Вычислительные технологии **Том 5, № 2, 2000**

МЕТОД АВТОМАТИЧЕСКОГО ЦЕНТРИРОВАНИЯ ПРИ ВЫЧИСЛЕНИИ СТЕПЕННЫХ СУММ В ЗАДАЧАХ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

И. И. Иванов
Научно-исследовательский институт "Гермес"
Златоуст, Россия

In this article an algebraic formula is presented which provides the basis for the method of calculating the centered sums of a power for sampling numbers and (or) centered sums of the powers product of sampling numbers aggregate of one set by another aggregate of centered numbers. The sums calculation process is executed for one "survey" of the entire aggregate of all sampling numbers and can be used in statistical estimation computations for better precision of calculations being executed with repeated round-off.

Многие расчеты в математической статистике требуют вычисления различных степенных сумм. Часто находятся суммы для вычисления выборочных моментов распределения, нахождения коэффициентов корреляции, построения полиномиальной регрессии. При этом значительно легче вычислять простые суммы степеней $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^m$, $m > 1$, чисел $x_1, x_2, \dots x_n$, $n > 1$; но в дальнейшем использовании в статистических расчетах предпочтительней суммы чисел, предварительно центрированных относительно их среднего арифметического: $S = \sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^m$, где $\bar{x} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}$ — среднее арифметическое совокупности чисел.

Это особенно важно если $|\bar{x}|$ существенно отличается от 0, и объясняется тем, что в задачах оценивания основная часть информации, содержащейся в совокупности выборочных чисел $X = x_1, x_2, \dots x_n$, заключена в величине их отличия друг от друга. Их "общая часть" есть их среднее арифметическое $\bar{x}$, n-кратно повторяется в каждом числе и является величиной смещения всей совокупности по оси координат. В то же время именно взаимные отличия чисел в основном и определяют величину дисперсии, асимметрии и других оценок; показатели корреляционной зависимости двух совокупностей $X = x_1, x_2, \dots x_n$, $Y = y_1, y_2, \dots y_n$; коэффициенты множественной линейной регрессии нескольких совокупностей $X, Y, \dots W$ и коэффициенты уравнения регрессии, в частности полиномиальной регрессии, например:

$$Y \approx c_3X^3 + c_2X^2 + c_1X + c_0 + d_2W^2 + d_1W + d_0 + g_2X^2W + g_1XW + g_0. \qquad (1)$$

В связи с этим "общая часть" совокупности чисел при использовании найденных сумм в дальнейших вычислениях может и не потребоваться. Между тем при вычислении сумм, которые необходимы в большинстве вышеупомянутых расчетов, числа x_i возводятся в большую степень ($m \geq 2$) и "отличительные части" каждого числа, содержащиеся в его младших разрядах, сдвигаются за пределы разрядной сетки и безвозвратно теряются. "Виной" тому "общая часть", размещаемая в старших разрядах. Числа после возведения в степень становятся малоразличающимися, и это тем выраженней, чем больше положительная степень m и абсолютная величина "общей части" $|\bar{x}|$.

После суммирования возведенных в степень чисел в полученном результате будет "недоставать" суммарной величины, потерянной при возведении в степень каждого числа. Если суммируемые числа в основном одного знака и n и особенно m достаточно велики, то "недосуммированная" величина может быть значительной. Такая картина всегда будет возникать при m четном или в случае, если все числа x_i одного знака; и при этом мантисса некоторых чисел занимает более половины длины разрядной сетки при вычислении $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2$ или более 1/3 длины разрядной сетки при вычислении $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^3$, или более 1/4 длины разрядной сетки при вычислении $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^4$ и т. д. Это объясняется тем, что при возведении в квадрат результат будет иметь максимально удвоенную длину мантиссы исходного числа; при возведении в куб мантисса результата не может быть протяженней утроенной длины мантиссы исходного числа и т. д. Если доля чисел x_i имеет противоположный знак, то для нечетных степеней m потери от превышения разрядности мантиссы будут меньшими. А если все исходные числа имеют короткую мантиссу, то для малых m потерь при возведении в степень не будет наблюдаться вовсе, даже для четных m, и сумма $P = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^m$ будет вычислена абсолютно точно.

Но в самом общем случае, когда и знак чисел x_i, и протяженность их мантиссы, и четность (нечетность) m могут быть любыми, приходится констатировать, что сумма P может вычисляться с ошибкой. Последующее использование таких сумм, естественно, "наследует" эту ошибку. Так, при вычислении дисперсии и эксцесса, зависящих главным образом от сумм четных степеней, результирующие оценки на практике получаются, как правило, несколько меньшими, чем действительные.

Для сохранения степени различия суммируемых чисел, получаемых возведением в степень чисел x_i исходной совокупности, желательно числа x_i предварительно центрировать относительно их среднего арифметического или по крайней мере относительно числа a_x, близкого к $\bar{x}$. Практически это сводится к использованию для нахождения суммы S чисел вида $x'_i = x_i - a_x$, при вычислении которых уничтожаются старшие цифры чисел, последующие цифры сдвигаются к началу разрядной сетки и числа x'_i становятся числами с меньшей длиной мантиссы по сравнению с исходными числами x_i. Для этого желательно предварительно найти $\bar{x}$, "просмотрев" всю совокупность X. А если решается задача, включающая работу с несколькими совокупностями $X, Y, \dots W$, то необходимо определять средние для каждой из них: $\bar{x}, \bar{y}, \dots \bar{w}$. При больших объемах совокупностей ($n \gg 1$) двукратный просмотр совокупности (сначала для определения $\bar{x}$, затем собственно для вычисления $S = \sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^m$) может приводить к неоправданным затратам времени. Поэтому при больших n стоит задача: как за один просмотр всей совокупности чисел $x_1, x_2, \dots x_n$ вычислить их центрированную сумму $s = \sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^m$ так, чтобы во время каждого возведения в степень m приходилось возводить число x'_i, центрированное относительно числа a_x, возможно близкого к $\bar{x}$? Это даст возможность и экономить время на извлечении чисел при считывании, и уменьшить теряемую часть результирующей суммы s, по сравнению с потерями при вычислении суммы $P = \sum_{i=1}^{n} x_i^m$, которую можно считать “центрированной” относительно нуля. В работе [1, с.56] данная задача решена применительно к сумме $s = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$ и используется для вычисления выборочной дисперсии.

