

# МОДЕЛЬ ПОВРЕЖДАЮЩЕГОСЯ МАТЕРИАЛА И ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ПРИ КРУЧЕНИИ

В. В. СТРУЖАНОВ, С. В. ЖИЖЕРИН  
*Институт машиноведения УрО РАН  
Екатеринбург, Россия*

Some models of material damaging by shear are introduced. The material is assumed to possess the property of deformational unstrengthening. Various iteration methods of solving the problem of torsion of round bars made of such materials are considered. It is shown that failure occurs in the presence of unstrengthening in near-surface layer.

Эффективный объем структурно-неоднородного материала (макроэлемент) состоит из множества подэлементов (микроэлементов), механические свойства которых отличаются друг от друга. Обычно эти свойства осредняют по объему и полученные средние значения приписывают макроэлементу. Изменение данных интегральных характеристик при нагружении отражает диаграмма деформирования материала, обладающая, как правило, линейным и нелинейным участками. Появление нелинейного участка связано, очевидно, с тем, что значительная часть микроэлементов переходит в состояние пластичности. Дальнейшее деформирование приводит к разрушению отдельных микроэлементов, т. е. начинается процесс повреждения материала. Когда число разрушенных микроэлементов становится достаточно большим, то на диаграмме появляется падающая ветвь.

Феноменологическое описание стадии рассеянных повреждений основывается на представлении о поврежденности как особом механическом состоянии элемента сплошной среды. Аналитические зависимости для описания рассеянных повреждений либо строятся из физических соображений, либо основываются на механических моделях процесса разрушения [2, 3], в которых функцию повреждаемости нормируют, считая, что равенство ее единице является условием разрушения.

В данной работе для чистого сдвига предлагаются новые кинетические уравнения накопления повреждений. Их вывод основан на использовании эффекта выколаживания модуля разгрузки, происходящего вследствие образования микроповреждений. При этом нормировка не проводится, так как значение поврежденности, равное единице, естественным образом достигается в конце падающего участка полной диаграммы деформирования. Приводятся алгоритмы решения задачи кручения круглых стержней в предположении о линейном характере распределения деформаций сдвига по радиусу. Установлено, что разрушение всегда происходит при наличии разупрочнения в приповерхностном слое и в этот момент значение поврежденности не всегда равно единице.

1. Рассмотрим кручение стержня, имеющего длину  $l$  и радиус поперечного сечения  $R$ . Деформирование осуществляется либо заданием величины крутящего момента  $M$  (мягкое нагружение), либо путем контроля абсолютного угла закручивания  $\psi$  (жесткое нагружение). Свойства материала характеризует полная диаграмма деформирования в координатах касательные напряжения  $\tau$  — сдвиги  $\gamma$  (рис.1), состоящая из восходящей и ниспадающей до нуля ветвей. На диаграмме  $\tau^T, \tau^B, \gamma^T, \gamma^B$  — соответственно предел текучести и предел прочности при чистом сдвиге и отвечающие им сдвиговые деформации,  $\gamma^z$  — предельный сдвиг. На стадии упругости — модуль сдвига  $G$ , на стадиях упрочнения (восходящая после упругости ветвь) и разупрочнения (падающая ветвь) касательный (мгновенный) модуль сдвига  $G^p = d\tau/d\gamma$  ( $G^p < G$ ).

В зависимости от процессов, происходящих в материале при деформировании, возможны три варианта разгрузки. Первый — без остаточных деформаций с секущим модулем  $G^s = \tau/\gamma$  (прямая 1 на рис. 1), второй — с образованием остаточных деформаций и модулем разгрузки, равным  $G$  (прямая 3), третий — также с образованием остаточных деформаций и модулем разгрузки  $G^u < G$  (прямая 2). Считаем, что функция  $G^u(\gamma) = \tau/(\gamma - \gamma^p)$  известна и равна  $G^u = \sqrt{GG^s}$ .

Такое поведение материала можно объяснить следующим образом. После нагружения в начальный момент в стержне возникают напряжения, связанные с деформацией линейным законом упругости. Затем материал стремится снизить уровень напряжений. Для этого существуют два механизма: пластическая деформация и нарушение сплошности (разрушение на микроуровне). В результате за малый промежуток времени происходит релаксация напряжений. Если явно не проявляются эффекты ползучести, то время релаксации меньше, чем скорость нагружения. Когда релаксация происходит только за

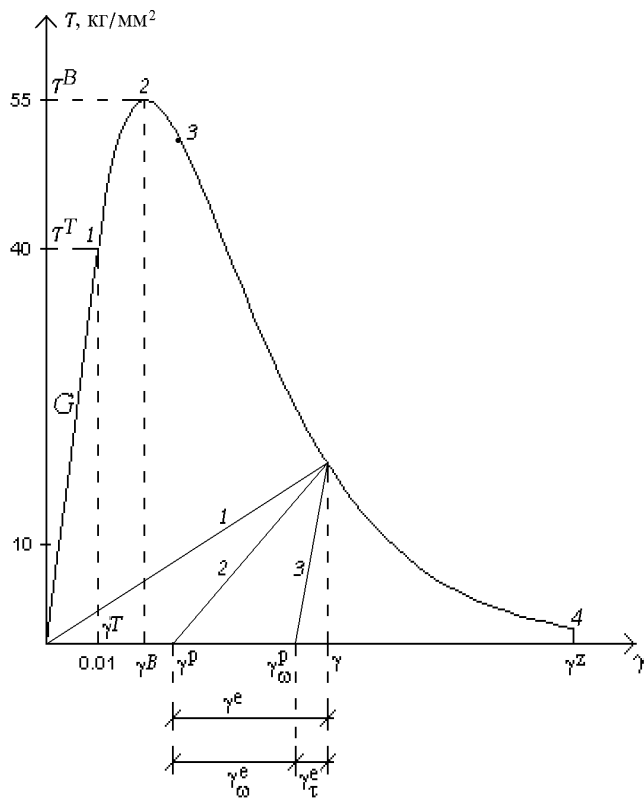


Рис. 1.

