяем так, чтобы новый угол $\alpha_1 = 30^\circ$, $\vec{x}_* = \vec{x}_{\min}^c + |\vec{z}_2 - \vec{x}_{\min}^c| \cdot \text{tg} 75^\circ \cdot \vec{n}$. При этом если $\beta_{\min} - 75^\circ < 20^\circ$, то переходим к процедуре **2.2**, иначе — к процедуре **2.14**.

2.5. Введем целый параметр переключения IND и положим $IND = 0$. Если $M_0 \neq \emptyset$ (иначе переходим к процедуре **2.9**), то из M_0 выбираем номер m , при котором соответствующий узел \vec{x}_m наиболее близок к z_{\min} . Для этого определяем расстояния l_i от точек $\vec{x}_i, i \in M_0$ до z_{\min} и выбираем

$$l_m = \min_{i \in M_0} l_i \rightarrow m. \quad (14)$$

Рассмотрим в треугольнике $\Delta(\vec{x}_m, \vec{z}_1, \vec{z}_2)$ угол α при вершине \vec{x}_m (\vec{z}_i определены в **2.4**). Если $\alpha \geq 30^\circ$ (иначе переходим к процедуре **2.8**), то проводим проверку на пересечение отрезка $[\vec{x}_m, \vec{x}_{\min}^1]$ со звеньями ТГС, имеющими номера из M_1 без номеров звеньев, примыкающих к узлам $\vec{x}_m, \vec{x}_{\min}^1$. Обозначим для удобства \vec{x}_m через \vec{y}_* .

2.6. Если пересечений нет, то переходим либо к процедуре **2.12** (при $IND = 0$), либо к процедуре **2.14** (при $IND = 1$). В противном случае переходим к процедуре **2.7**.

2.7. С использованием узлов пересекающего звена z_p строим ориентированные против часовой стрелки треугольники $\Delta(z_{\min}, \vec{x}_k), \vec{x}_k$ — узлы звена $z_p, k \in \{k_1, k_2\}$. При построении треугольников необходимо следить за их существованием. Из этих треугольников (если существуют оба) выбираем $\Delta(z_{\min}, \vec{x}_{k_i}), k_i \in \{k_1, k_2\}$, у которого минимальный угол больше (в дальнейшем минимальный угол в каком-либо треугольнике $\Delta(z, \vec{x})$ будем обозначать через $\alpha(z, \vec{x})$). Обозначив выбранный узел \vec{x}_{k_i} через \vec{y}_* , проводим проверку на пересечение обеих боковых сторон $\Delta(z_{\min}, \vec{y}_*)$ со всеми звеньями ТГС за исключением минимального и звеньев, примыкающих к минимальному углу и к узлу \vec{y}_* , и переходим к процедуре **2.6**.

2.8. Ближайший узел \vec{x}_m достаточно далек от z_{\min} (так как $\alpha < 30^\circ$), поэтому \vec{x}_* смещаем к z_{\min} так, чтобы расстояние от ее нового положения (обозначим эту точку через \vec{y}_*) до z_{\min} было равно $l_m/2$; $\vec{y}_* = \vec{x}_{\min}^c + \frac{1}{2} l_m \vec{n}$; l_m определено в (14). В треугольнике $\Delta(\vec{z}_1, \vec{z}_2, \vec{y}_*)$ определяем угол ξ при вершине \vec{z}_ξ ; \vec{z}_ξ определено в **2.4**. Если $\beta_{\min} - \xi < 20^\circ$, то переходим к процедуре **2.2**, иначе проводим проверку на пересечение одной из боковых сторон $\Delta(z_{\min}, \vec{y}_*)$ со звеньями, имеющими номера из M_1 , и переходим к процедуре **2.6**, положив $IND = 1$.

