Вычислительные технологии **Том 5, № 2, 2000**

МЕТОД ФИКТИВНЫХ ОБЛАСТЕЙ ДЛЯ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ОПЕРАТОРА СТОКСА

М. Байжуманов, М. Отелбаев, Ш. Смагулов
Казахский государственный университет им. Аль-Фараби, Алматы
e-mail: malimet@physics.iatp.kz

The spectral problem for the method of fictitious domain of Stokes operator has been investigated. Double-side estimates of the eigen-values and eigen-functions have been given. The velocity of the eigen-values convergence in the method of fictitious domain to the eigen-values of the boundary problem of Stokes operator by $\varepsilon \to 0$ has been obtained.

1. Вспомогательные утверждения

В области $\Omega \subset R^3$ с гладкой границей $\partial\Omega$ рассмотрим краевую задачу для уравнения Стокса [1]

$$\mu\Delta v - \nabla p = f,$$
$$\operatorname{div} v = 0, \tag{1}$$
$$v|_{\partial\Omega} = 0. \tag{2}$$

Здесь Δ — оператор Лапласа, ∇ — градиент.

Этой задаче соответствует следующая спектральная задача:

$$\mu\Delta\varphi_n - \nabla p_n = -\lambda_n\varphi_n,$$
$$\operatorname{div}\varphi_n = 0, \tag{3}$$
$$\varphi_n|_{\partial\Omega} = 0, \quad n = 1, 2, ..., \tag{4}$$

где $\varphi_n = (\varphi_{n1}, \varphi_{n2}, \varphi_{n3})$ — собственные вектора, λ_n — собственные числа, p_n — скалярная функция-давление. Введем множество

$$W(\Omega) = \{\varphi | \varphi \in \dot{C}^\infty(\Omega), \quad \operatorname{div}\varphi = 0\}.$$

Обозначим через $V(\Omega)$ замыкание $W(\Omega)$ в $\{L_2(\Omega)\}^3$. При $s > 0$ рассмотрим пространство $W_2^s(\Omega)$ (пространство Соболева), причем s — не обязательно целое [2], и определим $V_s(\Omega)$ как замыкание $W(\Omega)$ по норме $W^s(\Omega)$. Тогда $V_s(\Omega) \subset V_0(\Omega)$, $s > 0$, причем каждое из этих пространств $V_s(\Omega)$ плотно в $V_{s'}(\Omega)$ при $s > s'$. Мы отождествляем $V_0(\Omega)$ с его сопряженным $V_0(\Omega) = V_0'(\Omega)$ (для этого в качестве определяющего "сопряжения" берем скалярное произведение в $W_2^0(\Omega) = L_2(\Omega) \times L_2(\Omega) \times L_2(\Omega)$). При "том же самом" отождествлении имеем [3]:

$$V_s(\Omega) \subset V_0(\Omega) = V_0'(\Omega) \subset V_s'(\Omega), \quad s > 0.$$

Ниже мы будем выводить оценки собственных вектор-функций $\vec{\varphi}_n$ и соответствующих собственных чисел.

Положим

$$L(u) = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx, \quad \operatorname{div} u = 0, \quad u|_{\partial\Omega} = 0. \tag{5}$$

Пусть Q — куб, строго содержащий в себе Ω. Определим форму

$$B(u) = \int_{Q} |\nabla u|^2 dx. \tag{6}$$

На границе Q для u из (6) потребуем выполнения периодических условий. Обозначим через $D(L)$ и $D(B)$ области определения форм L и B соответственно. Элементы из $D(L)$ продолжим нулем на $Q \setminus \Omega$ и полученное множество также обозначим через $D(L)$. Очевидно,

$$D(L) \subseteq D(B)$$

и при $u \in D(L)$ выполняется

$$L(u) = B(u).$$

Из этих двух соотношений и из известных вариационных принципов вытекает:

$$\lambda_n(L) \geq \lambda_n(B),$$

где $\lambda_n(L)$ и $\lambda_n(B)$ — собственные числа, пронумерованные в порядке возрастания операторов, порожденных формами (5) и (6) в пространстве $V_0(\Omega)$ и $L_2(Q) \times L_2(Q) \times L_2(Q) \equiv (L_2(Q))^3$ соответственно. Числа $\lambda_n(L)$ совпадают с собственными числами задачи (3). Это вытекает из вариационных принципов. А числа $\lambda_n(B)$ — есть собственные числа оператора Лапласа в пространстве трехкомпонентных вектор-функций с периодическими граничными условиями. Они вычисляются явно и равны

$$\lambda_n(B) = (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2)\gamma^2, \quad n = (n_1, n_2, n_3).$$

Эти числа, пронумерованные в порядке возрастания, допускают оценку $\lambda_n(B) \geq cn^{3/2}$. Поэтому справедлива следующая лемма.

