Вычислительные технологии, 2023, том 28, № 5, с. 87–100. © ФИЦ ИВТ, 2023
Computational Technologies, 2023, vol. 28, no. 5, pp. 87–100. © FRC ICT, 2023
ISSN 1560-7534
eISSN 2313-691X

DOI:10.25743/ICT.2023.28.5.008

Простые, быстрые и надежные способы максимизации распознающего функционала

С. П. Шарый[1,*], С. И. Жилин[2]
[1]Федеральный исследовательский центр информационных и вычислительных технологий, 630090, Новосибирск, Россия
[2]ООО "СиСорт", 656023, Барнаул, Россия
[*]Контактный автор: Шарый Сергей Петрович, e-mail: shary@ict.nsc.ru
Поступила 19 октября 2022 г., доработана 07 декабря 2022 г., принята в печать 14 декабря 2022 г.

Рассмотрены два способа вычисления безусловного максимума распознающего функционала для допускового множества решений интервальных систем линейных алгебраических уравнений. Их объединяет идея сведения исходной задачи максимизации к решению одной или нескольких задач линейного программирования, построенных по данной интервальной системе. Представлена теоретическая основа предлагаемых методов, обсуждаются вопросы программной реализации и вычислительных экспериментов с модельными задачами.

Ключевые слова: интервальная линейная система, допусковое множество решений, распознающий функционал, задача линейного программирования.

Цитирование: Шарый С.П., Жилин С.И. Простые, быстрые и надежные способы максимизации распознающего функционала. Вычислительные технологии. 2023; 28(5):87–100. DOI:10.25743/ICT.2023.28.5.008.

Введение

В этой статье рассматривается решение интервальных систем линейных алгебраических уравнений. Ее цель — представить два простых, быстрых и надежных способа нахождения безусловного максимума распознающего функционала допускового множества решений для интервальных линейных систем, которые основаны на сведении исходной задачи к решению специальных задач линейного программирования. Эти способы естественно дополняют существующие алгоритмы вычисления максимума распознающего функционала, которые используют численные методы негладкой оптимизации. Новые способы также технологичны и не сложны в реализации, поскольку позволяют опереться на развитую теорию и готовые программные продукты для решения задач линейного программирования.

Используемая в работе система обозначений следует неформальному международному стандарту [1]. В частности, все интервальные величины обозначаются буквами жирного шрифта, тогда как неинтервальные (точечные) никак специально не выделяются. Кроме того, будем обозначать с помощью подчеркивания $\underline{\boldsymbol{x}}$ нижний (левый) конец интервала $\boldsymbol{x}$, а с помощью надчеркивания $\overline{\boldsymbol{x}}$ — верхний (правый) конец интервала $\boldsymbol{x}$:

$$\boldsymbol{x} = [\underline{\boldsymbol{x}}, \overline{\boldsymbol{x}}] = \{\, x \in \mathbb{R} \mid \underline{\boldsymbol{x}} \le x \le \overline{\boldsymbol{x}} \}.$$

В отношении интервальных векторов и интервальных матриц операции взятия нижнего и верхнего концов применяются покомпонентно и поэлементно. В дальнейшем нам потребуются также некоторые характеристики интервалов:

$$\begin{aligned}
\operatorname{mid} \boldsymbol{x} &= \frac{1}{2}(\overline{\boldsymbol{x}} + \underline{\boldsymbol{x}}) && \text{— середина интервала } \boldsymbol{x},\\
\operatorname{rad} \boldsymbol{x} &= \frac{1}{2}(\overline{\boldsymbol{x}} - \underline{\boldsymbol{x}}) && \text{— радиус интервала } \boldsymbol{x},\\
|\boldsymbol{x}| &= \max\{|\underline{\boldsymbol{x}}|, |\overline{\boldsymbol{x}}|\} && \text{— модуль или абсолютное значение интервала } \boldsymbol{x}.
\end{aligned}$$

Абсолютное значение интервала — это максимум модулей чисел из этого интервала. Наконец, арифметические операции, операндами которых служат интервалы, — это операции классической интервальной арифметики или же пополняющей ее интервальной арифметики Каухера (см., к примеру, [2]).

1. Постановка задачи и предварительные сведения

Пусть дана интервальная система линейных алгебраических уравнений вида

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc}
\boldsymbol{a}_{11}x_1 & + & \boldsymbol{a}_{12}x_2 & + & \ldots & + & \boldsymbol{a}_{1m}x_n & = & \boldsymbol{b}_1,\\
\boldsymbol{a}_{21}x_1 & + & \boldsymbol{a}_{22}x_2 & + & \ldots & + & \boldsymbol{a}_{2m}x_n & = & \boldsymbol{b}_2,\\
\vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots\\
\boldsymbol{a}_{m1}x_1 & + & \boldsymbol{a}_{m2}x_2 & + & \ldots & + & \boldsymbol{a}_{mn}x_n & = & \boldsymbol{b}_m,
\end{array}\right. \tag{1}$$

или кратко

$$\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}, \tag{2}$$

где $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a}_{ij})$ — интервальная $m \times n$-матрица, $\boldsymbol{b} = (\boldsymbol{b}_i)$ — интервальный m-вектор. В интервальном анализе рассматриваются различные множества решений таких интервальных систем уравнений и одним из наиболее популярных и востребованных является *допусковое множество решений*, обозначаемое $\Xi_{tol}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$. Оно определяется следующим образом:

$$\Xi_{tol}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) := \bigl\{x \in \mathbb{R}^n \mid \text{для любой } A \in \boldsymbol{A} \text{ имеет место } Ax \in \boldsymbol{b}\bigr\},$$

т. е. является множеством всех таких векторов x, что произведение Ax попадает в коридор, задаваемый интервальным вектором правой части $\boldsymbol{b}$, при любом выборе $A \in \boldsymbol{A}$. В более формальном виде определение этого множества решений может быть записано как

$$\Xi_{tol}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = \bigl\{x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall A \in \boldsymbol{A})(\exists A \in \boldsymbol{A})(Ax = b)\bigr\}.$$

Допусковое множество решений возникает в задачах восстановления линейных зависимостей по данным с интервальной неопределенностью, в задачах управления и стабилизации систем, которые функционируют в условиях неопределенности и неоднозначности параметров и т. п. Допусковое множество решений может быть пустым, если в системе (1), (2) ширина интервальных элементов в матрице $\boldsymbol{A}$ превышает диапазоны соответствующих интервалов вектора правой части $\boldsymbol{b}$. Задача построения внутреннего приближения для допускового множества решений, если оно непусто, называется интервальной линейной задачей о допусках [3, 4].