В настоящей работе предлагается метод расчета центрированных сумм $s = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^m$ для произвольного $m > 0$. Здесь также описывается более обобщенный метод расчета суммы $s = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^{m_x} (y_i - \bar{y})^{m_y} \dots (w_i - \bar{w})^{m_w}$ для нескольких совокупностей и его частные случаи: $s = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^m (y_i - \bar{y})$ — применяемый при расчете коэффициентов полиномиальной регрессии, и $s = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$ — применяемый при вычислении ковариации.

Настоящий метод основывается на формуле, вводимой в следующей теореме.

Теорема. *Для любых чисел* $a_1, a_2, \dots, a_m, x_{11}, x_{21}, \dots, x_{m1}, x_{12}, x_{22}, \dots, x_{m2}, x_{13}, x_{23}, \dots, x_{m3}, \dots, x_{1n}, x_{2n}, \dots, x_{mn}$ *справедливо тождество*

$$\sum_{t=1}^{n} \prod_{i=1}^{m} (x_{it} - \bar{x}_i) = \sum_{t=1}^{n} \prod_{i=1}^{m} (x_{it} - a_i) - n \prod_{i=1}^{m} (\bar{x}_i - a_i) -$$
$$- \sum_{i=1}^{m-2} \sum_{q=1}^{\binom{m}{1}} \left[\left\{ \prod_{\substack{j=1, \\ u_j=1,2,\dots \\ u_l\dots u_w\dots m, \\ u_l \neq u_w}}^{i} (\bar{x}_{u_j} - a_{u_j}) \right\} \sum_{t=1}^{n} \left\{ \prod_{\substack{j=1, \\ r_j=1,2,\dots \\ r_s\dots r_v\dots m, \\ r_s \neq r_v,\ r_s \neq u_l}}^{m-i} (x_{r_j t} - \bar{x}_{r_j}) \right\} \right], \qquad (2)$$

где $\bar{x}_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_{1i}$, $\bar{x}_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_{2i}$, $\dots$, $\bar{x}_m = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_{mi}$ *и* n, m — *натуральные числа* $n \geq 1$, $m \geq 1$.

Доказательство. В уравнении (2) при нахождении произведений в фигурных скобках перебираются все различные сочетания разностей $\bar{x}_{u_j} - a_{u_j}$ количеством i сочетаний и все различные сочетания разностей $x_{r_j} - \bar{x}_{r_j}$ — числом $m - i$ разностей. При этом значения любых индексов u и r в одном слагаемом в квадратных скобках не должны совпадать.

Раскроем все суммы и произведения по индексам i, q и j. В результате получаем уравнение:

$$\begin{aligned}
&\sum (x_1 - \bar{x}_1)(x_2 - \bar{x}_2)\dots(x_m - \bar{x}_m) = \\
&= \sum (x_1 - a_1)(x_2 - a_2)\dots(x_m - a_m) - n(\bar{x}_1 - a_1)(\bar{x}_2 - a_2)\dots(\bar{x}_m - a_m) - \\
&- \Big[(\bar{x}_1 - a_1) \sum (x_2 - \bar{x}_2)(x_3 - \bar{x}_3)(x_4 - \bar{x}_4)\dots(x_m - \bar{x}_m) + \\
&+ (\bar{x}_2 - a_2) \sum (x_1 - \bar{x}_1)(x_3 - \bar{x}_3)(x_4 - \bar{x}_4)\dots(x_m - \bar{x}_m) + \\
&+ (\bar{x}_3 - a_3) \sum (x_1 - \bar{x}_1)(x_2 - \bar{x}_2)(x_4 - \bar{x}_4)\dots(x_m - \bar{x}_m) + \\
&\dots \\
&+ (\bar{x}_m - a_m) \sum (x_1 - \bar{x}_1)(x_2 - \bar{x}_2)(x_3 - \bar{x}_3)\dots(x_{m-1} - \bar{x}_{m-1}) + \\
&+ (\bar{x}_1 - a_1)(\bar{x}_2 - a_2) \sum (x_3 - \bar{x}_3)(x_4 - \bar{x}_4)(x_5 - \bar{x}_5)\dots(x_m - \bar{x}_m) + \\
&+ (\bar{x}_1 - a_1)(\bar{x}_3 - a_3) \sum (x_2 - \bar{x}_2)(x_4 - \bar{x}_4)(x_5 - \bar{x}_5)\dots(x_m - \bar{x}_m) + \\
&\dots
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+(\bar{x}_1 - a_1)(\bar{x}_m - a_m)\sum(x_2 - \bar{x}_2)(x_3 - \bar{x}_3)(x_4 - \bar{x}_4)...(x_{m-1} - \bar{x}_{m-1})+\\
&+(\bar{x}_2 - a_2)(\bar{x}_3 - a_3)\sum(x_1 - \bar{x}_1)(x_4 - \bar{x}_4)(x_5 - \bar{x}_5)...(x_m - \bar{x}_m)+\\
&+(\bar{x}_2 - a_2)(\bar{x}_4 - a_4)\sum(x_1 - \bar{x}_1)(x_3 - \bar{x}_3)(x_5 - \bar{x}_5)...(x_m - \bar{x}_m)+\\
&\cdots\\
&+(\bar{x}_{m-1} - a_{m-1})(\bar{x}_m - a_m)\sum(x_1 - \bar{x}_1)(x_2 - \bar{x}_2)(x_3 - \bar{x}_3)...(x_{m-2} - \bar{x}_{m-2})+\\
&\cdots\\
&+(\bar{x}_1 - a_1)(\bar{x}_2 - a_2)...(\bar{x}_{m-3} - a_{m-3})(\bar{x}_{m-2} - a_{m-2})\sum(x_{m-1} - \bar{x}_{m-1})(x_m - \bar{x}_m)+\\
&+(\bar{x}_1 - a_1)(\bar{x}_2 - a_2)...(\bar{x}_{m-3} - a_{m-3})(\bar{x}_{m-1} - a_{m-1})\sum(x_{m-2} - \bar{x}_{m-2})(x_m - \bar{x}_m)+\\
&+(\bar{x}_1 - a_1)(\bar{x}_2 - a_2)...(\bar{x}_{m-3} - a_{m-3})(\bar{x}_m - a_m)\sum(x_{m-2} - \bar{x}_{m-2})(x_{m-1} - \bar{x}_{m-1})+\\
&\cdots\\
&\left.+(\bar{x}_3 - a_3)(\bar{x}_4 - a_4)...(\bar{x}_{m-1} - a_{m-1})(\bar{x}_m - a_m)\sum(x_1 - \bar{x}_1)(x_2 - \bar{x}_2)\right]. \qquad (3)
\end{aligned}
$$

Здесь и далее сумму $\sum\limits_{t=1}^{n}$ будем записывать сокращенно как $\sum$ и второй индекс чисел x будем опускать.