2.9. Если $\beta_{\min} - \xi < 20^\circ$, то переходим к процедуре **2.2**, в противном случае из всех звеньев, пересекающих $\partial\Omega$, выберем z_{m_1} и z_{m_2} , которые наиболее “близки” к z_{\min} . Для этого рассмотрим все точки пересечения \vec{y}_i^1 звеньев $z_{k_i}, k_i \in M_1$, с боковой стороной Γ_1 прямоугольника Ω , проходящей через \vec{x}_{\min}^1 , и аналогичные точки \vec{y}_i^2 для Γ_2 . Тогда номера m_1 и m_2 определяются как числа из M_1 , доставляющие минимум выражению $|\vec{y}_i^j - \vec{x}_{\min}^j|$,

т. е.

$$\min_{k_i \in M_1} |\vec{y}_i^j - \vec{x}_{\min}^j| = > m_j, \quad j = \overline{1, N_p}.$$

Если Γ_1 и Γ_2 пересекают различные “ближайшие звенья”, то $N_p = 2$. Если одну из боковых сторон Γ_j звенья не пересекают или Γ_1 и Γ_2 пересекаются одним и тем же звеном, то $N_p = 1$ и рассматриваем только номер m_1 . Рассмотрим ориентированные $\Delta(z_{m_i}, \vec{x}_*)$, $i = \overline{1, N_p}$; \vec{x}_* определено в (13). Если таких ориентированных треугольников не существует (что возможно только в случае, когда “ближайшее” пересекающее Γ_1 и Γ_2 звено единственно и проходит через Γ_1 и Γ_2 между z_{\min} и \vec{x}_*), то звено z_{m_1} обозначаем через z_p и переходим к процедуре **2.7**. При существовании $\Delta(z_{m_i}, \vec{x}_*)$ рассмотрим углы α_i при вершине \vec{x}_* в этих треугольниках, $i = \overline{1, N_p}$. Если $\alpha_i \leq 90^\circ$, то переходим к процедуре **2.14**, в противном случае выберем $\alpha_{i_1} = \max_{i=\overline{1, N_p}} \alpha_i$.

2.10. Построим ориентированные треугольники $\Delta(z_{\min}, \vec{x}_{m_{i_1}}^j)$, где $\vec{x}_{m_{i_1}}^j$ — узлы звена $z_{m_{i_1}}$. Список значений параметра j может быть одним из следующих: если существуют оба треугольника, то $j \in \{1, 2\}$, если существует только один треугольник, то $j = 1$ при использовании узла $\vec{x}_{m_{i_1}}^1$ и $j = 2$ для второго узла звена $z_{m_{i_1}}$. Выберем из $\Delta(z_{\min}, \vec{x}_{m_{i_1}}^j)$ тот треугольник, у которого минимальный угол больше, $\alpha(z_{\min}, \vec{x}_{m_{i_1}}^{j_1}) \geq \alpha(z_{\min}, \vec{x}_{m_{i_1}}^j)$ для всех j из списка значений этого индекса, и переходим к процедуре **2.11**.

2.11. Если $\alpha(z_{\min}, \vec{x}_{m_{i_1}}^{j_1}) \leq \alpha(z_{m_i}, \vec{x}_*)$, то переходим к процедуре **2.14**, в противном случае боковые стороны $\Delta(z_{\min}, \vec{x}_{m_{i_1}}^{j_1})$ проверяем на пересечение со всеми звеньями ТГС за исключением звеньев, примыкающих к узлу $\vec{x}_{m_{i_1}}^{j_1}$ и к звену z_{\min} . Кроме того, проводим проверку на попадание узлов ТГС в этот треугольник за исключением узла $\vec{x}_{m_{i_1}}^{j_1}$ и узлов $\vec{x}_{\min}^1, \vec{x}_{\min}^2$. Если пересечений и узлов внутри треугольника нет, то узел $\vec{x}_{m_{i_1}}^{j_1}$ переобозначим как \vec{y}_* и перейдем к процедуре **2.12**.

Если пересечения имеются или треугольник содержит хотя бы один узел ТГС, то из списка значений параметра j (если он не исчерпан) выбираем новое значение j_2 и переходим в начало процедуры **2.11**, переобозначив предварительно j_2 на j_1 . Если список параметра j исчерпан, то рассматриваем второе пересекающее звено $z_{m_{i_2}}$ (при условии, что список параметра m_i не исчерпан, $i = \overline{1, N_p}$), и если $\alpha_{i_2} > 90^\circ$, переходим к процедуре **2.10**, переобозначив предварительно i_2 на i_1 . В противном случае (либо $\alpha_{i_2} < 90^\circ$, либо исчерпан список параметра m_i) переходим к процедуре **2.14**.