Нетрудно показать (см., например, [2]), что точка $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$ принадлежит допусковому множеству решений интервальной системы линейных алгебраических уравнений (1), (2) тогда и только тогда, когда

$$\boldsymbol{A} \cdot \tilde{x} \subseteq \boldsymbol{b}, \tag{3}$$

где "$\cdot$" — интервальное матрично-векторное умножение. Допусковое множество решений является выпуклым полиэдральным (многогранным) множеством в пространстве $\mathbb{R}^n$. Это вытекает, в частности, из следующего результата.

Теорема И. Рона [2, 5, 6]. *Точка $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$ принадлежит допусковому множеству решений интервальной $m \times n$-системы линейных алгебраических уравнений $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$ тогда и только тогда, когда $\tilde{x} = x' - x''$ для векторов x', $x'' \in \mathbb{R}^n$, которые удовлетворяют системе из $(2m + 2n)$ линейных неравенств*

$$\begin{cases} \overline{\boldsymbol{A}}x' - \underline{\boldsymbol{A}}x'' \leq \overline{\boldsymbol{b}}, \\ -\underline{\boldsymbol{A}}x' + \overline{\boldsymbol{A}}x'' \leq -\underline{\boldsymbol{b}}, \\ x' \geq 0, \ x'' \geq 0. \end{cases} \tag{4}$$

Векторные неравенства в выписанных выше формулах и всюду далее в тексте понимаются покомпонентным образом. Из теоремы И. Рона и современного состояния теории линейного программирования, которая включает и теорию линейных неравенств (см., к примеру, [7]), следует, что распознавание пустоты/непустоты допускового множества решений интервальной линейной системы уравнений является задачей, которая разрешима за количество операций, ограниченное каким-то полиномом от размера задачи. Для ее решения можно применять развитые алгоритмы и широко доступное программное обеспечение.

Одним из мощных инструментов исследования допускового множества решений является техника, основанная на использовании так называемого распознающего функционала — специальной функции, обозначаемой по традиции Tol, которая зна́ком и величиной своих значений позволяет судить о принадлежности точки допусковому множеству решений и мере "допусковой" совместности системы уравнений в этой точке. Для интервальных линейных систем уравнений (1), (2) распознающий функционал имеет вид

$$\mathrm{Tol}\,(x, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \mathrm{rad}\, \boldsymbol{b}_i - \left| \mathrm{mid}\, \boldsymbol{b}_i - \sum_{j=0}^{n} \boldsymbol{a}_{ij} x_j \right| \right\}, \tag{5}$$

и его можно вывести различными способами, которые рассматриваются, к примеру, в работах [2–4, 8].

Более точно, пусть заданы интервальная $m \times n$-матрица $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a}_{ij})$ и интервальный m-вектор $\boldsymbol{b} = (\boldsymbol{b}_i)$. Тогда выражением (5) определяется функционал $\mathrm{Tol} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{IR}^{m \times n} \times \mathbb{IR}^m \to \mathbb{R}$, такой что принадлежность точки $\tilde{x}$ множеству решений $\Xi_{tol}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ системы уравнений $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$ равносильна неотрицательности Tol в $\tilde{x}$, т. е.

$$\tilde{x} \in \Xi_{tol}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathrm{Tol}\,(\tilde{x}, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \geq 0.$$

Таким образом, допусковое множество решений $\Xi_{tol}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ для интервальной системы линейных алгебраических уравнений $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$ является "множеством уровня" (лебеговым множеством) функционала Tol:

$$\Xi_{tol}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = \big\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \mathrm{Tol}\,(x, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \geq 0 \big\}. \tag{6}$$

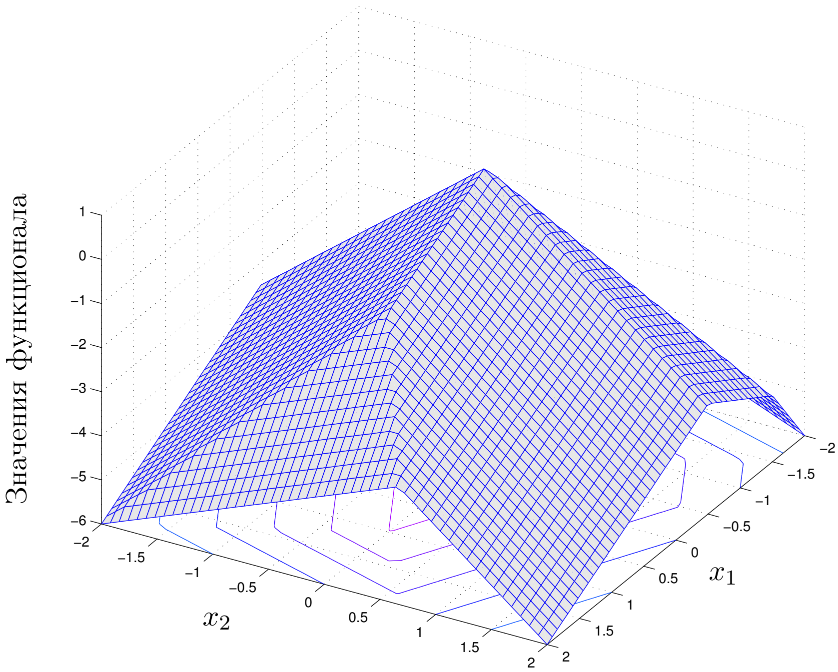

Рис. 1. Типичный график распознающего функционала
Fig. 1. A typical graph of the recognizing functional

Фактически посредством знака своих значений функционал Tol “распознает”, принадлежит ли точка множеству $\varXi_{tol}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$. Перечислим конспективно свойства распознающего функционала, их детальное изложение можно найти, к примеру, в [2–4].