Подробная методика доказательства этой теоремы не дает ничего существенного для понимания смысла предлагаемого метода. Поэтому громоздкие, чисто алгебраические, выкладки мы вынесем в Приложение. Для практического использования уравнение (2) или его подробная запись (3) полезны в первую очередь тем, что позволяют легко получать уравнения для центрированных сумм степеней чисел одной совокупности или уравнения для центрированных сумм произведений целых степеней чисел нескольких совокупностей:

$$\sum(x-\bar{x})^m, \quad \sum(x-\bar{x})^{m_x}(y-\bar{y})^{m_y}\dots(w-\bar{w})^{m_w}. \qquad (4)$$

Эти выражения получаются, если записать уравнение (2) для нескольких совокупностей общим количеством, равным сумме степеней $m_x+m_y+\ldots+m_w$, и затем, приняв некоторые из них за одну совокупность ($x_1 \equiv x$, $x_2 \equiv x$,... $x_{m_x} \equiv x$), а другие – за другие совокупности ($x_{m_x+1} \equiv y$, $x_{m_x+2} \equiv y$, ... $x_{m_x+m_y} \equiv y$,... $x_{m_x+m_y+\ldots m_w-(m_w-1)} \equiv w$, $x_{m_x+m_y+\ldots m_w-(m_w-2)} \equiv w$, ... $x_{m_x+m_y+\ldots+m_w} \equiv w$), упростить выражение несложными алгебраическими преобразованиями. Здесь мы приведем лишь наиболее часто встречающиеся на практике выражения для центрированной суммы произвольной степени чисел одной совокупности; для центрированной суммы произвольной степени чисел одной совокупности, умноженной на первую степень чисел другой совокупности; и для центрированной суммы произведений чисел двух совокупностей:

$$\sum(x-\bar{x})^m = \sum(x-a)^m - n(\bar{x}-a)^m - \sum_{i=1}^{m-2}\left[\binom{m}{i}(\bar{x}-a)^i\sum(x-\bar{x})^{m-i}\right], \qquad (5)$$

$$\sum(x-\bar{x})^m(y-\bar{y}) = \sum(x-a)^m(y-b) \;-\; (\bar{y}-b)\sum(x-\bar{x})^m \;-\; n(\bar{x}-a)^m(\bar{y}-b)-$$

$$-\sum_{i=1}^{m-1}\left[\tbinom{m}{i}(\bar{x}-a)^i\left\{\sum(x-\bar{x})^{m-i}(y-\bar{y}) + (\bar{y}-b)\sum(x-\bar{x})^{m-i}\right\}\right]. \qquad (6)$$

Для эффективного применения уравнения (6) полезно использовать $\sum(x-\bar{x}) = 0$:

$$\sum(x-\bar{x})(y-\bar{y}) = \sum(x-a)(y-b) - n(\bar{x}-a)(\bar{y}-b). \qquad (7)$$

При вычислении по предлагаемому методу найденные суммы содержат по сравнению с нецентрированными суммами значительно большее количество последних разрядов мантиссы, специфичных для дисперсии данной совокупности чисел. Это обстоятельство приводит к тому, что операции вычитания с данными суммами, используемые в различных статистических расчетах [2, с. 359], много реже приводят к разностям близких чисел, что может повлечь большие потери вычислительной точности [3, с. 31]. При определении коэффициентов уравнения регрессии задача сводится к решению системы линейных уравнений, которая часто бывает плохо обусловленной [1, с. 59; 3, с. 348]. Поэтому коэффициенты формируемой здесь системы нормальных уравнений [4, с. 263] желательно получать с возможно большей точностью. После решения этой системы, составленной из центрированных сумм, находятся коэффициенты уравнения регрессии:

$$y' \approx c_m x'^m + c_{m-1}x'^{m-1} + \ldots + c_2 x'^2 + c_1 x' + c_0, \tag{8}$$

записанного в системе координат $Cx'y'$, параллельно перенесенной в точку средних арифметических: $C(\bar{x}, \bar{y})$. Для получения уравнения регрессии в исходной системе координат Oxy оно должно быть преобразовано подстановкой: $x' = x - \bar{x}$, $y' = y - \bar{y}$.

При необходимости нецентрированные суммы $p = \sum x^m$, $p = \sum x^m y$, $p = \sum xy$ могут быть вычислены через центрированные s из уравнений, получающихся после раскрытия скобок в уравнениях для соответствующих центрированных сумм: $s = \sum (x-\bar{x})^m$, $s = \sum (x-\bar{x})^m (y-\bar{y})$, $s = \sum (x-\bar{x})(y-\bar{y})$. Например, для $m = 2$ это будут следующие уравнения:

$$\sum (x-\bar{x})^2 = \sum x^2 - n\bar{x}^2,$$

$$\sum (x-\bar{x})^2 (y-\bar{y}) = \sum x^2 y - \bar{y}\sum x^2 - 2\bar{x}\sum xy + 2n\bar{x}^2\bar{y},$$

$$\sum (x-\bar{x})(y-\bar{y}) = \sum xy - n\bar{x}\bar{y}. \tag{9}$$

При таком расчете в большинстве случаев нецентрированные суммы p будут иметь меньшую погрешность сумм P, вычисляемых напрямую.

Для $m \geq 2$ уравнения (5), (6) являются рекурентными. Иначе говоря, центрированная сумма более высокой степени $\sum(x-\bar{x})^m$, $\sum(x-\bar{x})^m(y-\bar{y})$ находится через уже найденные центрированные суммы более низкой степени $\sum(x-\bar{x})^{m-l}$, $\sum(x-\bar{x})^{m-l}(y-\bar{y})$, $l = 1, 2, \ldots, m-1$. В связи с этим данную методику вычисления центрированных сумм наиболее выгодно применять в задачах нахождения высших параметров распределения статистических чисел (асимметрии, эксцесса) и в задачах аппроксимации полиномом высокой степени, так как здесь, как правило, нужно знать значения сумм всех степеней: и первых, и более высоких.