Лемма 1. *Имеет место оценка*

$$\lambda_n(L) \geq cn^{3/2}.$$

2. Метод фиктивных областей с продолжением по младшему коэффициенту

Метод сводит решение исходной задачи к решению в вспомогательной области, канонической для рассматриваемой системы координат. Исходная область решения дополняется фиктивной областью до канонической. Коэффициенты уравнения исходной задачи с помощью малого параметра $\varepsilon > 0$ продолжаются в фиктивную область. Способ продолжения зависит от типа краевых условий исходной задачи. На границе вспомогательной области формируются краевые условия. Обоснования МФО сводятся к выводу оценок близости решений исходной и вспомогательной задач по параметру ε . К настоящему времени имеется значительное число публикаций по обоснованию и применению МФО [4, 5]. Наиболее полная библиография содержится в [6]. Будем решать задачу (3), (4), используя МФО:

$$\mu\Delta\varphi_n^\varepsilon - \nabla p_n^\varepsilon = -\lambda_n^\varepsilon\varphi_n^\varepsilon + \mu^\varepsilon\varphi_n^\varepsilon, \tag{7}$$

$$\mathrm{div}\varphi_n^\varepsilon = 0, \quad \varphi_n^\varepsilon|_{\partial Q} = 0, \quad n = 1, 2, ..., \tag{8}$$

где μ^ε равна нулю в Ω и $\dfrac{1}{\varepsilon}$ в $Q \setminus \Omega$. Для простоты иногда считаем $\mu = 1$.

В настоящей работе даются оценка собственных чисел и собственных функций для оператора (7), (8), а также оценки скорости сходимости решений задач (7), (8) к решению задач (3), (4). Оценки собственных чисел дают возможность создания эффективного итерационного метода для решения уравнений Навье — Стокса в МФО.

Теоретическое обоснование МФО для системы уравнений Навье — Стокса приведено в работах [7, 8], где рассмотрены линейные и нелинейные стационарные уравнения вязкой несжимаемой жидкости.

МФО для спектральной задачи эллиптического оператора исследованы в работе [9]. Прежде всего заметим, что собственные числа и собственные векторы задач (7), (8) совпадают с собственными числами и собственными векторами оператора A_ε, порожденного в $V_0(Q)$ квадратичной формой

$$A_\varepsilon(u,u) = \int\limits_Q |\nabla u|^2 dx + \int\limits_Q \mu_\varepsilon |u|^2 dx = \int\limits_Q |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{Q\setminus\Omega} |u|^2 dx, \tag{9}$$

определенной на множестве $V_1(Q)$. Эта форма порождает самосопряженный положительный оператор. Этот общий факт содержится почти в любой книге по спектральной теории дифференциальных операторов.

Лемма 2. *При $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 > 0$ имеет место неравенство $A_{\varepsilon_1} \leq A_{\varepsilon_2}$ в смысле операторов и $\lambda_n^{\varepsilon_1} \leq \lambda_n^{\varepsilon_2}$, $n = 1, 2, ...,$ где $\lambda_n^{\varepsilon_i}$ — собственные числа A_{ε_i}.*

Доказательство. Первое неравенство является следствием определения формы (9). Неравенство для собственных чисел есть хорошо известный принцип Гильберта — Куранта [10] для дифференциальных операторов, который вернее назвать принципом Куранта — Титчмарша [11].

Лемма 3. *Обозначим через λ_n — собственные числа задачи Стокса в случае $Q = \Omega$. Тогда $\lambda_n \leq \lambda_n^\varepsilon$, $\varepsilon > 0$.*

Лемма 3 является следствием леммы 2.

Возьмем область $\tilde{\Omega}$, которая является кубом, содержащимся в Ω. Если через $\tilde{\lambda}_n$ обозначить собственные числа (1), соответствующие области $\tilde{\Omega}$, то из вариационного принципа имеем $\tilde{\lambda}_n \geq \lambda_n \geq \lambda_n^\varepsilon$, $n = 1, 2, ..., \varepsilon > 0$.

Теперь возьмем $\tilde{\tilde{\Omega}}_n$ — также куб, но содержащий Q. Соответствующие собственные числа задач (7), (8) при $\varepsilon = \infty$ обозначим $\tilde{\tilde{\lambda}}_n$. Тогда применение вариационного принципа приводит к неравенствам $\lambda_n^\varepsilon \geq \tilde{\tilde{\lambda}}_n$, $\varepsilon > 0$. Таким образом,

$$\tilde{\lambda}_n \geq \lambda_n \geq \lambda_n^\varepsilon \geq \tilde{\tilde{\lambda}}_n.$$

Используя прием доказательства леммы 1, для чисел $\tilde{\tilde{\lambda}}_n$ и $\tilde{\lambda}_n$ можно получить оценки

$$Cn^{3/2} \geq \tilde{\lambda}_n \geq \tilde{\tilde{\lambda}} \geq C^{-1}n^{3/2},$$

где C зависит только от областей Ω и Q. Поэтому имеет место

$$Cn^{3/2} \geq \lambda_n \geq \lambda_n^\varepsilon \geq C^{-1}n^{3/2}, \quad \varepsilon > 0, \quad n = 1, 2, ... \tag{10}$$

Для $\delta > 0$ через K_δ обозначим оператор усреднения

$$(K_\delta u)(x) = \frac{1}{\delta^3} \iiint\limits_{|x-y|\leq\delta} \chi_Q(y)u(y)dy, \tag{11}$$

где χ_Q — характеристическая функция области Q.