Функционал Tol является непрерывной функцией своих аргументов, он также непрерывен по Липшицу, т. е. в сильном смысле. Функционал Tol является вогнутой функцией аргумента x на $\mathbb{R}^n$. Кроме того, функционал Tol — полиэдральная функция x, т. е. его график составлен из кусков гиперплоскостей. Типичный график функционала Tol для интервальной линейной системы уравнений с двумя переменными выглядит примерно так, как показано на рис. 1.

Функционал $\operatorname{Tol}(x, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ как функция x достигает конечного максимума на всем пространстве $\mathbb{R}^n$, причем

$$\max_{x\in\mathbb{R}^n} \operatorname{Tol}(x, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = \max_{x\in\mathbb{R}^n} \min_{1\le i\le m} \left\{ \operatorname{rad} \boldsymbol{b}_i - \left| \operatorname{mid} \boldsymbol{b}_i - \sum_{j=0}^{n} \boldsymbol{a}_{ij} x_j \right| \right\} \le \min_{1\le i\le m} \operatorname{rad} \boldsymbol{b}_i.$$

С помощью функционала Tol можно различать точки внутренности и точки границы допускового множества решений (см. подробности в [2–4]).

Таким образом, исследование пустоты/непустоты допускового множества решений интервальных систем линейных алгебраических уравнений (ИСЛАУ) может быть выполнено по следующей схеме. Для интервальной линейной системы $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$ решаем задачу безусловной максимизации функционала $\operatorname{Tol}(x, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$. Пусть

$$\alpha^* = \max_{x\in\mathbb{R}^n} \operatorname{Tol}(x, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}),$$

и этот максимум достигается в точке $t \in \mathbb{R}^n$. Тогда:

- если $\alpha^* \ge 0$, то $t \in \varXi_{tol}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \neq \varnothing$, т. е. допусковое множество решений непусто и t лежит в нем;

- если $\alpha^* > 0$, то t лежит в непустой топологической внутренности допускового множества решений;
- если $\alpha^* < 0$, то $\Xi_{tol}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = \varnothing$, т. е. допусковое множество решений является пустым.

В силу сказанного большую важность приобретает умение находить безусловный максимум распознающего функционала Tol. Фактически он показывает максимальную возможную меру совместности для соответствующей интервальной линейной системы уравнений, а аргумент этого максимума может быть взят в качестве "псевдорешения", т. е. точки, доставляющей системе наибольшую совместность.

К настоящему моменту предложено несколько методов нахождения максимума распознающего функционала. Все они основаны на использовании методов негладкой оптимизации [9–11] и опираются на свойство вогнутости распознающего функционала. Ниже представлены два новых подхода к его максимизации, которые удачно дополняют существующие численные методы.

2. Метод варьирования уровня

Идея этого метода максимизации распознающего функционала наглядно представлена на рис. 2. Если мы умеем относительно просто решать уравнения

$$\mathrm{Tol}\,(x) = \alpha \tag{7}$$

для различных $\alpha \in \mathbb{R}$ или хотя бы проверять наличие у них решений (т. е. совместны они или нет), то на основании этих результатов можно организовать уточнение максимума для Tol (для удобства здесь и далее пишем у функционала Tol только первый и наиболее важный аргумент). Более точно (рис. 2):

- если уравнение $\mathrm{Tol}\,(x) = \alpha$ совместно, то $\max_{x\in\mathbb{R}^n} \mathrm{Tol} \geq \alpha$;
- если уравнение $\mathrm{Tol}\,(x) = \alpha$ несовместно, то $\max_{x\in\mathbb{R}^n} \mathrm{Tol} < \alpha$.

По сути, здесь используется та же идея, что и в методах дробления графика для глобальной оптимизации функций, разработанных ранее в [2, 12].

Можно немного модифицировать сформулированные выше соображения, решая вместо уравнений (7) неравенства вида $\mathrm{Tol}\,(x) \geq \alpha$ для различных $\alpha \in \mathbb{R}$, т. е. проверяя их совместность. Тогда

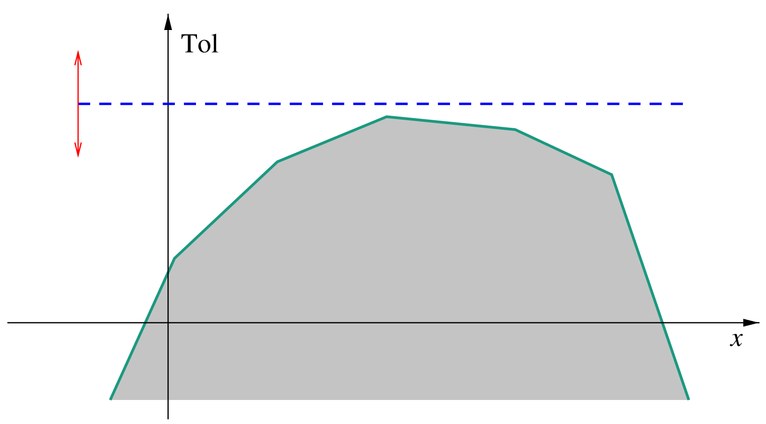

Рис. 2. Идея метода варьирования уровня
Fig. 2. The idea of the level variation method.

$$\begin{cases} \text{если неравенство } \mathrm{Tol}\,(x) \geq \alpha \text{ совместно, то } \max_{x\in\mathbb{R}^n} \mathrm{Tol}\, \geq \alpha; \\ \text{если неравенство } \mathrm{Tol}\,(x) \geq \alpha \text{ несовместно, то } \max_{x\in\mathbb{R}^n} \mathrm{Tol}\, < \alpha. \end{cases} \tag{8}$$

Таким образом, искомый максимум является точкой, в которой при увеличении α происходит смена совместности неравенств $\mathrm{Tol}\,(x) \geq \alpha$ на несовместность.