Процесс нахождения центрированных сумм реализуется аналогично предложенному в [1, с.56]. При этом при поступлении нового числа x_i за величину a нужно принять число $\bar{x}$, вычисленное без последнего x_i по совокупности всех предыдущих $i-1$ чисел. Далее находится новое значение среднего $\bar{x}$. При определении центрированных сумм произведений двух чисел нужно также всякий раз корректировать величины b и $\bar{y}$, где величина b играет такую же роль для чисел y_i, как и величина a для чисел x_i.

При вычислении центрированных сумм больших степеней имеется возможность избежать трудоемкого расчета чисел сочетаний $\binom{m}{i}$. Рекурсия дает возможность использовать числа, полученные ранее. Необходимо лишь воспользоваться однажды рассчитанными простыми коэффициентами. Однако при вычислении сумм больших степеней, и особенно при вычислении суммы произведений одной совокупности чисел на другую, довольно много времени тратится на технологические операции корректировки чисел a и b и вычисление первых двух в уравнении (5) и первых трех в уравнении (6) слагаемых с правой стороны равенства. В связи с этим для ускорения вычислений, если поступление чисел x_i, y_i приобрело черты установившегося стационарного процесса, имеет смысл прекратить корректировку значений чисел a и b и продолжать дальнейшее вычисление сумм с центрированием относительно "ложного нуля", роль которого должны играть последние вычисленные значения a и b. Поскольку при достаточно большом количестве уже обработанных пар чисел x_i и y_i величины a и b мало отличаются от соответствующих средних $\bar{x}$ и $\bar{y}$, такое центрирование не приведет к существенным потерям в точности искомых сумм.

При обработке совокупности малого объема данный метод может быть полезен или в случае распараллеливания вычислений, когда технологические операции корректировки чисел a и b берет на себя вспомогательный процессор, или в случае некритичности для всей работы времени технологических операций — например, когда время получения каждой пары чисел x_i, y_i много превосходит время технологических операций корректировки чисел a и b. При обработке большой совокупности чисел метод позволяет отказаться от предварительного просмотра этой совокупности на предмет определения ее среднего арифметического для последующего вычисления центрированных сумм. Это особенно важно в вычислительных программах по статистическому моделированию, где совокупности статистических чисел могут быть бесконечного объема и часто обнаруживают свойства стационарных случайных процессов.

Данный метод позволяет получить новое, часто более выгодное, сочетание скорости и точности вычислений при расчете центральных моментов статистик распределений, при вычислении сумм для нахождения коэффициентов уравнений полиномиальной регрессии, при определении коэффициентов корреляции и множественной линейной регрессии. Высшие центральные моменты статистических чисел применяются в расчетной практике, при проверке статистических гипотез, при аппроксимации разложением в ряды Грамма—Шарлье и Эджуорта [5, с. 313], при аппроксимации с помощью ортогональных многочленов Чебышева [6, с. 579] и др.

Список литературы

[1] Теннант-Смит Дж. *Бейсик для статистиков*: Пер. с англ. Мир, М., 1988.

[2] Вентцель Е. С. *Теория вероятностей.* Наука, М., 1964.

[3] Амосов А. А., Дубинский Ю. А., Копченова Н. В. *Вычислительные методы для инженеров: Уч. пособие.* Высш. шк., М., 1994.

[4] Иванова В. М., Калинина В. Н., Нешумова Л. А., Решетникова И. О. *Математическая статистика.* Высш. шк., М., 1981.

[5] Пугачев В. С. *Теория вероятностей и математическая статистика.* Наука, М., 1979.

[6] Королюк В. С., Портенко Н. И., Скороходов А. В., Турбин А. Ф. *Справочник по теории вероятностей и математической статистике.* Наука, М., 1985.

Приложение

Требуется доказать, что подробно записанное уравнение (2):

$$
\begin{aligned}
&\sum(x_1-\bar{x}_1)(x_2-\bar{x}_2)...(x_m-\bar{x}_m)=\\
&=\sum(x_1-a_1)(x_2-a_2)...(x_m-a_m)-n(\bar{x}_1-a_1)(\bar{x}_2-a_2)...(\bar{x}_m-a_m)-\\
&-\Big[(\bar{x}_1-a_1)\sum(x_2-\bar{x}_2)(x_3-\bar{x}_3)(x_4-\bar{x}_4)...(x_m-\bar{x}_m)+\\
&+(\bar{x}_2-a_2)\sum(x_1-\bar{x}_1)(x_3-\bar{x}_3)(x_4-\bar{x}_4)...(x_m-\bar{x}_m)+\\
&+(\bar{x}_3-a_3)\sum(x_1-\bar{x}_1)(x_2-\bar{x}_2)(x_4-\bar{x}_4)...(x_m-\bar{x}_m)+\\
&\dots\\
&+(\bar{x}_m-a_m)\sum(x_1-\bar{x}_1)(x_2-\bar{x}_2)(x_3-\bar{x}_3)...(x_{m-1}-\bar{x}_{m-1})+\\
&+(\bar{x}_1-a_1)(\bar{x}_2-a_2)\sum(x_3-\bar{x}_3)(x_4-\bar{x}_4)(x_5-\bar{x}_5)...(x_m-\bar{x}_m)+\\
&+(\bar{x}_1-a_1)(\bar{x}_3-a_3)\sum(x_2-\bar{x}_2)(x_4-\bar{x}_4)(x_5-\bar{x}_5)...(x_m-\bar{x}_m)+\\
&\dots\\
&+(\bar{x}_1-a_1)(\bar{x}_m-a_m)\sum(x_2-\bar{x}_2)(x_3-\bar{x}_3)(x_4-\bar{x}_4)...(x_{m-1}-\bar{x}_{m-1})+\\
&+(\bar{x}_2-a_2)(\bar{x}_3-a_3)\sum(x_1-\bar{x}_1)(x_4-\bar{x}_4)(x_5-\bar{x}_5)...(x_m-\bar{x}_m)+\\
&+(\bar{x}_2-a_2)(\bar{x}_4-a_4)\sum(x_1-\bar{x}_1)(x_3-\bar{x}_3)(x_5-\bar{x}_5)...(x_m-\bar{x}_m)+\\
&\dots\\
&+(\bar{x}_{m-1}-a_{m-1})(\bar{x}_m-a_m)\sum(x_1-\bar{x}_1)(x_2-\bar{x}_2)(x_3-\bar{x}_3)...(x_{m-2}-\bar{x}_{m-2})+\\
&\dots\\
&+(\bar{x}_1-a_1)(\bar{x}_2-a_2)...(\bar{x}_{m-3}-a_{m-3})(\bar{x}_{m-2}-a_{m-2})\sum(x_{m-1}-\bar{x}_{m-1})(x_m-\bar{x}_m)+\\
&+(\bar{x}_1-a_1)(\bar{x}_2-a_2)...(\bar{x}_{m-3}-a_{m-3})(\bar{x}_{m-1}-a_{m-1})\sum(x_{m-2}-\bar{x}_{m-2})(x_m-\bar{x}_m)+\\
&+(\bar{x}_1-a_1)(\bar{x}_2-a_2)...(\bar{x}_{m-3}-a_{m-3})(\bar{x}_m-a_m)\sum(x_{m-2}-\bar{x}_{m-2})(x_{m-1}-\bar{x}_{m-1})+\\
&\dots\\
&+(\bar{x}_3-a_3)(\bar{x}_4-a_4)...(\bar{x}_{m-1}-a_{m-1})(\bar{x}_m-a_m)\sum(x_1-\bar{x}_1)(x_2-\bar{x}_2)\Big],
\end{aligned}
\tag{3}
$$