2.12. Треугольник $\Delta(z_{\min}, \vec{y}_*)$ объявляем элементом, из ТГС удаляем z_{\min} , определяем число связности области, добавляем два новых звена $[\vec{x}_{\min}^1, \vec{y}_*], [\vec{y}_*, \vec{x}_{\min}^2]$ и переходим к процедуре **2.1**.

2.13. Треугольник $\Delta(z_{\min}, z_{\min}^*)$ объявляем элементом, из ТГС удаляем z_{\min}, z_{\min}^* , добавляем одно звено $[\vec{x}_1^{\min}, \vec{x}_3^{\min}]$ и переходим к процедуре **2.1**.

2.14. Треугольник $\Delta(z_{\min}, \vec{x}_*)$ объявляем новым элементом, из ТГС удаляем z_{\min} , добавляем два новых звена $[\vec{x}_{\min}^1, \vec{x}_*], [\vec{x}_*, \vec{x}_{\min}^2]$ и переходим к процедуре **2.1**.

Заключение

В качестве примеров работы алгоритмов на представленных ниже рисунках показаны сетки для различных областей.

На рис. 1 приведено кольцо с двумя круговыми вырезами. Сетка имеет 864 элемента и 483 узла. Для детального рассмотрения области сгущения около окружности радиуса 0.05 из сетки была вырезана часть, изображение которой представлено на рис. 2.

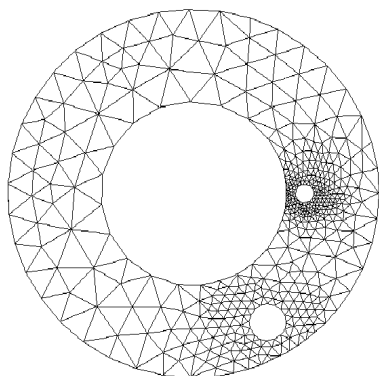


Рис. 1.

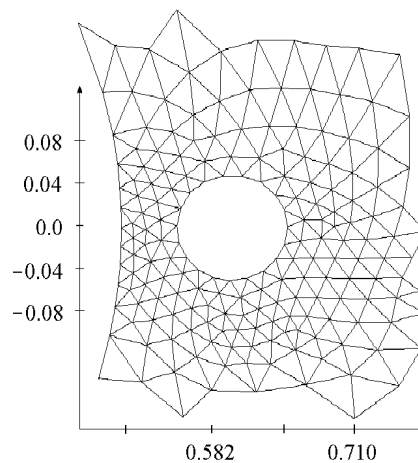


Рис. 2.

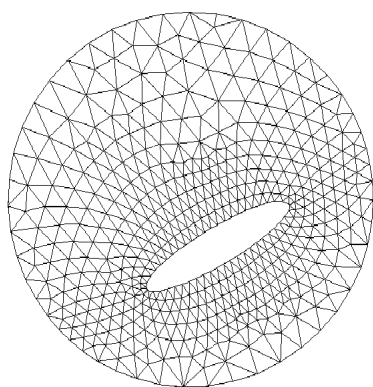


Рис. 3.

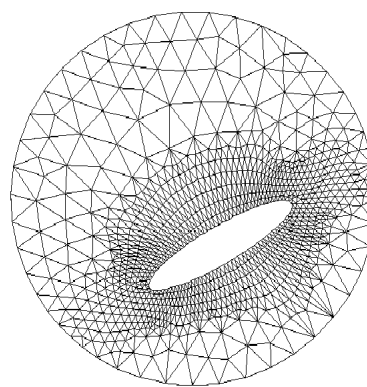


Рис. 4.

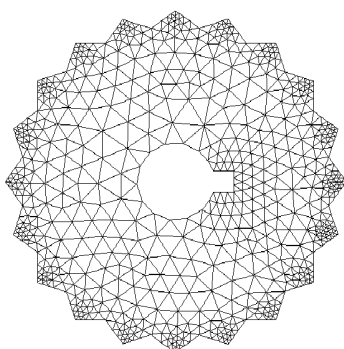


Рис. 5.

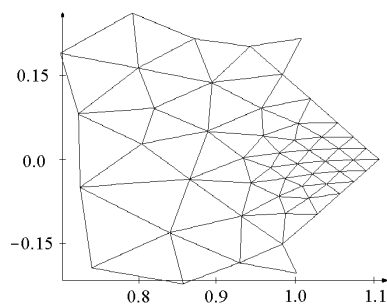


Рис. 6.