Для любой точки $x \in Q$ введем величину

$$r_\varepsilon(x) = \sup_{\int\limits_Q (|\nabla u|^2+\mu_\varepsilon|u|^2)dx=1} |(K_\delta u)(x)|, \tag{12}$$

где sup берется по всем $u = (u_1, u_2, u_3) \in V_1(Q)$. Оценим через $r_\varepsilon(x)$ собственные числа и собственные функции оператора A_ε. Для любого $u(x) \in V_1(Q)$ имеем разложение

$$u(x) = \sum_{n=1}^\infty C_n\varphi_n^\varepsilon(x)$$

по собственным векторам оператора A_ε. Отсюда и из определения K_δ имеем

$$\left|(K_\delta A_\varepsilon^{-1/2}u)(x)\right| = \left|\sum_{n=1}^\infty C_n K_\delta(A_\varepsilon^{-1/2}\varphi_n^\varepsilon)(x)\right| =$$

$$= \left|\sum_{n=1}^\infty C_n \frac{(K_\delta\varphi_n^\varepsilon)(x)}{\sqrt{\lambda_n^\varepsilon}}\right| \leq \sum_{n=1}^\infty |C_n||(K_\delta\varphi_n^\varepsilon)(x)|(\lambda_n^\varepsilon)^{-1/2} \leq$$

$$\leq \sqrt{\sum_{n=1}^\infty |C_n|^2} \cdot \sqrt{\sum_{n=1}^\infty |(K_\delta\varphi_n^\varepsilon)(x)|^2(\lambda_n^\varepsilon)^{-1}} = \| u \| \cdot \sqrt{\sum_{n=1}^\infty |K_\delta\varphi_n^\varepsilon(x)|^2 \cdot (\lambda_n^\varepsilon)^{-1/2}}.$$

Из этого неравенства и определения $r_\varepsilon(x)$ вытекает:

$$r_\varepsilon(x) = \sup_{u\in V_1(Q)} \frac{|(K_\delta u)(x)|}{(\| \nabla u \|_Q^2 + \int_Q \mu_\varepsilon |u|^2 dx)^{1/2}} = \sup_{u\in V_1(Q)} \frac{|(K_\delta u)(x)|}{\| A_\varepsilon^{1/2} u \|} =$$

$$= \sup_{\div A^{-1/2}v=0, v\in L_2(Q)} \frac{|(K_\delta A^{-1/2}v)(x)|}{\| v \|} \leq \sqrt{\sum_{n=1}^\infty \frac{|(K_\delta\varphi_n^\varepsilon)(x)|^2}{\lambda_n^\varepsilon}}.$$

Учитывая (10), получим

$$r_\varepsilon(x) \le \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|(K_\delta \varphi_n^\varepsilon)(x)|^2}{\lambda_n^\varepsilon}} \le C\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2/3} |K_\delta \varphi_n^\varepsilon(x)|^2}, \tag{13}$$

где C зависит только от Ω и Q.

Далее через эти же величины выводим оценку для $r_\varepsilon(x)$ снизу. Пусть $x_0 \in Q$, а $\varphi_n^\varepsilon(x) = (\varphi_{1n}^\varepsilon(x), \varphi_{2n}^\varepsilon(x), \varphi_{3n}^\varepsilon(x))$ — собственный вектор оператора A_ε, соответствующий собственному числу λ_n^ε. Имеем

$$(K_\delta \varphi_n^\varepsilon)(x) = (K_\delta \varphi_{1n}^\varepsilon(x), (K_\delta \varphi_{2n}^\varepsilon(x), (K_\delta \varphi_{3n}^\varepsilon(x)).$$

При любом фиксированном $i = 1, 2, 3$ положим

$$C_n^{(i)} = \frac{(K_\delta \varphi_{ni}^\varepsilon)(x_0)}{\sqrt{\lambda_n^\varepsilon}}, \quad (\varphi_n^\varepsilon(x) = (\varphi_{n1}^\varepsilon(x), \varphi_{n2}^\varepsilon(x), \varphi_{n3}^\varepsilon(x)).$$

Пусть $u(x) = \sum_{n=1}^{N} C_n^{(i)} \varphi_n^\varepsilon(x)$, где $1 \le N < \infty$ – произвольно. Тогда

$$||u(x)|| = \sqrt{\sum_{n=1}^{N} |C_n^{(i)}|^2} = \sqrt{\sum_{n=1}^{N} \frac{|(K_\delta \varphi_{ni}^\varepsilon)(x_0)|^2}{\lambda_n^\varepsilon}},$$

$$(K_\delta A_\varepsilon^{-1/2} u)(x_0) = \left| \sum_{n=1}^{N} \frac{(K_\delta \varphi_{ni}^\varepsilon)(x_0)}{\lambda_n^\varepsilon} (K_\delta \varphi_{ni}^\varepsilon)(x_0) \right| =$$

$$= \left(\sum_{j=1}^{3} \left| \sum_{n=1}^{N} \frac{(K_\delta \varphi_{ni}^\varepsilon)(x_0)}{\sqrt{\lambda_n^\varepsilon}} \cdot \frac{(K_\delta \varphi_{nj}^\varepsilon)(x_0)}{\sqrt{\lambda_n^\varepsilon}} \right|^2 \right)^{1/2} \ge \sum_{n=1}^{N} \frac{|(K_\delta \varphi_{ni}^\varepsilon)(x_0)|^2}{\lambda_n^\varepsilon}.$$