Для уточнения значения максимума зададимся каким-нибудь интервалом, в котором гарантированно содержится искомое α, и затем организуем бисекцию этого интервала с проверкой совместности неравенств $\mathrm{Tol}\,(x) \geq \alpha$. Напомним, что в популярном численном методе бисекции (называемом также половинным делением, дихотомией и т. п.) интервал локализации решения задачи последовательно разбивается пополам и по результатам исследования статуса средней точки для дальнейшего рассмотрения оставляется левая или правая половина рассеченного интервала (см., к примеру, [13]). Тем самым двусторонние границы для интересующего нас решения на каждом шаге сужаются в два раза.

Рассмотрим выписанные неравенства (8) более подробно. Если $\mathrm{Tol}\,(x) \geq \alpha$, то

$$\min_{1\leq i\leq m} \left\{ \mathrm{rad}\,\boldsymbol{b}_i - \left| \mathrm{mid}\,\boldsymbol{b}_i - \sum_{j=0}^{n} \boldsymbol{a}_{ij} x_j \right| \right\} - \alpha \geq 0,$$

что равносильно

$$\min_{1\leq i\leq m} \left\{ (\mathrm{rad}\,\boldsymbol{b}_i - \alpha) - \left| \mathrm{mid}\,\boldsymbol{b}_i - \sum_{j=0}^{n} \boldsymbol{a}_{ij} x_j \right| \right\} \geq 0,$$

так как слагаемое $(-\alpha)$ можно пронести в каждое из выражений в фигурных скобках, по которым берется общий минимум. При условии

$$\alpha \leq \min_{1\leq i\leq m} \mathrm{rad}\,\boldsymbol{b}_i \tag{9}$$

справедливо

$$\mathrm{rad}\,\boldsymbol{b}_i - \alpha \geq 0 \qquad \text{для всех } i = 1, 2, \ldots, m,$$

так что эти величины могут рассматриваться как неотрицательные радиусы каких-то интервалов. Поэтому можно считать, что выражение

$$\min_{1\leq i\leq m} \left\{ (\mathrm{rad}\,\boldsymbol{b}_i - \alpha) - \left| \mathrm{mid}\,\boldsymbol{b}_i - \sum_{j=0}^{n} \boldsymbol{a}_{ij} x_j \right| \right\}$$

тоже задает распознающий функционал для допускового множества решений интервальной линейной системы с той же самой матрицей $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a}_{ij})$, но с модифицированной правой частью, у которой сохранены середины компонент $\mathrm{mid}\,\boldsymbol{b}_i$, а их радиусы стали равными $\mathrm{rad}\,\boldsymbol{b}_i - \alpha$, $i = 1, 2, \ldots, m$.

В целом эту новую интервальную систему линейных алгебраических уравнений можно записать в виде

$$\boldsymbol{A}x = \begin{pmatrix} [\underline{\boldsymbol{b}}_1 + \alpha, \overline{\boldsymbol{b}}_1 - \alpha] \\ [\underline{\boldsymbol{b}}_2 + \alpha, \overline{\boldsymbol{b}}_2 - \alpha] \\ \vdots \qquad \vdots \\ [\underline{\boldsymbol{b}}_m + \alpha, \overline{\boldsymbol{b}}_m - \alpha] \end{pmatrix}, \tag{10}$$

или кратко

$$\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b} + [\alpha, -\alpha]\mathrm{e},$$

где $\mathrm{e} = (1, 1, \ldots, 1)^\top$ — m-вектор из всех единиц, а интервал $[\alpha, -\alpha]$ может быть неправильным, так что все операции понимаются в смысле полной интервальной арифметики Каухера [2]. Конечно, сужать интервальный вектор правой части подобным образом можно не для всякого α, но лишь для таких, чтобы в правой части системы (10) оставались все правильные интервалы. Условием этого является выполнение неравенства (9).

Итак, из равенства (6) следует, что при условии (9) решение неравенства $\mathrm{Tol}\,(x) \geq \alpha$, которое является пересечением гиперплоскости уровня α с подграфиком распознающего функционала Tol, — это допусковое множество решений интервальной линейной системы (10). Его точки представляются в виде разности $x' - x''$ для x' и x'', которые в силу теоремы И. Рона являются решениями системы линейных неравенств

$$\begin{cases} \overline{\boldsymbol{A}}x' - \underline{\boldsymbol{A}}x'' \leq \overline{\boldsymbol{b}} + \alpha\mathrm{e}, \\ -\underline{\boldsymbol{A}}x' + \overline{\boldsymbol{A}}x'' \leq -\underline{\boldsymbol{b}} + \alpha\mathrm{e}, \\ x' \geq 0,\ x'' \geq 0. \end{cases} \tag{11}$$

Эта система неравенств аналогична (4), но имеет скорректированную правую часть, соответствующую правой части интервальной линейной системы (10). Для решения выписанной системы, т. е. выяснения пустоты/непустоты ее множества решений и его оценивания, можно воспользоваться готовыми программами для ЭВМ, реализующими либо специализированные методы решения систем линейных неравенств (метод Фурье–Моцкина и др.), либо популярные методы линейного программирования.

В целом алгоритм вычисления $\max \mathrm{Tol}$ имеет следующий вид:

- находим интервал $[\underline{\alpha}, \overline{\alpha}]$ значений параметра α раздутия-сужения правой части в системе (10), на котором пропадает совместность исходной ИСЛАУ;
- в соответствии с (8) организуем бисекцию интервала $[\underline{\alpha}, \overline{\alpha}]$ для уточнения критического значения α, в котором происходит исчезновение совместности.