На рис. 3 и 4 показаны разбиения одной области с различными параметрами функции шагов, отвечающими за степень сгущения. Центром области сгущения является центр эллипса. Сетка на рис. 3 имеет 880 элементов и 489 узлов, на рис. 4 — соответственно 1768

и 954.

На рис. 5 представлена сетка с 1219 элементами и 702 узлами. Областью является шестерня с $N = 20$ зубьями. Центры областей сгущения для зубьев расположены в вершинах зубьев. Для детального рассмотрения сетки на зубе был вырезан один из зубьев, и увеличенная сетка показана на рис. 6.

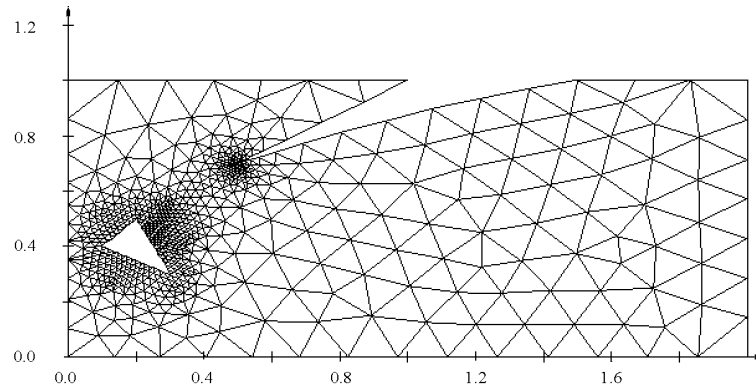


Рис. 7.

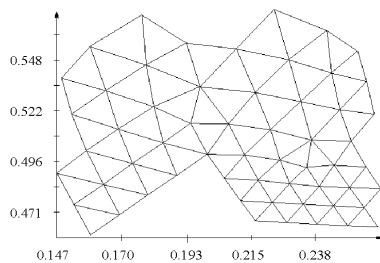


Рис. 8.

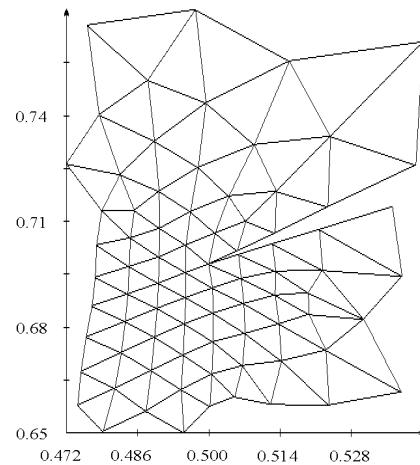


Рис. 9.

На рис. 8 приведена сетка для прямоугольника с клиновидным и треугольным вырезами, имеющая 1348 элементов и 726 узлов. Приведенная сетка имеет две области сгущения; центром первой области является центр треугольного выреза, центром второй — вершина клиновидного выреза. На рис. 9, 9 приведены увеличенные вырезы сетки в районе вершины треугольного выреза и в районе вершины клиновидного выреза соответственно.

Список литературы

- [1] КАМЕЛЬ Х. А., ЭЙЗЕНШТЕЙН Г. К. Автоматическое построение сетки в двух- и трехмерных составных областях. В *“Расчет упругих конструкций с использованием ЭВМ”*. Ленинградский гос. ун-т, 1974, 21–35.

- [2] Квитка А. Л., Ворошко П. П., Бобрицкая С. Д. *Напряженно-деформированное состояние тел вращения*. Наук. думка, Киев, 1977.
- [3] Уманский С. Э. Алгоритм и программа триангуляции двумерной области произвольной формы. *Проблемы прочности*, **6**, 1978, 83–87.
- [4] Милькова Н. И. Особенности дискретизации области при решении задач концентрации напряжений методом конечных элементов. *Машиноведение*, **2**, 1979, 67–71.
- [5] Сакало В. И., Шкурин А. А. Универсальная программа триангуляции двумерной области произвольной формы со сгущениями сетки. *Проблемы прочности*, **1**, 1985, 106–108.

*Поступила в редакцию 16 марта 1999 г.,
в переработанном виде 8 июня 1999 г.*