Отсюда

$$r_\varepsilon(x_0) = \sup_{v \in D(A_\varepsilon)} \frac{|(K_\delta v)(x_0)|}{||A_\varepsilon^{1/2} v||} = \sup \frac{|(K_\delta A_\varepsilon^{-1/2} u)(x_0)|}{||u||} \ge \left(\sum_{n=1}^{N} \frac{|(K_\delta \varphi_{ni}^\varepsilon)(x_0)|^2}{\lambda_n^\varepsilon} \right)^{1/2}. \tag{14}$$

Лемма 4. *Имеют место следующие оценки:*

$$r_\varepsilon^2(x) \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|(K_\delta \varphi_n^\varepsilon)(x)|^2}{\lambda_n^\varepsilon} \le C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|K_\delta \varphi_n^\varepsilon(x)|^2}{n^{2/3}} \le C^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|K_\delta \varphi_n^\varepsilon(x)|^2}{\lambda_n^\varepsilon} \le 3C^2 r_\varepsilon^2(x),$$

где C зависит от области Ω и не зависит от ε.

Утверждение леммы следует из (10), (13), (14).

Теперь оценим $r_\varepsilon(x)$. Напомним оценку [10]:

$$\int_Q |\ u(x) - \tilde{u}\ |^2 \, dx \le C \int_Q |\ \nabla u\ |^2 \, dx, \tag{15}$$

справедливую, когда Q — единичный шар или куб. Здесь $\tilde{u}$ — среднее значение $u(x)$.

Следствие. *Пусть* Q_γ *— шар радиуса* $\gamma, u \in W_2^1(Q_\gamma)$. *Тогда*

$$\int\limits_{Q_\gamma} |u(x)-\tilde{u}|^2 dx \le C\gamma^2 \int\limits_{Q_\gamma} |\nabla u|^2 dx. \tag{16}$$

Для доказательства этого неравенства достаточно к (15) применить преобразование подобия.

Лемма 5. *Предположим, что* Ω *удовлетворяет условию: если* $Q_a \backslash \Omega \neq \emptyset$, *то* $\operatorname{mes}(Q_{2a}\backslash \Omega) \ge C_1 a^3$, *где* C_1 *не зависит от* a. *Пусть* $x_0 \in Q$, a *— такое число, что* $a \neq 0$ *и* $1 = \dfrac{1}{\varepsilon a}\operatorname{mes}(Q_a(x_0)\setminus\Omega)$, $Q_a(x_0)$ *— шар радиуса* a *с центром в точке* x_0. *Тогда для любой функции* $u \in \dot{W}_2^1(Q)$ *выполняется неравенство*

$$\int\limits_{Q_{2a}(x_0)} \mu_\varepsilon |u|^2 dx + \int\limits_{Q_{2a}(x_0)} |\nabla u|^2 dx \ge C_0 \int\limits_{Q_{2a}(x_0)} (|\nabla u|^2 + a^{-2}|u|^2) dx, \tag{17}$$

где C_0 *не зависит от* a *и* $u \in \dot{W}_2^1(Q)$.

Доказательство. Если

$$\int\limits_{Q_{2a}} |\nabla u|^2 dx \ge T^{-1}a^{-2} \int\limits_{Q_{2a}} |u|^2 dx, \qquad (Q_{2a} = Q_{2a}(x_0)),$$

то неравенство леммы имеет место при $C_0 = \dfrac{1}{T+1}$. Допустим,

$$\int\limits_{Q_{2a}} |\nabla u|^2 dx \le T^{-1}a^{-2} \int\limits_{Q_{2a}} |u|^2 dx. \tag{18}$$

Тогда из оценки (16) вытекает

$$\int\limits_{Q_{2a}} |u(x)-\tilde{u}|^2 dx \le \frac{C_4}{T} \int\limits_{Q_{2a}} |u(x)|^2 dx, \tag{19}$$

где C — постоянная из оценки (15), $\tilde{u}$ — среднее значение u на Q_a. Оценим норму $\| u \|_{Q_{2a}}$ следующим образом:

$$\| u \|_{Q_{2a}} = \| u - \tilde{u} + \tilde{u} \|_{Q_{2a}} \le \| \tilde{u} \|_{Q_{2a}} + \| u - \tilde{u} \|_{Q_{2a}} \le \| \tilde{u} \|_{Q_{2a}} + 2\sqrt{C/T}\| u \|_{Q_{2a}}.$$

Отсюда при $1 > 2\sqrt{C/T}$ имеем

$$\left(1 - 2\sqrt{C/T}\right) \| u \|_{Q_{2a}} \le \| \tilde{u} \|_{Q_{2a}} . \tag{20}$$