счет пластической деформации без разрушения, то реализуется разгрузка по пути 3, при релаксации только за счет разрушения (образование микропор и микротрещин) реализуется путь 1 (см. рис. 1). В случае, когда имеют место и пластическая деформация, и разрушение на микроуровне, реализуется путь 2. Отсюда отклонение прямой разгрузки от прямой 3 характеризует степень поврежденности материала микродефектами.

Запишем уравнение второго закона термодинамики с учетом необратимости и изотермичности процесса деформирования в виде [4]

$$dF = \frac{1}{\rho}\tau d\gamma - dg, \quad (1)$$

где  $F$  — свободная энергия,  $dg \geq 0$  — некомпенсированное тепло,  $\rho$  — плотность материала. Параметрами термодинамического состояния материала являются  $\gamma^e$ ,  $\gamma^p$  — упругая и пластическая составляющие деформации сдвига, определяемые по результатам разгрузки, причем

$$\gamma = \gamma^e + \gamma^p, \quad (2)$$

и параметр  $\omega$ , характеризующий поврежденность материала микродефектами. Если упругие свойства материала не зависят от пластических деформаций, то  $F = F(\gamma^e, \omega)$ . Тогда, учитывая равенство (2), уравнение (1) можно переписать в виде

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \gamma^e} - \frac{\tau}{\rho}\right) d\gamma^e + \left(\frac{\partial F}{\partial \omega} d\omega - \frac{\tau}{\rho} d\gamma^p + dg\right) = 0.$$

Отсюда [4]

$$\tau = \rho \frac{\partial F}{\partial \gamma^e}, \quad (3)$$

$$\rho dg = \tau d\gamma^p - \rho \frac{\partial F}{\partial \omega} d\omega. \quad (4)$$

Из (4) следует, что  $\rho dg = dg' + dg''$ , где

$$dg' = \tau d\gamma^p \quad (5)$$

есть механическая диссипация,

$$dg'' = -\rho \frac{\partial F}{\partial \omega} d\omega \quad (6)$$

есть диссипация континуального разрушения.

Функция свободной энергии определяет ту часть внутренней энергии, которая остается в теле и не переходит в теплоту. Для рассматриваемого процесса деформирования она равна

$$F = \frac{1}{\rho} \left( \frac{1}{2} G \gamma^e \gamma^e - \frac{1}{2} \omega G \gamma^e \gamma^e \right),$$

где первый член в скобках является потенциальной энергией упругих деформаций после механической диссипации (релаксации напряжений вследствие пластической деформации), а второй член — энергией, потерянной из-за континуального разрушения (релаксации напряжений вследствие микроразрушений). Тогда, используя формулу (3) и равенство (2), получаем

$$\tau = G\gamma^e - \omega G\gamma^e = G(1 - \omega)(\gamma - \gamma^p), \quad (7)$$

где  $G(1 - \omega) = G^u$  – модуль разгрузки. Подставляя затем функцию  $F$  в выражение (6), находим

$$dg'' = \frac{1}{2}G\gamma^e\gamma^e d\omega. \quad (8)$$

Наконец, из (7) следует, что  $\gamma^e = \tau/G + \omega\gamma^e = \gamma_\tau^e + \gamma_\omega^e$  (см. рис. 1). Так как  $\tau = G^u\gamma^e$ , то

$$\omega = 1 - \frac{\gamma_\tau^e}{\gamma^e} = 1 - \frac{G^u}{G}. \quad (9)$$

Отсюда

$$d\omega = -\frac{dG^u}{G}. \quad (10)$$

Далее, используя формулу (7), находим

$$d\tau = G(1 - \omega)(d\gamma - d\gamma^p) - G(\gamma - \gamma^p)d\omega. \quad (11)$$

С другой стороны, справедливо инкрементальное соотношение

$$d\tau = G^p d\gamma. \quad (12)$$

Приравнявая выражения (11) и (12), получаем дифференциальное уравнение

$$(\gamma - \gamma^p)\frac{d\omega}{d\gamma} + \omega\left(1 - \frac{d\gamma^p}{d\gamma}\right) = 1 - \frac{G^p}{G} - \frac{d\gamma^p}{d\gamma} \quad (13)$$

с начальными условиями

$$\omega(0) = 0, \quad \gamma^p(0) = 0, \quad G^p(0) = G,$$

или, преобразуя (13) с учетом равенства (10), имеем

$$\frac{d\gamma^p}{d\gamma} = 1 - \frac{G^p}{G^u} + \frac{(\gamma - \gamma^p)}{G^u} \frac{dG^u}{d\gamma}. \quad (14)$$

Если  $\omega = 0$  и не изменяется, то из (13) (или (14)) получаем

$$\frac{d\gamma^p}{d\gamma} = 1 - \frac{G^p}{G}. \quad (15)$$

Если  $\gamma^p = 0$  и не изменяется, то

$$\gamma \frac{d\omega}{d\gamma} + \omega = 1 - \frac{G^p}{G}. \quad (16)$$

Уравнение (13) определяет кинетику совместного формирования поврежденности и пластической деформации, уравнение (15) – кинетику развития пластической деформации при отсутствии поврежденности, а уравнение (16) – кинетику поврежденности при отсутствии пластической деформации. Непосредственно проверяется, что выражение (9) является общим решением дифференциального уравнения (13) и уравнения (16) при  $G^u = G^s$ .