Критерием остановки можно выбрать (как и всегда в процедурах бисекции) достижение заданной малости ширины интервала значений α, локализующего критическое значение этого параметра.

Рассмотрим вопрос нахождения начального интервала $[\underline{\alpha}, \overline{\alpha}]$ для параметра раздутия α. Верхним концом этого интервала, очевидно, можно взять величину (9), т. е.

$$\overline{\alpha} = \min_{1 \leq i \leq m} \mathrm{rad}\, \boldsymbol{b}_i.$$

В самом деле при таком α

$$\max_{x \in \mathbb{R}^n} \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ (\mathrm{rad}\, \boldsymbol{b}_i - \alpha) - \left| \mathrm{mid}\, \boldsymbol{b}_i - \sum_{j=0}^{n} \boldsymbol{a}_{ij} x_j \right| \right\} = 0,$$

поскольку для индекса i, на котором достигается минимум в (9), соответствующее выражение в фигурных скобках имеет вид

$$-\left| \mathrm{mid}\, \boldsymbol{b}_i - \sum_{j=0}^{n} \boldsymbol{a}_{ij} x_j \right|,$$

его максимум по x равен нулю, а потому общий минимум по $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ всех выражений, из которых собирается распознающий функционал, также не может превосходить нуль.

Определение нижнего конца $\underline{\alpha}$ начального интервала может быть основано на следующих соображениях. Зафиксируем какой-нибудь вектор v из $\mathbb{R}^n$. Из очевидного включения $\boldsymbol{A}v \subseteq \boldsymbol{A}v$ и характеризации (3) вытекает, что при $\tilde{\boldsymbol{b}} = \boldsymbol{A}v$ допусковое множество решений интервальной линейной системы

$$\boldsymbol{A}x = \tilde{\boldsymbol{b}}$$

является непустым и v принадлежит ему. Таким же непустым будет допусковое множество решений любой интервальной линейной системы с более широким вектором правой части $\tilde{\boldsymbol{b}} \supseteq \boldsymbol{A}v$, и v также будет принадлежать ему. Эти рассуждения дают конкретный рецепт раздувания правой части исходной системы уравнений, при котором она гарантированно получит непустое допусковое множество решений: нужно в качестве правой части итервальной линейной системы $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$ взять вектор $\boldsymbol{b} + [\alpha, -\alpha]\mathrm{e}$ с таким значением α, что он гарантированно содержит $\boldsymbol{A}v$.

Из условия включения

$$\boldsymbol{b} + [\alpha, -\alpha]\mathrm{e} \supseteq \boldsymbol{A}v$$

получаем неравенства на концы компонент интервальных векторов:

$$\begin{cases} \underline{\boldsymbol{b}} + \alpha\mathrm{e} \;\leq\; \underline{\boldsymbol{A}v}, \\ \overline{\boldsymbol{b}} - \alpha\mathrm{e} \;\geq\; \overline{\boldsymbol{A}v}, \end{cases}$$

т. е.

$$\begin{cases} \alpha\mathrm{e} \;\leq\; \underline{\boldsymbol{A}v} - \underline{\boldsymbol{b}}, \\ \alpha\mathrm{e} \;\leq\; \overline{\boldsymbol{b}} - \overline{\boldsymbol{A}v}. \end{cases}$$

Как следствие,

$$\alpha \leq \min_{1 \leq i \leq m} \min\bigl\{(\underline{\boldsymbol{A}v})_i - \underline{\boldsymbol{b}}_i, \overline{\boldsymbol{b}}_i - (\overline{\boldsymbol{A}v})_i\bigr\}.$$

Итак, зафиксировав произвольно вектор v, мы можем взять в качестве нижней границы искомого интервала $[\underline{\alpha}, \overline{\alpha}]$ значение

$$\underline{\alpha} = \min_{1 \leq i \leq m} \min\bigl\{(\underline{\boldsymbol{A}v})_i - \underline{\boldsymbol{b}}_i, \overline{\boldsymbol{b}}_i - (\overline{\boldsymbol{A}v})_i\bigr\}.$$

Это выражение выглядит наиболее просто, если взять $v = 0$:

$$\underline{\alpha} = \min_{1 \leq i \leq m} \min\bigl\{-\underline{\boldsymbol{b}}_i, \overline{\boldsymbol{b}}_i\bigr\}.$$

Полученное таким образом значение $\underline{\alpha}$ может оказаться не самым выгодным в каких-то конкретных задачах, но последующие бисекции исходного интервала $[\underline{\alpha}, \overline{\alpha}]$ легко компенсируют эту неоптимальность.

Помимо собственно максимума распознающего функционала Tol часто нужно знать еще аргумент этого максимума, т. е. точку, в которой он достигается. Для ее нахождения можно предложить, например, такой прием. Одновременно с решением систем линейных неравенств вида (11) станем находить покоординатные оценки — минимум и максимум — его множества решений по какой-то фиксированной координате вместе с точками, в которых они достигаются (см. рис. 3, где оценивание множества решений

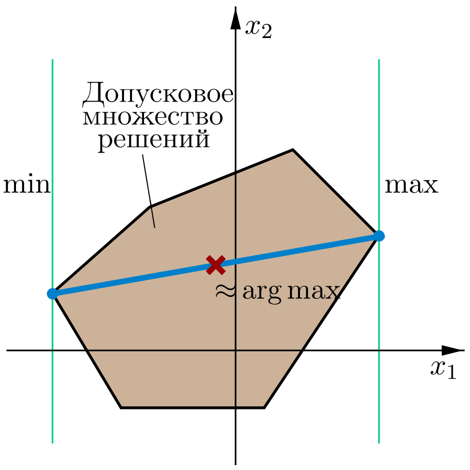

Рис. 3. Идея оценивания аргумента максимума
Fig. 3. The idea of estimating the maximum argument

выполняется по первой координате). Средняя точка отрезка прямой, соединяющей найденные аргументы минимума и максимума покоординатных оценок, очевидно, лежит во множестве решений и может служить хорошим приближением к аргументу максимума распознающего функционала. В процессе работы нашего алгоритма бисекции допусковые множества решений интервальных систем (10), уменьшаясь в размерах, стягиваются в точку и это приближение становится все более точным.