Далее, используя (19) и (20), получаем неравенства

$$\sqrt{\int\limits_{Q_{2a}} \mu_\varepsilon |u|^2 dx} \ge \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{Q_{2a}\backslash\Omega} |u|^2 dx} \ge \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{Q_{2a}\backslash\Omega} |\tilde{u}|^2 dx} - \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{Q_{2a}\backslash\Omega} |u-\tilde{u}|^2 dx} \ge$$

$$\geq \sqrt{\frac{\operatorname{mes}(Q_{2a} \setminus \Omega)}{\varepsilon}} \cdot |\tilde{u}|_{Q_{2a}} - \sqrt{\frac{1}{\varepsilon} \int\limits_{Q_{2a}} |u - \tilde{u}|^2 dx} \geq$$

$$\geq \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}} \left[(2a)^{-3/2} \parallel \tilde{u} \parallel_{Q_{2a}} \sqrt{\operatorname{mes}(Q_{2a} \setminus \Omega)} - 2\sqrt{C/T} \parallel u \parallel_{Q_{2a}} \right] \geq$$

$$\geq \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}} \left[\sqrt{\operatorname{mes}(Q_{2a} \setminus \Omega)} (2a)^{-3/2} \left(1 - 2\sqrt{\varepsilon/T}\right) \parallel u \parallel_{Q_{2a}} - 2\sqrt{C/T} \parallel u \parallel_{Q_{2a}} \right].$$

Отсюда в силу условия $\operatorname{mes}(Q_{2a} \setminus \Omega) \geq C_1 a^3$ вытекает

$$\sqrt{\int\limits_{Q_{2a}} \mu_\varepsilon |u|^2 dx} \geq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \left[C_2 \left(1 - 2\sqrt{C/T}\right) - 2\sqrt{C/T} \right] \parallel u \parallel_{Q_{2a}},$$

где C_2 — постоянное число, не зависящее от выбора T и функции u. Но

$$\frac{1}{\varepsilon} = a(\operatorname{mes}(Q_a \setminus \Omega))^{-1} \geq C_3 a^{-2},$$

поэтому

$$\int\limits_{Q_{2a}} \mu_\varepsilon |u|^2 dx \geq a^{-2} \left[C_2 \left(1 - 2\sqrt{C/T}\right) - \sqrt{C/T} \right]^2 \parallel u \parallel^2_{Q_{2a}}.$$

Выбирая T достаточно большим, получим

$$\int\limits_{Q_{2a}} \mu_\varepsilon |u|^2 dx \geq a^{-2} C_4 \parallel u \parallel^2_{Q_{2a}}.$$

Из этого неравенства вытекает неравенство леммы 4, что и требовалось доказать.

Теорема 1. *Предположим, что* Ω *удовлетворяет условию: если* $Q_a \setminus \Omega \neq \emptyset$, *то* $\operatorname{mes}(Q_{2a} \setminus \Omega) \geq C_1 a^3$, *где* C_1 *не зависит от* Q_a *и* Q_{2a}.

Пусть

$$x_0 \in (Q \setminus \Omega)_{\varepsilon^{1/2}} = \{x : \rho(x, Q \setminus \Omega) \leq \varepsilon^{1/2}\}, \quad \rho(x_0, \partial Q) \geq 8\delta, \ \delta = \varepsilon^{1/2}.$$

Тогда

$$C_2^{-1} \varepsilon^{1/2} \leq \sum_{n=1}^{\infty} |(K_\delta \varphi_n^\varepsilon)(x_0)|^2 \frac{1}{n^{2/3}} \leq C_2 \varepsilon^{1/2},$$

где C_2 *не зависит от* $x_0 \in (Q \setminus \Omega)_\delta$.

Доказательство.

Случай 1. Пусть $x_0 \in Q \setminus \Omega$, $\rho(x_0, \partial\Omega) \geq 8\delta$, шар $Q_\delta(x_0) \bigcap \Omega = \emptyset$. Тогда

$$\int\limits_{Q_\delta(x_0)} (|\nabla u|^2 + \mu_\varepsilon |u|^2) dx = \int\limits_{Q_\delta(x_0)} \left(|\nabla u|^2 + \frac{1}{\varepsilon} \parallel u \parallel^2 \right) dx.$$

В силу оценки (16):

$$\int\limits_{Q_\delta} |(K_\delta u)(x) - u(x)|^2 dx \leq C\delta^2 \int\limits_{Q_\delta(x_0)} |\nabla u|^2 dx. \tag{21}$$

Далее

$$(|\ (K_\delta u)(x_0)\ |^2\ \delta^3)^{1/2} = \sqrt{\int\limits_{Q_\delta(x_0)} |\ (K_\delta u)(x_0)\ |^2\ dx} \leq$$

$$\leq \sqrt{\int\limits_{Q_\delta(x_0)} |\ (K_\delta u)(x_0) - u(x)\ |^2\ dx} + \sqrt{\int\limits_{Q_\delta(x_0)} |\ u(x)\ |^2\ dx}.$$

Теперь воспользуемся (21):

$$(|\ (K_\delta u)(x_0)\ |^2\ \delta^3)^{1/2} \leq \sqrt{c\delta^2 \int\limits_{Q_\delta(x_0)} |\ \nabla u)\ |^2\ dx} + \sqrt{\int\limits_{Q_\delta(x_0)} |\ u\ |^2\ dx} \quad \leq$$

$$\leq (c_1\delta^2\ |\int\limits_{Q_\delta(x_0)} |\ \nabla u)\ |^2\ dx + \delta^{-2}\int\limits_{Q_\delta(x_0)} |\ u\ |^2\ dx\ |)^{1/2}.$$

В силу $\delta^{-2} = \dfrac{1}{\varepsilon}$ получаем

$$(|\ (K_\delta u)(x_0)\ |^2 \leq c_2\delta \int\limits_{Q_\delta(x_0)} (|\ \nabla u\ |^2 + \mu_\varepsilon\ |\ u\ |^2) dx \leq C_3\sqrt{\varepsilon} < A_\varepsilon u, u > .$$

Следовательно,

$$r^2(x_0) \leq C\varepsilon^{1/2}. \tag{22}$$

Случай 2. Пусть $x_0 \in Q \setminus \Omega$, $\rho(x_0, \partial Q) \geq 8\delta$, но не обязательно $Q_\delta(x_0) \bigcap \Omega = \emptyset$.