Относительно слагаемых в выражении для некомпенсированного тепла полагаем, что  $dg' \geq 0$  и  $dg'' \geq 0$ . Тогда, подставляя выражение (10) в формулу (8) и выражение для  $d\gamma^p$  из (14) в формулу (5), получаем неравенства  $G^u > G^p$ ,  $dG^u \leq 0$  и

$$dG^u \geq \left(1 - \frac{G^u}{G}\right) G^u \frac{d\tau}{\tau}. \quad (17)$$

Из (17) следует, что  $dG^u \leq 0$  как при  $G^p > 0$  ( $d\tau > 0$ ), так и при  $G^p < 0$  ( $d\tau < 0$ ). Условие (17) накладывает ограничение на скорость убывания модуля разгрузки, которое обусловлено континуальным разрушением. Оно обеспечивает выполнение неравенства  $d\gamma^p \geq 0$  и, следовательно, условия  $dg' \geq 0$ . Если  $\omega = 0$ , то

$$dg' = \tau(G - G^p) \frac{d\tau}{GG^p}.$$

Эта величина положительна при любых  $G^p$ . Таким образом, отрицательное значение  $G^p$  и падающая ветвь диаграммы  $\tau - \gamma$  не противоречат законам термодинамики.

Далее естественно полагать, что материал разрушен, если он потерял способность к релаксации напряжений или, другими словами, не может диссипировать подводимую извне энергию, т.е.  $dg' = 0$ ,  $dg'' = 0$ . Отсюда, когда  $\omega = 0$ ,  $d\gamma^p \neq 0$  (релаксация только за счет пластической деформации), то, приравнявая выражение (5) к нулю, получаем при разрушении  $\tau = 0$ . Из этого условия вытекает также равенство  $\gamma = \gamma^p$ , или  $d\gamma = d\gamma^p$ . Следовательно, после разрушения пластическая составляющая деформации совпадает с полной деформацией, а упругая составляющая отсутствует.

Если  $\gamma^p = 0$  (релаксация только за счет микроразрушений), то, приравнявая выражение (8) к нулю, имеем  $d\omega = 0$ , или  $\omega = \text{const}$ , т.е. поврежденность материала при разрушении достигает постоянного значения. Из равенств (9) и (10) вытекает, что разрушение происходит при  $G^u = G^s = 0$  и  $\omega = 1$ .

В общем случае, как правило, сначала выполняется условие  $dg' = 0$ , причем  $\tau \neq 0$ ,  $d\gamma^p = 0$ . Следовательно, материал прежде всего теряет способность к релаксации напряжений за счет пластической деформации. После этого релаксация идет уже посредством микроповреждений. Разрушение наступает, когда  $dg'' = 0$  и это равенство выполняется при  $d\omega = 0$  (повреждаемость достигает постоянного значения, равного единице).

Наконец, уравнение (13) можно переписать в виде

$$d\gamma_\omega^e = d\gamma_\omega^p - d\gamma^p, \quad (18)$$

где  $d\gamma_\omega^e = d(\omega(\gamma - \gamma^p))$ ,

$$d\gamma_\omega^p = \left(1 - \frac{G^p}{G}\right) d\gamma, \quad (19)$$

здесь  $d\gamma_\omega^p$  – приращение псевдопластической деформации, которое могло бы иметь место, если бы модуль разгрузки был равен  $G$ . Аналогичное представление имеет и уравнение (16), а именно:

$$d\gamma_\omega = d\gamma_\omega^p, \quad (20)$$

где  $\gamma_\omega = \omega\gamma$ .

Вернемся к уравнению (7) и запишем его в виде

$$\tau = G[\gamma - \gamma^p - \omega(\gamma - \gamma^p)] = G[\gamma - (\gamma^p + \gamma_\omega^e)] = G(\gamma - \gamma_\omega^p), \quad (21)$$

где  $\gamma_\omega^p$  – величина полной псевдопластической деформации, определяемой разгрузкой с модулем  $G$ . Кинетика ее формирования зависит от изменения  $\gamma^p$  и  $\omega$  и описывается уравнением (18) (или (20)), а с формальной точки зрения – уравнением (15).

**2.** Перейдем к решению задачи кручения стержня, используя формальную связь между напряжениями и деформациями (21). Кроме того, излагаемая ниже методика применима и для случая, когда релаксация происходит только за счет пластической деформации ( $\omega = 0$ ).

Граничные условия в цилиндрической системе координат в случае жесткого нагружения равны

$$u|_{z=0} = 0, \quad u|_{z=l} = \psi r \quad (0 \leq r \leq R), \quad (22)$$

а при мягком нагружении

$$u|_{z=0} = 0, \quad 2\pi \int_0^R \tau r^2 dr = M, \quad (23)$$

где  $u$  — перемещение в тангенсальном направлении. Данная исходная задача разбивается на две: основную с законом  $\tau' = G\gamma'$  и граничными условиями (22) или (23) и корректирующую с законом  $\tau'' = G(\eta - \gamma_\omega^p)$  и граничными условиями

$$v|_{z=0} = 0, \quad v|_{z=l} = 0 \quad (24)$$

для жесткого нагружения и

$$v|_{z=0} = 0, \quad 2\pi \int_0^R \tau'' r^2 dr = 0 \quad (25)$$

для мягкого нагружения. Здесь  $\eta$  — полный сдвиг,  $v$  — тангенсальное перемещение.