справедливо для любых n и m, где n является пределом суммирования от 1 для значков $\sum$ с необозначенным верхним пределом.

Раскрывая скобки в левой части уравнения (3), видим, что оно может быть записано в виде:

$$
\sum\prod_{i=1}^{m}(x_i-\bar{x}_i)=\sum_{j=1}^{\binom{m}{0}}A_{0j}B_{mj}+\sum_{j=1}^{\binom{m}{1}}A_{1j}B_{m-1\,j}+\ldots+\sum_{j=1}^{\binom{m}{m}}A_{mj}B_{0j},
\tag{10}
$$

где

$$
\begin{aligned}
&A_{01}=1,\\
&A_{11}=-\bar{x}_1,\ A_{12}=-\bar{x}_2,\ A_{13}=-\bar{x}_3,\ \ldots,\ A_{1\binom{m}{1}}=-\bar{x}_m,\\
&A_{21}=\bar{x}_1\bar{x}_2,\ A_{22}=\bar{x}_1\bar{x}_3,\ A_{23}=\bar{x}_1\bar{x}_4,\ \ldots,\ A_{2\binom{m}{2}}=\bar{x}_{m-1}\bar{x}_m,\\
&\dots\\
&A_{m-1\,1}=(-1)^{m-1}\bar{x}_1\bar{x}_2\ldots\bar{x}_{m-1},\ A_{m-1\,2}=(-1)^{m-1}\bar{x}_1\bar{x}_2\ldots\bar{x}_{m-2}\bar{x}_m,\\
&\ldots,\ A_{m-1\binom{m}{m-1}}=(-1)^{m-1}\bar{x}_2\bar{x}_3\ldots\bar{x}_m,
\end{aligned}
$$

$$
A_{m1}=(-1)^m\bar{x}_1\bar{x}_2\ldots\bar{x}_m,
\tag{11}
$$

$$
\begin{aligned}
&B_{01} = n,\\
&B_{11} = \sum x_m,\ B_{12} = \sum x_{m-1},\ B_{13} = \sum x_{m-2},\ \ldots,\ B_{1\binom{m}{m-1}} = \sum x_1,\\
&\ldots\\
&B_{m-2\,1} = \sum x_3 x_4 \ldots x_m,\ B_{m-2\,2} = \sum x_2 x_4 x_5 \ldots x_m,\\
&B_{m-2\,3} = \sum x_2 x_3 x_5 x_6 \ldots x_m,\ \ldots,\ B_{m-2\binom{m}{2}} = \sum x_1 x_2 \ldots x_{m-2},\\
&B_{m-1\,1} = \sum x_2 x_3 \ldots x_m,\ B_{m-1\,2} = \sum x_1 x_3 x_4 \ldots x_m,\\
&\ldots,\ B_{m-1\binom{m}{1}} = \sum x_1 x_2 \ldots x_{m-1},\\
&B_{m1} = \sum x_1 x_2 \ldots x_m. \qquad (12)
\end{aligned}
$$

Допишем в квадратные скобки уравнения (3) сумму:

$$
\begin{aligned}
&(\bar{x}_1 - a_1)(\bar{x}_2 - a_2)\ldots(\bar{x}_{m-2} - a_{m-2})(\bar{x}_{m-1} - a_{m-1})\sum(x_m - \bar{x}_m)+\\
&+(\bar{x}_1 - a_1)(\bar{x}_2 - a_2)\ldots(\bar{x}_{m-2} - a_{m-2})(\bar{x}_m - a_m)\sum(x_{m-1} - \bar{x}_{m-1})+\\
&+(\bar{x}_1 - a_1)(\bar{x}_2 - a_2)\ldots(\bar{x}_{m-3} - a_{m-3})(\bar{x}_m - a_m)\sum(x_{m-2} - \bar{x}_{m-2})+\\
&\ldots\\
&+(\bar{x}_2 - a_2)(\bar{x}_3 - a_3)\ldots(\bar{x}_{m-1} - a_{m-1})(\bar{x}_m - a_m)\sum(x_1 - \bar{x}_1). \qquad (13)
\end{aligned}
$$

Такое дополнение имеет чисто фиктивный характер, поскольку очевидно, что $\sum(x_l - \bar{x}_l) = 0$ для любого $l = 1, 2, \ldots, m$.