Воспользуемся оценкой леммы 4; при этом, так как $x_0 \in Q \setminus \Omega$, можно взять $a \approx \sqrt{\varepsilon}$. Поэтому доказательство неравенства (22) аналогично доказательству (21) в случае 1.

Случай 3. Пусть теперь $x_0 \in \Omega$ и $\rho(x_0, Q \setminus \Omega) \leq \delta$, $\rho(x_0, \partial Q) \geq 8\delta$.

Воспользуемся неравенством леммы 4 при $a = 2\delta$ и докажем (22), как в случае 1.

Пусть

$$\begin{aligned}
&\varphi(x) = \cos^2 x \text{ при } x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \text{ и } \varphi(x) = 0 \text{ при } x \notin \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),\\
&u_1(x_1, x_2, x_3) = \varphi(x_1 + \pi/4) \cdot \varphi'(x_2 + \pi/4) \cdot \varphi'(x_3 + \pi/4),\\
&u_2(x_1, x_2, x_3) = -2\varphi'(x_1 + \pi/4) \cdot \varphi(x_2 + \pi/4) \cdot \varphi'(x_3 + \pi/4),\\
&u_3(x_1, x_2, x_3) = \varphi'(x_1 + \pi/4) \cdot \varphi'(x_2 + \pi/4) \cdot \varphi(x_3 + \pi/4),
\end{aligned}$$

где $u = (u_1, u_2, u_3)$. Очевидно $\div u = 0$.

Положим,

$$x \in (Q \setminus \Omega)_\delta, \quad \rho(x_0, \partial Q) \geq 8\delta, \quad \delta = \varepsilon^{1/2}.$$

Возьмем $u_{x_0}(x) = u\left(\dfrac{x - x_0}{8\delta}\right)$. Из определения $r_\varepsilon(x_0)$ (12), в котором $\delta^2 = \varepsilon$, имеем

$$r_\varepsilon(x_0) \geq |\ (K_\delta u_{x_0})(x_0)\ |\ .$$

Правая часть легко оценивается снизу, она не превышает величину

$$C_3^{-1}\varepsilon^{-1/4} = C_3^{-1}\sqrt{\delta}.$$

Поэтому находим нижнюю оценку. Теперь теорема вытекает из оценок, полученных для $r_0(x_0)$ и леммы 4.

3. Оценки скорости сходимости собственных значений

Определение. *Обобщенным решением задач (7), (8) называется вектор-функция* $\varphi_n^\varepsilon \in V_1(Q)$, *удовлетворяющая интегральному тождеству*

$$\int_Q [\mu(\nabla\varphi_n^\varepsilon, \nabla\psi) + \mu_\varepsilon(\varphi_n^\varepsilon, \psi)]\, dx = \lambda_n^\varepsilon \int_Q (\varphi_n^\varepsilon, \psi) dx, \quad \forall\psi \in V_1(Q). \tag{23}$$

Аналогично определяется обобщенное решение задач (3), (4). Существуют также обобщенные решения задач (3), (4) и (7), (8), т. е. счетное множество собственных значении λ_n, λ_n^ε и собственных функций φ_n, φ_n^ε, образующих ортонормированный базис в $L_2(\Omega)$, $L_2(Q)$ соответственно, а также $\lambda_n^\varepsilon \to \lambda_n$ и $\varphi_n^\varepsilon \to \varphi_n$ в $L_2(\Omega)$ при $\varepsilon \to 0$. Далее будем оценивать скорость сходимости собственных значений и собственных функций оператора (7), (8) при $\varepsilon \to 0$. Положив в (23) $\psi = \psi_n^\varepsilon$, имеем

$$\mu\|\varphi_n^\varepsilon\|^2_{V_1(Q)} + \frac{1}{\varepsilon}\|\varphi_n^\varepsilon\|^2_{L_2(Q\setminus\Omega)} \le \lambda_n^\varepsilon\|\varphi_n^\varepsilon\|^2_{L_2(Q)}.$$

С учетом (10) получим

$$\mu\|\varphi_n^\varepsilon\|^2_{V_1(Q)} + \frac{1}{\varepsilon}\|\varphi_n^\varepsilon\|^2_{L_2(Q\setminus\Omega)} \le \lambda_n C < \infty, \quad \text{при} \quad n < \infty. \tag{24}$$

Отсюда следует, что из последовательности $\{\varphi_n^\varepsilon\}$ можно выделить подпоследовательность, для которой имеет место соотношение $\varphi_\varepsilon^n \to \varphi^n$ слабо в $W_2^1(\Omega)$ при $\varepsilon \to 0$. В силу теоремы вложения $\varphi_\varepsilon^n \to \varphi^n$ сильно в $L_2(\Omega)$ при $\varepsilon \to 0$.