3. Сведение к единственной задаче линейного программирования

Основная идея изложенного в предыдущем разделе подхода заключается в том, что задача поиска максимума распознающего функционала $\mathrm{Tol}\,(x)$ равносильна задаче нахождения такого минимального уширения α^* правой части интервальной линейной системы (1), (2), которое обеспечивает непустоту его допускового множества решений. В свою очередь, это множество решений в силу теоремы И. Рона описывается системой линейных неравенств (11). Учитывая, что переменная α входит в эти неравенства линейным образом, искомый оптимум α^* можно получить как решение следующей задачи линейного программирования, записанной в стандартной форме [7]:

$$\text{найти} \quad \min \alpha \tag{12}$$

при ограничениях

$$\left\{\begin{aligned} \overline{\boldsymbol{A}}x' - \underline{\boldsymbol{A}}x'' - \alpha\mathrm{e} &\le \overline{\boldsymbol{b}}, \\ -\underline{\boldsymbol{A}}x' + \overline{\boldsymbol{A}}x'' - \alpha\mathrm{e} &\le -\underline{\boldsymbol{b}}, \\ x' \ge 0,\ x'' &\ge 0. \end{aligned}\right. \tag{13}$$

Вектор $\mathrm{e} = (1, 1, \dots, 1)^\top$ в выписанной системе ограничений (13), как и ранее, имеет размерность m, а в целом (13) получена из системы (11) перенесением членов $\alpha\mathrm{e}$ из правой части в левую.

С вычислительной точки зрения такая формулировка задачи о поиске α^* освобождает от необходимости организовывать процесс бисекции по α (включая первичную оценку границ интервала, заключающего оптимум), а также отдельное приближение аргумента максимума. Бисекция заменяется стандартными итерациями алгоритмов решения задач линейного программирования (симплекс-метода, методов внутренней точки и т. п.). Сама задача линейного программирования (12), (13) имеет при этом другой характер, нежели проверка совместности системы линейных неравенств (11) (совпадающей с (13)).

Отметим в заключение темы, что процедуры коррекции совместности интервальной линейной системы уравнений путем раздутия или сужения правой части имеют давнюю традицию. Они применялись, к примеру, еще в работах Н.М. Оскорбина 80-х гг. прошлого века, в частности в созданном под его руководством программном комплексе MCN [14]. Об их алгоритмике и работе можно составить представление по сопровождающим программу файлам интерактивной помощи *.hlp, которые используют кодировку CP866.

4. Программный код и итоги вычислительных экспериментов

Описанные в предшествующих разделах алгоритмы реализованы авторами в виде единой функции `tolinprog` для свободной системы компьютерной математики Octave [15] и выложены в свободный доступ [16]. Интерфейс функции (набор параметров и их смысл) сделан аналогичным тому, который принят в популярной программе `tolsolvty` для нахождения максимума распознающего функционала с помощью методов негладкой оптимизации [17]. Дополнительный аргумент функции `tolinprog` позволяет переключать способ нахождения максимума распознающего функционала между алгоритмами, изложенными в разд. 2 и 3.

Система Octave и ей подобные (Scilab, MATLAB и др.) особенно удобны для нашей реализации из-за наличия в их составе качественных подпрограмм для решения задачи линейного программирования. В частности, в Octave на данный момент имеется функция `glpk`, реализующая целый арсенал методов решения задачи линейного программирования — прямой и двойственный симплекс-методы, методы внутренних точек и др. Ее мы использовали при написании программы `tolinprog`. Кроме того, для Octave имеется библиотека интервальных вычислений [18], которая дает возможность легко выполнять в среде Octave решение различных интервальных задач.

Естественно, что все сказанное справедливо и в отношении реализации описанных выше методов на любом другом языке программирования, имеющем хорошую поддержку (с помощью соответствующих библиотек или как-нибудь еще) решения задач линейного программирования. Например, это верно для Python, C/C++ и ряда других.

В методе из разд. 2 для более точного нахождения максимального значения функционала Tol можно воспользоваться его дополнительным вычислением в точке, найденной как аргумент максимума. Затем берем наибольшее из полученных двух значений Tol: то, что найдено с помощью бисекции интервала $[\underline{\alpha}, \overline{\alpha}]$, и то, которое Tol принимает в точке аргумента максимума. Наш вычислительный опыт свидетельствует о том, что этот прием в самом деле помогает уточнению значения $\max \mathrm{Tol}$.

Вычислительные эксперименты на модельных задачах показывают, что оба способа работают хорошо, надежно и быстро, находя максимум распознающего функционала допускового множества решений в самых разнообразных ситуациях. Решения, выдаваемые обоими методами, совпадают с высокой точностью. Тем не менее способ из разд. 3

(сведение к одной задаче линейного программирования) всегда оказывается более быстрым, чем способ из разд. 2 (варьирование уровня). Выигрыш во времени может достигать нескольких десятков раз и существенно зависит от того, как назначен критерий остановки бисекции для алгоритма, приведенного в разд. 2.

Интересные выводы можно сделать при сравнении программы `tolinprog` с программами, реализующими максимизацию распознающего функционала с помощью вычислительных методов негладкой оптимизации. В настоящее время общедоступны две такие программы, в которых использован так называемый r-алгоритм — подъем по суперградиенту вкупе с растяжением пространства (его подробное описание можно увидеть в работе [9]). Это программы `tolsolvty` [17] и `tolsolvty2` [19] с идентичными оптимизационными алгоритмами, которые различаются способом вычисления значений целевой функции и ее суперградиента (на известном научном портале ResearchGate на странице первого автора выложена также программа `tolsolvty22`, но она является англоязычной версией программы `tolsolvty`). В целом программа `tolsolvty` работает существенно быстрее, чем `tolsolvty2`, и общий выигрыш может достигать сотен или даже (с ростом размерности) тысяч раз.