Расписывая правую часть уравнения (3) с данным дополнением (13), видим, что она, как и (10), представляет собой сумму произведений констант n, $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_m$, $a_1, a_2, \ldots, a_m$ на сумму произведений всевозможных сочетаний чисел x_l; т. е. чисел B:

$$\sum \prod_{i=1}^{m} (x_i - \bar{x}_i) = \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=1}^{\binom{m}{i}} \acute{A}_{ij} B_{m-i\,j} + C. \qquad (14)$$

Здесь $\acute{A}_{ij}$ и C есть функции —

$$\acute{A}_{ij} = f_A(n, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_m, a_1, a_2, \ldots, a_m), \qquad (15)$$

$$C = f_C(n, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_m, a_1, a_2, \ldots, a_m), \qquad (16)$$

получаемые для слагаемых правой части уравнения (3).

Под знаком суммы в уравнении (14) присутствуют все различные произведения $\acute{A}B$, кроме произведения с коэффициентом B_{01}. Например, B_{m1} получается из первого слагаемого этой части уравнения; $B_{m-1\,1}, B_{m-1\,2}, \ldots, B_{m-1\binom{m}{1}}$ получаются из слагаемых в квадратных скобках: из первого, второго, третьего, $\ldots\binom{m}{1}$-го слагаемых соответственно; $B_{m-2\,1}, B_{m-2\,2}, B_{m-2\,3}, \ldots, B_{m-2\binom{m}{2}}$ — из $\binom{m}{1}+1, \binom{m}{1}+2, \ldots, \binom{m}{2}$-го слагаемых; $\ldots B_{11}$, $B_{12}, \ldots, B_{1\binom{m}{m-1}}$ — есть коэффициенты при слагаемых в дополнительной сумме: B_{11} присутствует в первом слагаемом суммы, B_{12} — во втором, B_{13} — в третьем $\ldots$ и $B_{1\binom{m}{m-1}}$ — в последнем. Величина C, не содержащая чисел x, составляется из каждого слагаемого правой части уравнения (3), и в нее целиком входит второе слагаемое этой части.

Требуется показать, что: a) коэффициенты $\acute{A}_{ij}$ равны соответствующим коэффициентам A_{ij}, b) слагаемое $\sum_{j=1}^{\binom{m}{m}} A_{mj} B_{0j}$, получаемое в левой части равенства (3), равно C. Для доказательства "a" докажем, что равны коэффициенты

$$A_{ij} = \acute{A}_{ij} \qquad (17)$$

для некоторых i, j при определенном B_{kj} $(k = m - i)$ в случае, когда числа x_l составляют непрерывную последовательность множителей в выражении для B_{kj}:

$$B_{kj} = \sum x_{k+1} x_{k+2} x_{k+3} \ldots x_m, \qquad 1 \leq k \leq m. \tag{18}$$

Для случая $k = m$ имеем $B_{mj} = B_{m1} = \sum x_1 x_2 \ldots x_m$, $A_{01} = \acute{A}_{01} = 1$ — видно из рассмотрения первого слагаемого правой части уравнения (3).

Для некоторого $k < m$ распишем равенство (17), рассматривая левую и правую части уравнения (3):

$$\begin{aligned}
&(-1)^k \, \bar{x}_1 \bar{x}_2 \ldots \bar{x}_k = (-1)^k \, a_1 a_2 \ldots a_k - \\
&-\Big[(\bar{x}_1 - a_1)(-1)^{k-1} \, \bar{x}_2 \bar{x}_3 \ldots \bar{x}_k + \\
&+(\bar{x}_2 - a_2)(-1)^{k-1} \, \bar{x}_1 \bar{x}_3 \ldots \bar{x}_k + \\
&\ldots \\
&+(\bar{x}_k - a_k)(-1)^{k-1} \, \bar{x}_1 \bar{x}_2 \ldots \bar{x}_{k-1} + \\
&+(\bar{x}_1 - a_1)(\bar{x}_2 - a_2)(-1)^{k-2} \, \bar{x}_3 \bar{x}_4 \ldots \bar{x}_k + \\
&+(\bar{x}_1 - a_1)(\bar{x}_3 - a_3)(-1)^{k-2} \, \bar{x}_2 \bar{x}_4 \ldots \bar{x}_k + \\
&\ldots \\
&+(\bar{x}_{k-1} - a_{k-1})(\bar{x}_k - a_k)(-1)^{k-2} \, \bar{x}_1 \bar{x}_2 \ldots \bar{x}_{k-2} + \\
&+(\bar{x}_1 - a_1)(\bar{x}_2 - a_2)(\bar{x}_3 - a_3)(-1)^{k-3} \, \bar{x}_4 \bar{x}_5 \ldots \bar{x}_k + \\
&\ldots \\
&+(\bar{x}_2 - a_2)(\bar{x}_3 - a_3) \ldots (\bar{x}_k - a_k)(-1)^{k-(k-1)} \, \bar{x}_1 + \\
&+(\bar{x}_1 - a_1)(\bar{x}_2 - a_2) \ldots (\bar{x}_k - a_k)(-1)^{k-k}\Big].
\end{aligned} \tag{19}$$

Используя очевидное соотношение $(-1)^{k-i} = (-1)^{k+i}$ при любом i, преобразуем (19) и раскроем квадратные скобки:

$$\begin{aligned}
&(-1)^k \, \bar{x}_1 \bar{x}_2 \ldots \bar{x}_k = (-1)^k \, a_1 a_2 \ldots a_k - \\
&-(\bar{x}_1 - a_1)(-1)^{k+1} \, \bar{x}_2 \bar{x}_3 \ldots \bar{x}_k - \\
&-(\bar{x}_2 - a_2)(-1)^{k+1} \, \bar{x}_1 \bar{x}_3 \ldots \bar{x}_k - \\
&\ldots \\
&-(\bar{x}_k - a_k)(-1)^{k+1} \, \bar{x}_1 \bar{x}_2 \ldots \bar{x}_{k-1} - \\
&-(\bar{x}_1 - a_1)(\bar{x}_2 - a_2)(-1)^{k+2} \, \bar{x}_3 \bar{x}_4 \ldots \bar{x}_k - \\
&-(\bar{x}_1 - a_1)(\bar{x}_3 - a_3)(-1)^{k+2} \, \bar{x}_2 \bar{x}_4 \ldots \bar{x}_k - \\
&\ldots \\
&-(\bar{x}_{k-1} - a_{k-1})(\bar{x}_k - a_k)(-1)^{k+2} \, \bar{x}_1 \bar{x}_2 \ldots \bar{x}_{k-2} - \\
&-(\bar{x}_1 - a_1)(\bar{x}_2 - a_2)(\bar{x}_3 - a_3)(-1)^{k+3} \, \bar{x}_4 \bar{x}_5 \ldots \bar{x}_k - \\
&\ldots \\
&-(\bar{x}_2 - a_2)(\bar{x}_3 - a_3) \ldots (\bar{x}_k - a_k)(-1)^{k+(k-1)} \, \bar{x}_1 - \\
&-(\bar{x}_1 - a_1)(\bar{x}_2 - a_2) \ldots (\bar{x}_k - a_k)(-1)^{k+k}.
\end{aligned} \tag{20}$$