Основная задача является обычной задачей кручения упругого стержня. Ее решение для жесткого нагружения

$$\gamma' = \frac{\psi r}{l}, \quad \tau' = \frac{G\psi r}{l}, \quad M' = \frac{2\pi G\psi R^4}{4l}, \quad (26)$$

для мягкого нагружения

$$\gamma' = ar, \quad \tau' = Gar, \quad \psi' = al, \quad a = \frac{2M}{\pi GR^4}. \quad (27)$$

В первом случае  $M'$  — крутящий момент, отвечающий  $\psi$ , во втором случае  $\psi'$  — абсолютный угол закручивания, отвечающий  $M$ .

Корректирующая задача — это задача об определении собственных (остаточных) напряжений в стержне при заданной величине остаточной деформации  $\gamma_\omega^p$ . Ее решение для граничных условий (24)

$$\eta = 0, \quad \tau'' = -G\gamma_\omega^p, \quad M'' = -2\pi \int_0^R G\gamma_\omega^p r^2 dr, \quad (28)$$

а для граничных условий (25)

$$\eta = br, \quad \tau'' = G(\eta - \gamma_\omega^p), \quad \psi'' = bl, \quad b = \frac{2M_\varphi}{\pi GR^4}, \quad M_\varphi = 2\pi \int_0^R G\gamma_\omega^p r^2 dr, \quad (29)$$

здесь  $M''$  — величина момента, необходимого для фиксирования торцов стержня,  $\psi''$  — угол, на который закручивается стержень при свободном от усилий торце,  $M_\varphi$  — фиктивный крутящий момент.

Непосредственно проверяется, что решением исходной задачи при заданном значении  $\gamma_\omega^p$  является сумма решений основной и корректирующей задач.

Пусть теперь при некоторых  $M_0, \psi_0$  стержень находится в равновесии и в каждой точке его сечения известны  $\gamma_0, \tau_0, \gamma_{0\omega}^p, \omega_0, G_0^p, G_0^u$ . Увеличим угол закручивания на  $\Delta\psi$  и определим параметры нового положения равновесия. Сначала по формулам (26), подставляя вместо  $\psi$  величину  $\Delta\psi$ , получаем решение основной задачи  $\gamma'_1, \tau'_1, M'_1$ . Тогда значения  $\gamma_1 = \gamma_0 + \gamma'_1, \tau_1 = \tau_0 + \tau'_1, M_1 = M_0 + M'_1$  представляют собой первое приближение к решению исходной задачи для  $\psi_1 = \psi_0 + \Delta\psi$ . Кроме того, для  $\gamma_1$  по диаграмме деформирования находим  $G_1^p, G_1^u$ , затем  $\omega_1 = 1 - G_1^u/G$ .

Далее, используя зависимость (19), куда подставляем  $d\gamma = \gamma'_1, G^p = G_0^p$ , вычисляем  $d\gamma_{1\omega}^p$  и по формулам (28), в которых  $\gamma_\omega^p$  заменяем на  $d\gamma_{1\omega}^p$ , получаем решение корректирующей задачи  $\eta_1, \tau''_1, M''_1$ . Тогда второе приближение равно  $\gamma_2 = \gamma_1 + \eta_1, \tau_2 = \tau_1 + \tau''_1, M_2 = M_1 + M''_1$ . Затем для  $\gamma_2$  определяем  $G_2^p, G_2^u, \omega_2$  и  $\gamma_{2\omega}^p = \gamma_{0\omega}^p + d\gamma_{1\omega}^p$ . Снова по формуле (19), где уже  $d\gamma = \eta_1, G^p = G_1^p$ , вычисляем  $d\gamma_{2\omega}^p$ , и процесс повторяется. Схематически приведенная итерационная процедура показана на рис. 2.

Легко видеть, что в данном случае итерации заканчиваются после первой коррекции ( $\eta_1 = 0$ ). На рис. 2, 3 этому процессу отвечают пути 1. Если снова увеличить угол закручивания, то процедура повторяется.

Возмутим теперь положение равновесия, увеличив крутящий момент на величину  $\Delta M$  ( $M_1 = M_0 + \Delta M$ ). Для определения параметров нового положения равновесия применим ту же итерационную методику, только вместо формул (26), (28) используем формулы (27), (29). На рис. 2, 3 этой процедуре отвечают пути 2.

Однако итерации при мягком нагружении не всегда сходятся. В этом случае имеем

$$\psi = \psi_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i, \quad (30)$$

где  $\beta_{n+1} = c_n \beta_n$ ,

$$c_n = 1 - \frac{4}{GR^4} \int_0^R G_n^p(r) r^3 dr.$$

Ряд (30) сходится, если  $c_n < 1$  для каждого  $n$ , и расходится, если, начиная с некоторого момента,  $c_n \geq 1$ . Очевидно, что для  $G_n^p(r) > 0$  получаем  $c_n < 1$ . Рассмотрим случай, когда  $G_n^p(r) < 0$  при  $r > R_B$ , т.е. в области  $R - R_B$  приграничные слои стержня вышли на стадию разупрочнения. Учитывая, что в области  $r \leq R_T$  имеет место упругость, а в области  $R_T < r < R_B$  упрочнение, из условия  $c_n < 1$  получаем неравенство

$$\int_{R_B}^R G_n^p r^3 dr < \frac{GR_T^4}{4} + \int_{R_T}^{R_B} G_n^p r^3 dr. \quad (31)$$

Таким образом, сходимость ряда (30) в данном варианте зависит от наклона падающей ветви, определяемого отрицательным значением  $G_n^p$  в области разупрочнения, от характеристики упрочнения и сочетания размеров зон упругости, упрочнения и разупрочнения. Однако в любом случае из неравенства (31) следует, что при достаточно малом шаге догружения в приповерхностном слое цилиндра еще до разрушения появляется зона разупрочнения.