Умножим теперь уравнение (3) на φ_n^ε, уравнение (7) на φ_n и проинтегрируем по Ω:

$$\mu\int_\Omega (\nabla\varphi^n \cdot \nabla\varphi_\varepsilon^n) dx - \int_{\partial\Omega} p^n(\varphi_\varepsilon^n \cdot \vec{n}) dl = \lambda_n \int_\Omega (\varphi^n, \varphi_\varepsilon^n) dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial\varphi^n}{\partial x}\varphi_\varepsilon^n dx,$$

$$\mu\int_\Omega (\nabla\varphi^n \cdot \nabla\varphi_\varepsilon^n) dx = \lambda_n^\varepsilon \int_\Omega (\varphi_\varepsilon^n, \varphi_n) dx.$$

Вычтем последние тождества друг из друга:

$$(\lambda_n - \lambda_n^\varepsilon)\int_\Omega (\varphi_\varepsilon^n, \varphi_n) dx = \int_{\partial\Omega} p^n(\varphi_\varepsilon^n \cdot \vec{n}) dl + \mu\int_{\partial\Omega} \frac{\partial\varphi^n}{\partial\vec{n}}\varphi_\varepsilon^n dl. \tag{25}$$

Оценим тождество (25) с помощью теоремы вложения [1]:

$$|\lambda_n - \lambda_n^\varepsilon|\left|\int_\Omega (\varphi_\varepsilon^n, \varphi_n) dx\right| \le \left|\int_{\partial\Omega} p^n(\varphi_\varepsilon^n\vec{n}) dl\right| + \mu\left|\int_{\partial\Omega} \frac{\partial\varphi^n}{\partial\vec{n}}\varphi_\varepsilon^n dl\right|, \tag{26}$$

$$\left|\int_{\partial\Omega} p^n(\varphi_\varepsilon^n\vec{n}) dl\right| \le \| p^n \|_{L_2(\partial\Omega)} \| \varphi_\varepsilon^n \|_{L_2(\partial\Omega)} \le$$

$$\le C \parallel \nabla p_n \parallel_{L_2(\Omega)} (\parallel \varphi_\varepsilon^n \parallel^{1/2}_{W_2^1(Q\setminus\Omega)} \parallel \varphi_\varepsilon \parallel^{1/2}_{L_2(Q\setminus\Omega)} + \parallel \varphi_\varepsilon \parallel_{L_2(Q\setminus\Omega)}) \le$$

$$\le C_1\lambda_n(\sqrt{\varepsilon}\sqrt{\lambda_n}+\sqrt{\varepsilon}\sqrt{\lambda_n})\le \widetilde{C}_1\lambda_n^{1+1/2}\sqrt{\varepsilon},$$

$$\left|\int\limits_{\partial\Omega}\frac{\partial\varphi^n}{\partial\vec{n}},\varphi_\varepsilon^n dl\right|\le\left\|\frac{\partial\varphi^n}{\partial n}\right\|_{L_2(\partial\Omega)}||\varphi_\varepsilon^n||_{L_2(\partial\Omega)}\le$$

$$\le C_2(||\varphi^n||^{1/2}_{W_2^1(\partial\Omega)}||\varphi^n||^{1/2}_{W_2^2(\partial\Omega)}||\varphi_\varepsilon^n||^{1/2}_{W_2^1(Q\setminus\Omega)}||\varphi_\varepsilon^n||^{1/2}_{L_2(Q\setminus\Omega)}\le$$

$$\le C_3\sqrt[4]{\lambda_n}\cdot\sqrt{\lambda_n}\cdot\sqrt{\lambda_n}\cdot\sqrt{\varepsilon}\le C_4\lambda^{1+1/4}\sqrt{\varepsilon}.$$

Как отмечалось выше, φ_n^ε сходится к φ_n в среднем при $\varepsilon\to 0$, т. е.

$$\int\limits_\Omega(\varphi_\varepsilon^n-\varphi^n)^2dx=\int\limits_\Omega[(\varphi_\varepsilon^n)^2-2\varphi_\varepsilon^n\varphi^n+(\varphi^n)^2]dx\quad\to 0\quad\text{при}\quad\varepsilon\to 0.$$

Следовательно, при достаточно малом ε имеем

$$2\left|\int\limits_\Omega(\varphi_\varepsilon^n-\varphi^n)dx\right|\ge\int\limits_\Omega[(\varphi_\varepsilon^n)^2+(\varphi^n)^2]dx-\delta(\varepsilon),$$

где $\delta(\varepsilon)\to 0$ при $\varepsilon\to 0$. Отсюда

$$\left|\int\limits_\Omega(\varphi_\varepsilon^n,\varphi^n)dx\right|\ge\frac{(1-\delta(\varepsilon))}{2}. \tag{27}$$

Обратимся далее к оценке (26). Учитывая (27), получим

$$|\lambda_n-\lambda_n^\varepsilon|\le C_5(\lambda_n^{1+1/2}+\lambda_n^{1+1/4})\varepsilon^{1/2}. \tag{28}$$