Произведя деление уравнения на $(-1)^k$ и учитывая знак “$-$” перед последними слагаемыми правой части, получим

$$\begin{aligned}
&\bar{x}_1 \bar{x}_2 \ldots \bar{x}_k = a_1 a_2 \ldots a_k + \\
&+(-1)^2 \, (\bar{x}_1 - a_1) \bar{x}_2 \bar{x}_3 \ldots \bar{x}_k + \\
&+(-1)^2 \, (\bar{x}_2 - a_2) \bar{x}_1 \bar{x}_3 \ldots \bar{x}_k + \\
&\ldots
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+(-1)^2\,(\bar{x}_k - a_k)\bar{x}_1\bar{x}_2\dots\bar{x}_{k-1}+\\
&+(-1)^3\,(\bar{x}_1 - a_1)(\bar{x}_2 - a_2)\bar{x}_3\bar{x}_4\dots\bar{x}_k+\\
&+(-1)^3\,(\bar{x}_1 - a_1)(\bar{x}_3 - a_3)\bar{x}_2\bar{x}_4\dots\bar{x}_k+\\
&\dots\\
&+(-1)^3\,(\bar{x}_{k-1} - a_{k-1})(\bar{x}_k - a_k)\bar{x}_1\bar{x}_2\dots\bar{x}_{k-2}+\\
&+(-1)^4\,(\bar{x}_1 - a_1)(\bar{x}_2 - a_2)(\bar{x}_3 - a_3)\bar{x}_4\bar{x}_5\dots\bar{x}_k+\\
&\dots\\
&+(-1)^k\,(\bar{x}_2 - a_2)(\bar{x}_3 - a_3)\dots(\bar{x}_k - a_k)\bar{x}_1+\\
&+(-1)^{k+1}\,(\bar{x}_1 - a_1)(\bar{x}_2 - a_2)\dots(\bar{x}_k - a_k).
\end{aligned}
\tag{21}
$$

Меняя местами элементы внутри скобок и перенося все слагаемые, содержащие множители со скобками, через знак равенства, получим

$$
\begin{aligned}
&a_1a_2\dots a_k = \bar{x}_1\bar{x}_2\dots\bar{x}_k+\\
&+(a_1 - \bar{x}_1)\bar{x}_2\bar{x}_3\dots\bar{x}_k+\\
&+(a_2 - \bar{x}_2)\bar{x}_1\bar{x}_3\dots\bar{x}_k+\\
&\dots\\
&+(a_k - \bar{x}_k)\bar{x}_1\bar{x}_2\dots\bar{x}_{k-1}+\\
&+(a_1 - \bar{x}_1)(a_2 - \bar{x}_2)\bar{x}_3\bar{x}_4\dots\bar{x}_k+\\
&+(a_1 - \bar{x}_1)(a_3 - \bar{x}_3)\bar{x}_2\bar{x}_4\dots\bar{x}_k+\\
&\dots\\
&+(a_{k-1} - \bar{x}_{k-1})(a_k - \bar{x}_k)\bar{x}_1\bar{x}_2\dots\bar{x}_{k-2}+\\
&+(a_1 - \bar{x}_1)(a_2 - \bar{x}_2)(a_3 - \bar{x}_3)\bar{x}_4\bar{x}_5\dots\bar{x}_k+\\
&\dots\\
&+(a_2 - \bar{x}_2)(a_3 - \bar{x}_3)\dots(a_k - \bar{x}_k)\bar{x}_1+\\
&+(a_1 - \bar{x}_1)(a_2 - \bar{x}_2)\dots(a_k - \bar{x}_k).
\end{aligned}
\tag{22}
$$

Сделаем замену $z_i = a_i - \bar{x}_i$, откуда $a_i = \bar{x}_i + z_i$, и подставим в (22):

$$
\begin{aligned}
&(\bar{x}_1 + z_1)(\bar{x}_2 + z_2)(\bar{x}_3 + z_3)\dots(\bar{x}_k + z_k) =\\
&= \bar{x}_1\bar{x}_2\dots\bar{x}_k+\\
&+z_1\bar{x}_2\bar{x}_3\dots\bar{x}_k + z_2\bar{x}_1\bar{x}_3\dots\bar{x}_k + \dots + z_k\bar{x}_1\bar{x}_2\dots\bar{x}_{k-1}+\\
&+z_1z_2\bar{x}_3\bar{x}_4\dots\bar{x}_k + z_1z_3\bar{x}_2\bar{x}_4\dots\bar{x}_k + z_1z_4\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_5\dots\bar{x}_k + \dots\\
&+z_{k-1}z_k\bar{x}_1\bar{x}_2\dots\bar{x}_{k-2} + z_1z_2z_3\bar{x}_4\bar{x}_5\dots\bar{x}_k + \dots +\\
&\dots\\
&+\dots z_2z_3\dots z_k\bar{x}_1+\\
&+z_1z_2\dots z_k.
\end{aligned}
\tag{23}
$$

Нетрудно видеть, что уравнение (23) представляет собой верное тождество. Оно получается после раскрытия скобок в левой части уравнения.

Таким образом нами доказано, что уравнение (17) соотношения коэффициентов A и $\acute{A}$ справедливо для всех сумм B_{kj}, для которых произведения $x_{k+1}x_{k+2}\dots x_m$ образуют непрерывную последовательность. Однако, поскольку все числа x_l равнозначны, то равенство (17) можно распространить и для любых других коэффициентов A_{ij}, $\acute{A}_{ij}$ при сумме произведений

$$
B_{m-1\,j} = \sum x_\nu x_\mu \dots x_\tau, \qquad \nu < \mu \dots < \tau,
\tag{24}
$$

в которой для некоторых ν, μ имеет место $\mu - \nu > 1$. Это можно показать простым переобозначением индексов чисел x.