В качестве примера произведем расчеты кручения цилиндра, свойства материала которого описывает зависимость (см. рис. 1)

$$\tau = \begin{cases} G\gamma, & 0 \leq \gamma \leq \gamma^T, \\ 2.49G(\gamma - 0.004) \exp\left(\frac{0.004 - \gamma}{0.015}\right), & \gamma^T \leq \gamma \leq \gamma^z, \end{cases}$$

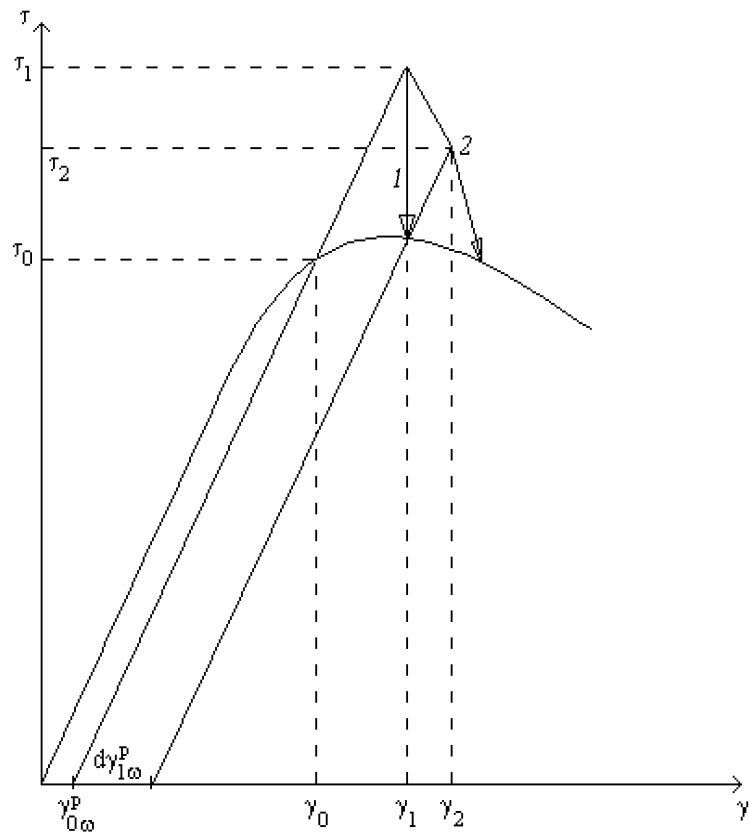


Рис. 2.

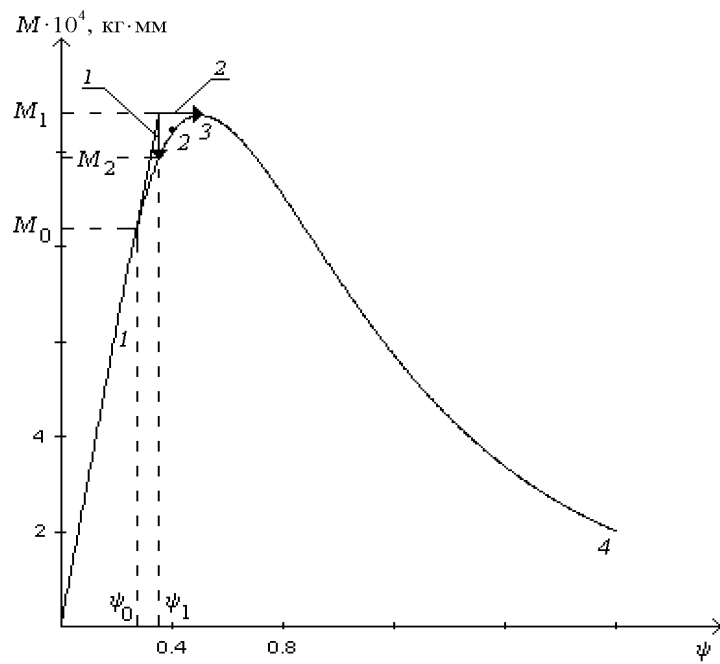


Рис. 3.



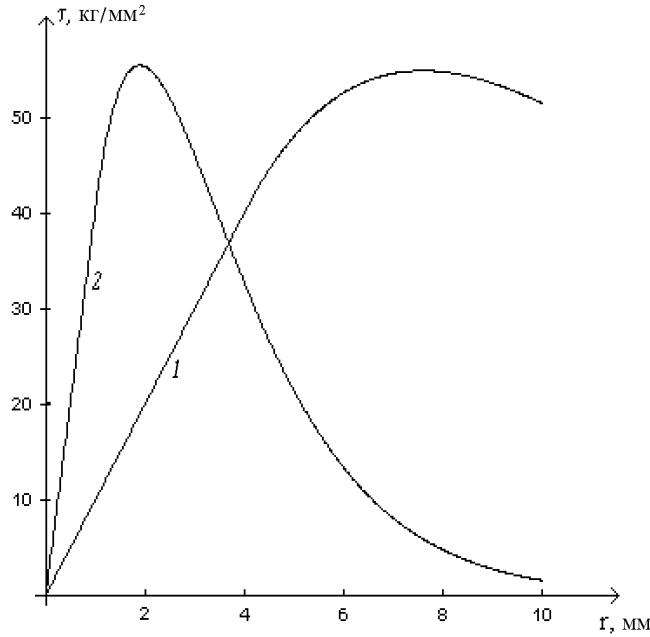


Рис. 4.