Теперь выведем оценки скорости сходимости собственных функций. В силу уравнений (3), (4) и (7), (8) получим

$$\mu\Delta(\varphi_n-\varphi_n^\varepsilon)-\nabla(p_n-p_n^\varepsilon)=-\lambda_n\varphi_n+\lambda_n^\varepsilon\varphi_n^\varepsilon=(-\lambda_n+\lambda_n^\varepsilon)\varphi_n+\lambda_n^\varepsilon(\varphi_n^\varepsilon-\varphi_n), \tag{29}$$

$$\operatorname{div}(\varphi_n^\varepsilon-\varphi_n)=0,\quad(\varphi_n^\varepsilon-\varphi_n)|_{\partial\Omega}=\varphi_n^\varepsilon|_{\partial\Omega}.$$

Умножим (29) на $(\varphi_n-\varphi_n^\varepsilon)$ скалярно в $L_2(\Omega)$. После интегрирования по частям приходим к равенству

$$\mu\|\nabla(\varphi_n-\varphi_n^\varepsilon)\|^2_{L_2(\Omega)}+\int\limits_{\partial\Omega}(p_n-p_n^\varepsilon)\varphi_n^\varepsilon dl-\mu\int\limits_{\partial\Omega}\frac{\partial(\varphi_n^\varepsilon-\varphi_n)}{\partial n}\varphi_n^\varepsilon dl=$$

$$=(-\lambda_n^\varepsilon+\lambda_n)\int\limits_\Omega\varphi_n(\varphi_n-\varphi_n^\varepsilon)dx-\lambda_n^\varepsilon\|\varphi_n^\varepsilon-\varphi_n\|^2_{L_2(\Omega)}. \tag{30}$$

Второе и третье слагаемые в левой части оцениваются аналогично (28):

$$\left|\int\limits_{\partial\Omega}(p_n-p_n^\varepsilon)\varphi_n^\varepsilon dl\right|\le C_5\lambda_n^{1+1/2}\varepsilon^{1/2},\quad\left|\mu\int\limits_{\partial\Omega}\frac{\partial(\varphi_n^\varepsilon-\varphi_n)}{\partial n}\varphi_n^\varepsilon dl\right|\le C_7\lambda_n^{1+1/4}\varepsilon^{1/2}.$$

Правое слагаемое в правой части (30) оцениваем следующим образом:

$$|\lambda_n - \lambda_n^\varepsilon| \left| \int\limits_\Omega \varphi_n(\varphi_n - \varphi_n^\varepsilon)dx \right| \le |\lambda_n - \lambda_n^\varepsilon| \|\varphi_n\|_{L_2(\Omega)} \|\varphi_n - \varphi_n^\varepsilon\|_{L_2(\Omega)} \le$$

$$\le \delta \|\varphi_n - \varphi_n^\varepsilon\|^2_{W_2^1(\Omega)} + |\lambda_n - \lambda_n^\varepsilon|^2 C_6. \quad (31)$$

В силу оценок (28), (30), (31) при малых δ, ε выводим:

$$\lambda_n^\varepsilon \|\varphi_n^\varepsilon - \varphi_n\|^2_{L_2(\Omega)} + \mu \|\nabla(\varphi_n - \varphi_n^\varepsilon\|^2_{L_2(\Omega)} \le C_8[(\lambda_n^{1+1/2} + \lambda_n^{1+1/4})(\varepsilon^{1/2}) + (\lambda_n^{1+1/2} + \lambda_n^{1+1/2})\varepsilon].$$

Список литературы

[1] Ладыженская О. А. *Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости.* Наука, М., 1970.

[2] Лионс Ж.-Л. *Некоторые методы решения нелинейных краевых задач.* Мир, М., 1972.

[3] Лионс Ж.-Л., Мадженес Е. *Неоднородные граничные задачи и их приложения.* Мир, М., 1971.

[4] Коробицына Ж. Л. О применении метода фиктивных областей к численному моделированию волновых течений идеальной несжимаемой стратифицированной жидкости. В *“Вычислительные технологии”*, ИВТ СО РАН, Новосибирск, 1994.

[5] Коновалов А. Н., Конюх Г. Н., Цуриков Н. В. О принципах построения итерационных процессов в методе фиктивных областей. В *“Вариационные методы в задачах численного анализа”*. ВЦ СО АН СССР, Новосибирск, 1986, 58–79.

[6] Вабищевич П. Н. *Методы фиктивных областей в краевых задачах математической физики.* МГУ, М., 1993.

[7] Смагулов Ш. С. *Метод фиктивных областей в краевых задачах для уравнений Навье — Стокса.* Препринт №68, ВЦ СО АН СССР, Новосибирск, 1979.

[8] Бугров А. Н., Смагулов Ш. С. Метод фиктивных областей в краевых задачах для уравнений Навье—Стокса. В *“Математические модели течений жидкости”*. ИТПМ СО АН СССР, Новосибирск, 1978, 79–90.

[9] Николева Н. И. Метод фиктивных областей в задачах на собственные значения. В *“Численные методы механики сплошной среды. Сер. матем. моделир”*. ВЦ, ИТПМ СО АН СССР, Новосибирск, Т. 10, №6, 1979.

[10] Соболев С. Л. *Некоторые применения функционального анализа в математической физике.* Наука, М., 1988.

[11] Титчмарш Э. Ч. *Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка.* ИЛ, М., 1961.

Поступила в редакцию 19 марта 1999 г.