Поэтому утверждение "a" считаем доказанным.

Для доказательства утверждения "b" запишем слагаемые, не содержащие чисел x с левой и правой частей уравнения (3).

С левой стороны от знака равенства —

$$\sum_{j=1}^{\binom{m}{m}} A_{mj}B_{0j} = (-1)^m \bar{x}_1\bar{x}_2\ldots\bar{x}_m n. \tag{25}$$

С правой стороны равенства (с добавлением (13)) —

$$\begin{aligned}
&C = (-1)^m a_1a_2\ldots a_m n - n(\bar{x}_1 - a_1)(\bar{x}_2 - a_2)\ldots(\bar{x}_m - a_m)- \\
&-\Big[(\bar{x}_1 - a_1)(-1)^{m-1}\bar{x}_2\bar{x}_3\ldots\bar{x}_m n+ \\
&+(\bar{x}_2 - a_2)(-1)^{m-1}\bar{x}_1\bar{x}_3\ldots\bar{x}_m n+ \\
&\ldots \\
&+(\bar{x}_m - a_m)(-1)^{m-1}\bar{x}_1\bar{x}_2\ldots\bar{x}_{m-1} n+ \\
&+(\bar{x}_1 - a_1)(\bar{x}_2 - a_2)(-1)^{m-2}\bar{x}_3\bar{x}_4\ldots\bar{x}_m n+ \\
&+(\bar{x}_1 - a_1)(\bar{x}_3 - a_3)(-1)^{m-2}\bar{x}_2\bar{x}_4\ldots\bar{x}_m n+ \\
&\ldots \\
&+(\bar{x}_{m-1} - a_{m-1})(\bar{x}_m - a_m)(-1)^{m-2}\bar{x}_1\bar{x}_2\ldots\bar{x}_{m-2} n+ \\
&+(\bar{x}_1 - a_1)(\bar{x}_2 - a_2)(\bar{x}_3 - a_3)(-1)^{m-3}\bar{x}_4\bar{x}_5\ldots\bar{x}_m n+ \\
&\ldots \\
&+(\bar{x}_2 - a_2)(\bar{x}_3 - a_3)\ldots(\bar{x}_m - a_m)(-1)^2\bar{x}_1\bar{x}_2 n+ \\
&+(\bar{x}_1 - a_1)(\bar{x}_2 - a_2)\ldots(\bar{x}_{m-2} - a_{m-2})(\bar{x}_{m-1} - a_{m-1})(-1)^1\bar{x}_m n+ \\
&+(\bar{x}_1 - a_1)(\bar{x}_2 - a_2)\ldots(\bar{x}_{m-2} - a_{m-2})(\bar{x}_m - a_m)(-1)^1\bar{x}_{m-1} n+ \\
&\ldots \\
&+(\bar{x}_2 - a_2)(\bar{x}_3 - a_3)\ldots(\bar{x}_{m-1} - a_{m-1})(\bar{x}_m - a_m)(-1)^1\bar{x}_1 n\Big].
\end{aligned} \tag{26}$$

Приравняем (25) и (26). Поделив все на n и перенеся слагаемое $-(\bar{x}_1 - a_1)(\bar{x}_2 - a_2)\ldots(\bar{x}_m - a_m)$ на последнее место внутрь квадратных скобок, получаем

$$\begin{aligned}
&(-1)^m \bar{x}_1\bar{x}_2\ldots\bar{x}_m = (-1)^m a_1a_2\ldots a_m- \\
&-\Big[(\bar{x}_1 - a_1)(-1)^{m-1}\bar{x}_2\bar{x}_3\ldots\bar{x}_m+ \\
&+(\bar{x}_2 - a_2)(-1)^{m-1}\bar{x}_1\bar{x}_3\ldots\bar{x}_m+ \\
&\ldots \\
&+(\bar{x}_m - a_m)(-1)^{m-1}\bar{x}_1\bar{x}_2\ldots\bar{x}_{m-1}+ \\
&+(\bar{x}_1 - a_1)(\bar{x}_2 - a_2)(-1)^{m-2}\bar{x}_3\bar{x}_4\ldots\bar{x}_m+ \\
&+(\bar{x}_1 - a_1)(\bar{x}_3 - a_3)(-1)^{m-2}\bar{x}_2\bar{x}_4\ldots\bar{x}_m+ \\
&\ldots \\
&+(\bar{x}_{m-1} - a_{m-1})(\bar{x}_m - a_m)(-1)^{m-2}\bar{x}_1\bar{x}_2\ldots\bar{x}_{m-1}+ \\
&+(\bar{x}_1 - a_1)(\bar{x}_2 - a_2)(-1)^{m-2}\bar{x}_3\bar{x}_4\ldots\bar{x}_m+ \\
&+(\bar{x}_1 - a_1)(\bar{x}_3 - a_3)(-1)^{m-2}\bar{x}_2\bar{x}_4\ldots\bar{x}_m+ \\
&\ldots \\
&+(\bar{x}_{m-1} - a_{m-1})(\bar{x}_m - a_m)(-1)^{m-2}\bar{x}_1\bar{x}_2\ldots\bar{x}_{m-2}+ \\
&+(\bar{x}_1 - a_1)(\bar{x}_2 - a_2)(\bar{x}_3 - a_3)(-1)^{m-3}\bar{x}_4\bar{x}_5\ldots\bar{x}_m+ \\
&\ldots \\
&+(\bar{x}_2 - a_2)(\bar{x}_3 - a_3)\ldots(\bar{x}_{m-1} - a_{m-1})(\bar{x}_m - a_m)(-1)^1\bar{x}_1+
\end{aligned}$$

$$+(\bar{x}_1 - a_1)(\bar{x}_2 - a_2)\dots(\bar{x}_m - a_m)(-1)^0\Big]. \tag{27}$$

Замечаем, что это уравнение имеет много общего с уравнением (19), справедливость которого уже доказана. Отличие заключается лишь в том, что в (27) фигурирует символ "m", а не "k". Но поскольку нужно установить тождество для произвольного количества чисел $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_i, a_1, a_2, \dots, a_i$, то обозначение здесь не важно.

Таким образом, истинность уравнения (3) является доказанной.

Поступила в редакцию 18 апреля 1999 г.,
в переработанном виде 7 апреля 1999 г.