Скорости работы программ `tolinprog` с алгоритмом из разд. 3 и `tolsolvty` сравнимы друг с другом. Если в исследуемой ИСЛАУ матрица системы — почти квадратная, то немного быстрее считает `tolinprog`. Если же строк в матрице системы больше, чем столбцов, то немного быстрее оказывается `tolsolvty`.

Решения, выдаваемые `tolsolvty` (и `tolsolvty2`), зачастую немного отличаются от решений, отыскиваемых программой `tolinprog`, в сторону недооценки значения максимума. В пограничных ситуациях, когда максимум распознающего функционала почти равен нулю, эта недооценка иногда может быть такой, что `tolsolvty` выдает небольшое отрицательное значение максимума и сообщение "Допусковое множество пусто", а `tolinprog` — малое положительное значение максимума и, соответственно, сообщение "Допусковое множество непусто". Этот эффект проявляется главным образом для систем уравнений, где количество строк примерно совпадает с количеством неизвестных, т. е. матрица системы — квадратная или почти квадратная. Если количество строк существенно больше количества переменных (т. е. матрица системы — "высокая стоячая"), то результаты работы разных программ практически всегда совпадают.

Заключение

Предложенные методы вычисления максимума распознающего функционала расширяют возможности работы с допусковым множеством решений интервальных линейных систем уравнений и делают более доступными и развитыми все связанные с ним вычислительные технологии. В частности, оба способа позволяют несложно учитывать двусторонние ограничения на переменные, по которым мы ищем максимум распознающего функционала, что весьма важно во многих реальных задачах.

Полное сравнение новых вычислительных методов друг с другом и с оптимизационными подходами, представленными, например, в [9, 11], по различным критериям (точность, трудоемкость и т. п.) является делом будущей практики. Но результаты, изложенные в статье, фактически уже обеспечивают существенное увеличение (в два раза) запаса вычислительных методов, которые можно применять для максимизации распознающего функционала допускового множества решений ИСЛАУ. И это значительно обогащает вычислительный инструментарий интервального анализа.

Список литературы

[1] **Kearfott R.B., Nakao M., Neumaier A., Rump S., Shary S.P., van Hentenryck P.** Standardized notation in interval analysis. Computational Technologies. 2010; 15(1):7–13.

[2] **Шарый С.П.** Конечномерный интервальный анализ. Новосибирск: ФИЦ ИВТ; 2022: 655. Адрес доступа: http://www.nsc.ru/interval/Library/InteBooks/SharyBook.pdf.

[3] **Shary S.P.** Solving the linear interval tolerance problem. Mathematics and Computers in Simulation. 1995; 39(1–2):53–85. DOI:10.1016/0378-4754(95)00135-K.

[4] **Шарый С.П.** Решение интервальной линейной задачи о допусках. Автоматика и телемеханика. 2004; (10):147–162.

[5] **Rohn J.** Inner solutions of linear interval systems. Interval Mathematics 1985, Nickel K., ed. Lecture Notes in Computer Science 212. N.Y.: Springer Verlag; 1986: 157–158.

[6] **Фидлер М., Недома Й., Рамик Я., Рон И., Циммерманн К.** Задачи линейной оптимизации с неточными данными. Пер. с англ. М.; Ижевск: Издательство "РХД"; 2008: 288.

[7] **Схрейвер А.** Теория линейного и целочисленного программирования. В 2 т. Пер с англ. М.: Мир; 1991: 360, 344.

[8] **Шарый С.П.** Восстановление функциональных зависимостей по данным с интервальной неопределенностью. Информатика и системы управления. 2022; 3(73):130–143.

[9] **Стецюк П.И.** Субградиентные методы ralgb5 и ralgb4 для минимизации овражных выпуклых функций. Вычислительные технологии. 2017; 22(2):127–149.

[10] **Нурминский Е.А.** Метод отделяющих плоскостей с ограниченной памятью для решения задач выпуклой негладкой оптимизации. Вычислительные методы и программирование. 2006; 7(1):133–137.

[11] **Воронцова Е.А.** Линейная задача о допусках для интервальной модели межотраслевого баланса. Вычислительные технологии. 2017; 22(2):67–84.

[12] **Shary S.P.** A surprising approach in interval global optimization. Reliable Computing. 2001; 7(6):497–505. DOI:10.1023/A:1014754803382.

[13] **Волков Е.А.** Численные методы. М.: Наука; 1987.

[14] **Оскорбин Н.М., Максимов А.В.** MCN: программа для построения линейной регрессионной модели по данным с интервальной неопределенностью. Барнаул: Алтайский гос. университет; 1987. Адрес доступа: http://www.nsc.ru/interval/Programing/MCN/mcn.tar.

[15] GNU Octave — scientific programming language. Available at: https://octave.org.

[16] `tolinprog` — программа для систем компьютерной математики Matlab и Octave. Адрес доступа: http://www.nsc.ru/interval/Programing/OctCodes/tolinprog.m.

[17] `tolsolvty` — программа для систем компьютерной математики Matlab и Octave. Адрес доступа: http://www.nsc.ru/interval/Programing/OctCodes/tolsolvty.m.

[18] The GNU Octave interval package for real-valued interval arithmetic. Available at: https://wiki.octave.org/Interval_package.

[19] **Шарый С.П.** `TOLSOLVTY2` — программа для вычисления максимума распознающего функционала допускового множества решений интервальных линейных систем уравнений. 2014. DOI:10.13140/RG.2.1.1617.1281. Адрес доступа: https://www.researchgate.net/publication/294889566_TOLSOLVTY2.