где  $G = 4 \cdot 10^3$  кг/мм<sup>2</sup>,  $\gamma^T = 0.01$ ,  $\gamma^z = 0.108$ . Полагаем  $R = 10$  мм,  $l = 200$  мм. При жестком нагружении получаем зависимость  $M - \psi$ , изображенную на рис. 3. Точка 1 отвечает переходу материала внешнего слоя цилиндра на стадию упрочнения (соответствует точке 1 на рис. 1), 2 — переходу на стадию разупрочнения, 4 — разрушению внешнего слоя. При мягком нагружении получается только восходящая ветвь диаграммы  $M - \psi$ . После достижения точки 3 при некоторой величине зоны разупрочнения итерационный процесс расходится, т. е. деформирование стержня приобретает динамический характер.

На рис. 4 показаны эпюры напряжений, отвечающих точке 3 зависимости  $M - \psi$  (кривая 1) и точке 4 (кривая 2). На рис. 5 изображены эпюры повреждаемости, отвечающие соответственно точке 4 (кривая 1 для  $G^u = G^s$ , 2 для  $G^u = \sqrt{GG^s}$ ) и точке 3 (кривая 3 для  $G^u = G^s$ , 4 для  $G^u = \sqrt{GG^s}$ ). Отметим, что при жестком нагружении поврежденность материала внешнего слоя цилиндра достигает единицы, а при мягком нагружении разрушение этого слоя происходит тогда, когда поврежденность становится меньше единицы.

**3.** Рассмотрим задачу кручения, учитывая в явном виде повреждаемость материала. Полагаем сначала, что модуль разгрузки равен  $G^s$  ( $\gamma^p = 0$ ). Возмутим исходное положение равновесия  $(\psi_0, M_0)$ , увеличив угол закручивания на  $\Delta\psi$  ( $\psi_1 = \psi_0 + \Delta\psi$ ). Опираясь на формулы (26), находим

$$\gamma'_1 = \frac{\Delta\psi r}{l}, \quad \tau'_1 = G_0^s \gamma'_1, \quad M'_1 = \frac{2\pi \Delta\psi}{l} \int_0^R G_0^s r^3 dr, \quad (32)$$

где  $G_0^s = G(1 - \omega_0(r))$ . Тогда первое приближение равно  $\gamma_1 = \gamma_0 + \gamma'_1$ ;  $\tau_1 = \tau_0 + \tau'_1$ ;  $M'_1 = M_0 + M'_1$ . Используя затем диаграмму  $\tau - \gamma$ , по величине  $\gamma_1(r)$  определяем  $G_1^s(r)$  и по формуле (9), где  $G^u = G_1^s$ , вычисляем значение  $\omega_1$  в каждой точке поперечного сечения стержня.

Второе приближение ищем следующим образом. Считаем стержень упругим, но обладающим рассчитанной выше неоднородной поврежденностью. Закручиваем его на угол

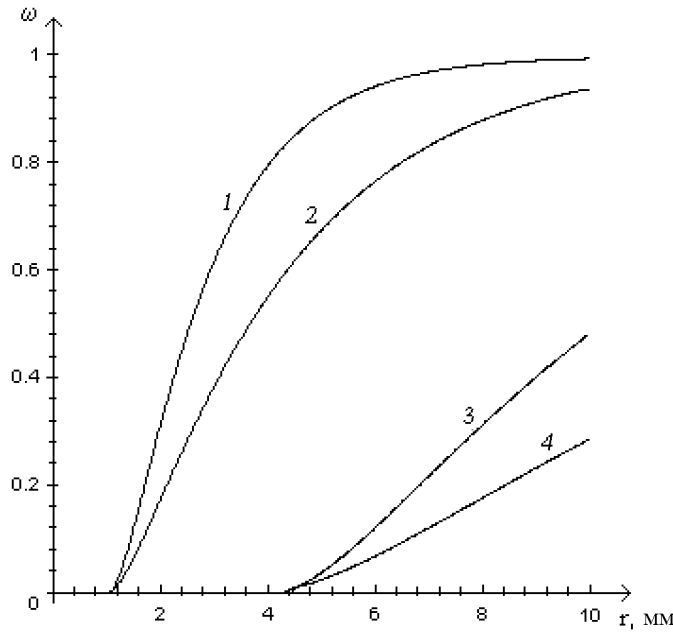


Рис. 5.

$\psi_1$ ; получаем

$$\gamma_2 = \gamma_1, \quad \tau_2 = G_1^s \gamma_2, \quad M_2 = 2\pi \int_0^R G(1 - \omega_1(r)) \gamma_2 r^2 dr.$$

Очевидно, что данное решение является окончательным. Приведенный итерационный процесс схематически показан прямой 1 на рис. 3, 6.