Вычислительные технологии, 2023, том 28, № 5, с. 87–100. © ФИЦ ИВТ, 2023 ISSN 1560-7534
Computational Technologies, 2023, vol. 28, no. 5, pp. 87–100. © FRC ICT, 2023 eISSN 2313-691X

COMPUTATIONAL TECHNOLOGIES

DOI:10.25743/ICT.2023.28.5.008

Simple, fast and reliable methods for maximization of recognizing functional

S. P. Shary[1,*], S. I. Zhilin[2]

[1]Federal Research Center for Information and Computational Technologies, 630090, Novosibirsk, Russia
[2]CSort LLC, 656023, Barnaul, Russia
[*]Corresponding author: Sergey P. Shary, e-mail: shary@ict.nsc.ru

Received October 19, 2022, revised December 07, 2022, accepted December 14, 2022.

Abstract

The article considers the solution of interval systems of linear algebraic equations (ISLAE) and presents two simple, fast and reliable ways to find the unconstrained maximum of the recognizing functional of the tolerance set of solutions.

The recognizing functional is a special function that, using the sign and magnitude of its values, makes it possible to judge whether a point belongs to the tolerable solution set and gives a measure of "tolerable compatibility" of the interval system of equations at the point. The technique based on the use of the recognizing functional is one of the powerful tools for studying interval systems of equations and their tolerable solution sets. The paper presents two methods for computing the maximum of the recognizing functional, united by the general idea of reducing the original maximization problem to solving one or more special linear programming problems built on a given interval system. The theoretical basis of the proposed methods is presented. The issues of software implementation are discussed, as well as computational experiments with model problems.

The reduction is based on the Rohn theorem on the characterization of points of the tolerable solution sets for ISLAE, which allows us to representing it as solutions to a system of linear inequalities. This opens up the possibility of using linear programming methods for unconstrained maximization of the recognition functional and for studying whether the tolerable solution set is empty or notnempy.

The methods proposed in this article naturally complement the currently existing algorithms for computing the maximum of the recognizing functional, which use numerical methods of non-smooth optimization. Our new methods are both technologically advanced and easy to implement, since they allow us to utilize developed theory and ready-made software products for solving linear programming problems.

Keywords: interval linear systems of equations, tolerable solution set, recognizing functional, linear programming.

Citation: Shary S.P., Zhilin S.I. Simple, fast and reliable methods for maximization of recognizing functional. Computational Technologies. 2023; 28(5):87–100. DOI:10.25743/ICT.2023.28.5.008. (In Russ.)

References

1. **Kearfott R.B., Nakao M., Neumaier A., Rump S., Shary S.P., van Hentenryck P.** Standardized notation in interval analysis. Computational Technologies. 2010; 15(1):7–13.
2. **Shary S.P.** Konechnomernyy interval'nyy analiz [Finite-dimensional interval analysis]. Novosibirsk: FITs IVT; 2022: 655. Available at: `http://www.nsc.ru/interval/Library/InteBooks/SharyBook.pdf`. (In Russ.)
3. **Shary S.P.** Solving the linear interval tolerance problem. Mathematics and Computers in Simulation. 1995; 39(1–2):53–85. DOI:10.1016/0378-4754(95)00135-K.

4. **Shary S.P.** An interval linear tolerance problem. Automation and Remote Control. 2004; 65(10):1653–1666. DOI:10.1023/B:AURC.0000044274.25098.da.
5. **Rohn J.** Inner solutions of linear interval systems. Interval Mathematics 1985, Nickel K., ed. Lecture Notes in Computer Science 212. N.Y.: Springer Verlag; 1986: 157–158.
6. **Fiedler M., Nedoma J., Ramík J., Rohn J., Zimmermann K.** Linear optimization problems with inexact data. N.Y.: Springer; 2006: XVI, 214. DOI:10.1007/0-387-32698-7.
7. **Schrijver A.** Theory of linear and integer programming. Chichester, N.Y.: John Wiley and Sons; 1999: 484.
8. **Shary S.P.** Curve fitting problem for data with interval uncertainty. Information Science and Control Systems. 2022; 3(73):130–143. (In Russ.)
9. **Stetsyuk P.I.** Subgradient methods ralgb5 and ralgb4 for minimization of ravine-like convex functions. Computational Technologies. 2017; 22(2):127–149. (In Russ.)
10. **Nurminski E.A.** Separating planes method with limited memory for solving convex nonsmooth optimization problems. Numerical Methods and Programming. 2006; 7(1):133–137. (In Russ.)
11. **Vorontsova E.A.** Linear tolerance problem for input-output models with interval data. Computational Technologies. 2017; 22(2):67–84.
12. **Shary S.P.** A surprising approach in interval global optimization. Reliable Computing. 2001; 7(6):497–505. DOI:10.1023/A:1014754803382.
13. **Volkov E.A.** Chislennye metody [Numerical methods]. Moscow: Nauka; 1987. (In Russ.)
14. **Oskorbin N.M., Maximov A.V.** MCN: a program for constructing a linear regression model based on data with interval uncertainty. Barnaul: Altayskiy Universitet; 1987. Available at: `http://www.nsc.ru/interval/Programing/MCN/mcn.tar`.
15. GNU Octave — scientific programming language. Available at: `https://octave.org`.
16. `tolinprog` — a program for computer mathematics systems Matlab and Octave. Available at: `http://www.nsc.ru/interval/Programing/OctCodes/tolinprog.m`
17. `tolsolvty` — a program for computer mathematics systems Matlab and Octave. Available at: `http://www.nsc.ru/interval/Programing/OctCodes/tolsolvty.m`.
18. The GNU Octave interval package for real-valued interval arithmetic. Available at: `https://wiki.octave.org/Interval_package`.
19. **Shary S.** `TOLSOLVTY2` — a program for computing the maximum of the recognizing functional of the tolerable solution set for interval linear systems of equations. 2014. DOI:10.13140/RG.2.1.1617.1281. Available at: `https://www.researchgate.net/publication/294889566_TOLSOLVTY2`.