Далее возмутим исходное положение равновесия, увеличив крутящий момент на  $\Delta M$  ( $M_1 = M_0 + \Delta M$ ). Опираясь на формулы (27), имеем

$$\gamma'_1 = \psi'_1 r/l, \quad \tau'_1 = G_0^s \gamma'_1, \quad \psi'_1 = \frac{l \Delta M}{2\pi \int_0^R G_0^s r^3 dr} \quad (33)$$

и первое приближение  $\gamma_1 = \gamma_0 + \gamma'_1$ ;  $\tau_1 = \tau_0 + \tau'_1$ ;  $\psi_1 = \psi_0 + \psi'_1$ . Как и выше, определяем значения  $G_1^s$ ,  $\omega_1$  и, кроме того,  $G_1^p$ . Снова полагаем стержень упругим с неоднородными свойствами, характеризуемыми модулями  $G_1^s(r)$ . Закручиваем его моментом  $M_1$ . Тогда второе приближение дают формулы (33), где вместо  $\Delta M$  и  $G_0^s$  стоят  $M_1$  и  $G_1^s$ . Снова вычисляем  $G_2^s$ ,  $\omega_2$ ,  $G_2^p$ , и процесс повторяется. Описанная итерационная процедура схематически показана кривой 2 на рис. 6 и прямой 2 на рис. 3.

Для определения условий сходимости итераций запишем выражение для полного угла закручивания после  $n + 1$  приближения:

$$\psi_{n+1} = \frac{l M_1}{2\pi \int_0^R G_n^s r^3 dr} = f(\psi_n), \quad (34)$$

здесь  $G_n^s = G_n^s(\gamma_n)$ ,  $\gamma_n = \psi_n r/l$ . Формула (34) представляет метод простой итерации. Известно [1], что он сходится, если функция  $f$  удовлетворяет условию Липшица

$$|f(\psi_n) - f(\psi_{n-1})| \leq k |\psi_n - \psi_{n-1}|$$

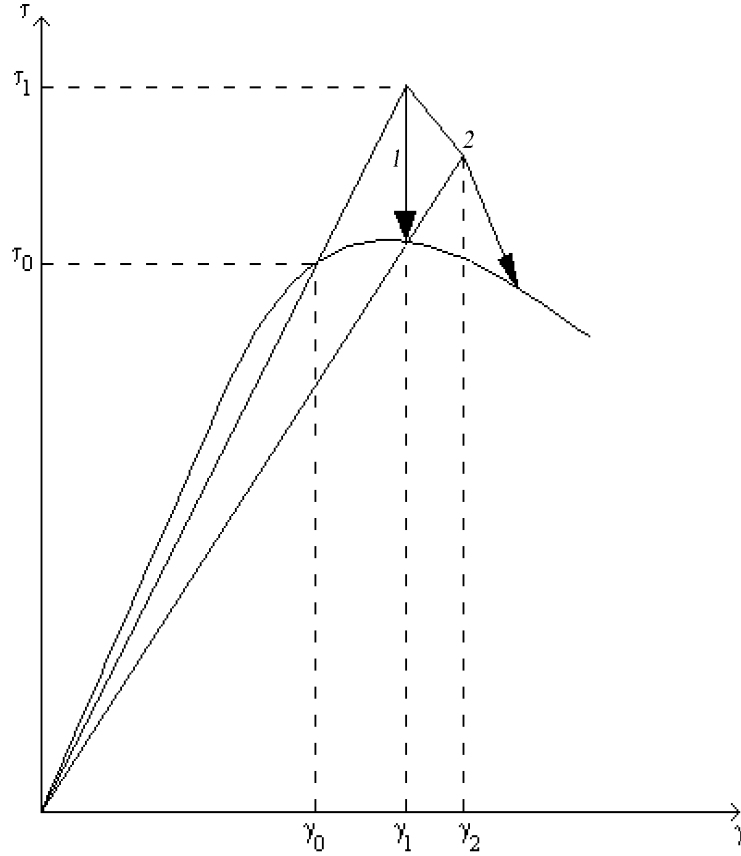


Рис. 6.

с константой

$$k = \sup_{\psi} \left| \frac{df}{d\psi} \right| < 1,$$

так как в этом случае реализуется принцип сжимающих отображений. Вычислим производную функции  $f(\psi)$  в силу условия равновесия

$$M_1 = \left( \int_0^R G^s r^3 dr \right) \frac{2\pi\psi}{l}$$

и равенств

$$\frac{dG^s}{d\gamma} = \frac{d(\tau/\gamma)}{d\gamma} = \frac{(G^p - G^s)}{\gamma}, \quad \frac{\psi}{l\gamma} = r^{-1}.$$

Тогда

$$k = 1 - \frac{\int_0^R G^p r^3 dr}{\int_0^R G^s r^3 dr}.$$

Отсюда, если  $G^p > 0$ , то  $k < 1$ . Если же существует область, где  $G^p < 0$ , то аналогично изложенному в пункте **2** можно показать, что сходимость зависит от параметров падающей ветви диаграммы  $\tau - \gamma$  и величины зоны разупрочнения. Кроме того, разрушение всегда происходит уже при наличии разупрочнения в поверхностных слоях.

4. Исследуем, наконец, общий случай, когда модуль разгрузки равен  $G^u$  ( $\gamma^p \neq 0$ ). При жестком догружении ( $\psi_1 = \psi_0 + \Delta\psi$ ) первое приближение получаем так же, как и в пункте

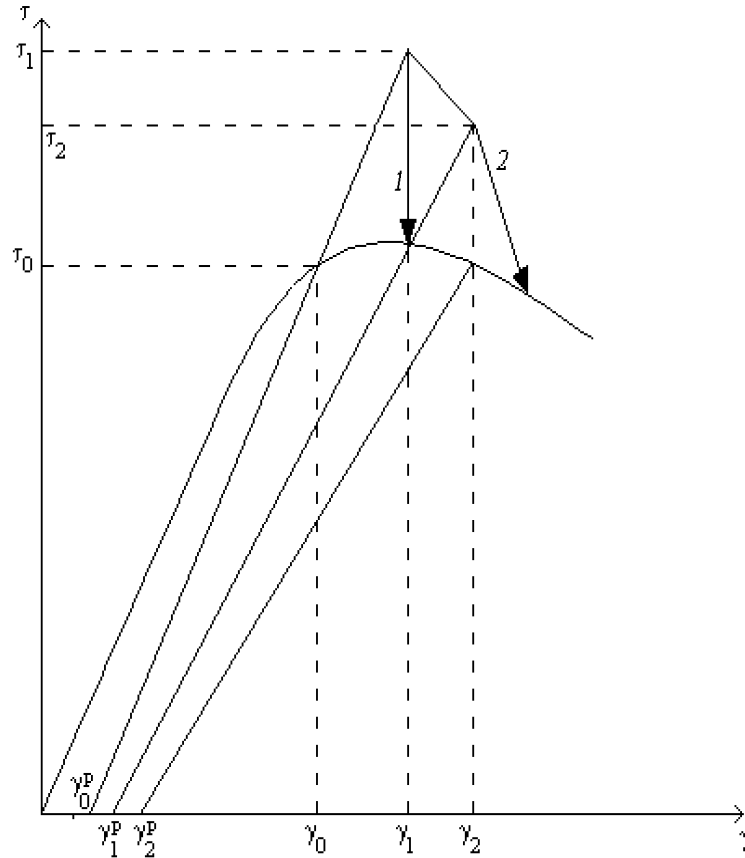


Рис. 7.

**3**, только в формулах (32) величины  $G_0^s$  заменяем на  $G_0^u$ . Используя диаграмму  $\tau - \gamma$ , по значениям  $\gamma_1(r)$  находим  $G_1^u$  и по формуле (9) вычисляем  $\omega_1$  в каждой точке сечения.

Затем определяем  $\gamma_1^p$ . Для этого используем приближенное решение уравнения (14) на отрезке  $[\gamma_0, \gamma_1]$ . В этом случае имеем

$$d\gamma_1^p = \left(1 - \frac{G_0^p}{G_0^u}\right) (\gamma_1 - \gamma_0) - \left(1 - \frac{G_1^u}{G_0^u}\right) (\gamma_0 - \gamma_0^p). \quad (35)$$

Тогда  $\gamma_1^p = \gamma_0^p + d\gamma_1^p$ . Теперь ищем решение задачи для упругого неоднородного стержня, закручиваемого на угол  $\psi_1$ . Используя соотношение (7), получаем

$$\gamma_2 = \gamma_1, \quad \tau_2 = G_1^u(\gamma_2 - \gamma_1^p), \quad M_2 = 2\pi \int_0^R G_1^u(\gamma_2 - \gamma_1^p)r^2 dr,$$

где  $G_1^u = G(1 - \omega_1(r))$ . Это решение окончательное. Процесс итераций показан прямой 1 на рис. 3, 7.

При мягком догружении ( $M_1 = M_0 + \Delta M$ ) первое приближение получаем так же, как и в пункте **3**, только в формулах (33) величины  $G_0^s$  меняем на  $G_0^u$ . По диаграмме деформирования находим  $G_1^u$ ,  $G_1^p$  и по формуле (9) вычисляем  $\omega_1$ , отвечающее  $\gamma_1$ . Используя формулу (35), определяем  $\gamma_1^p$ . Второе приближение тогда равно

$$\gamma_2 = \frac{\psi_2 r}{l}, \quad \tau_2 = G_1^u(\gamma_2 - \gamma_1^p),$$

а значение  $\psi_2$  получаем из условия

$$M_1 = 2\pi \int_0^R G_1^u (\gamma_2 - \gamma_1^p) r^2 dr. \quad (36)$$

Снова находим  $G_2^u$ ,  $G_2^p$ ,  $\omega_2$ ,  $\gamma_2^p$ , и процесс повторяется. Описанная итерационная процедура схематически показана кривой 2 на рис. 7 и прямой 2 на рис. 3.

Итак,

$$\psi_{n+1} = l \frac{2\pi \int_0^R G_n^u \gamma_n^p r^2 dr + M_1}{2\pi \int_0^R G_n^u r^3 dr} = \varphi(\psi_n),$$

где  $G_n^u(\gamma_n)$ ,  $\gamma_n = \psi_n r/l$ . Вычислим производную функции  $\varphi(\psi)$  в силу уравнений (36) и (14). Имеем

$$k = \frac{d\varphi}{d\psi} = 1 - \frac{\int_0^R G^p r^3 dr}{\int_0^R G^u r^3 dr}.$$

Структура этого выражения показывает, что и в данном случае справедливы рассуждения об условиях сходимости итерационного процесса, изложенные в пункте 3.

В заключение отметим, что численные расчеты, проведенные по методикам, представленным в пунктах 3 и 4, совпадают с результатами пункта 2. Это объясняется отсутствием зон разгрузки при кручении стержня.

## Список литературы

- [1] КОЛМОГОРОВ А. Н., ФОМИН С. В. *Элементы теории функций и функционального анализа*. Наука, М., 1989.
- [2] МОСКВИТИН В. В. *Соппротивление вязкоупругих материалов*. Наука, М., 1972.
- [3] ПАВЛОВ В. А. *Основы инженерных расчетов машин на усталость и длительную прочность*. Машиностроение, Л., 1988.
- [4] СЕДОВ Л. И. *Механика сплошной среды. Т. 2*. Наука, М., 1970.

Поступила в редакцию 16 февраля 1999 г.