

## Высокопроизводительный расчет тонкостенных оболочечных конструкций с использованием параллельных вычислений и графических ускорителей

Ю. Н. Згода\*, А. А. СЕМЕНОВ

Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет, 190005, Санкт-Петербург, Россия

\*Контактный автор: Згода Юрий Николаевич, e-mail: [yurii.zgoda@mail.ru](mailto:yurii.zgoda@mail.ru)

Поступила 01 апреля 2022 г., доработана 26 июля 2022 г., принята в печать 17 августа 2022 г.

Предложен ряд высокопроизводительных алгоритмов компьютерного моделирования оболочечных конструкций (или оболочек) с использованием метода Ритца. Эти алгоритмы могут быть применены как при реализации метода Ритца в общем случае, так и при расчете напряженно-деформированного состояния (НДС) оболочечных конструкций. Описывается применение графических ускорителей в задаче расчета НДС.

Предложенные алгоритмы включены в ранее разработанное авторами программное обеспечение моделирования НДС-оболочек. Для их апробации проведен вычислительный эксперимент. Исследование алгоритмов показало, что они позволяют повысить производительность расчета на несколько порядков в сравнении с оптимизированной версией программного обеспечения.

*Ключевые слова:* оболочечные конструкции, параллельные вычисления, вычисления с использованием GPU, Python, метод Ритца.

*Цитирование:* Згода Ю.Н., Семенов А.А. Высокопроизводительный расчет тонкостенных оболочечных конструкций с использованием параллельных вычислений и графических ускорителей. Вычислительные технологии. 2022; 27(6):45–57. DOI:10.25743/ICT.2022.27.6.005.

### Введение

Оболочечные конструкции широко применяют в судо- и самолетостроении, в гидротехнике, на объектах АЭС, в мостостроении, при возведении промышленных, сельскохозяйственных и гражданских объектов, в дорожном и подземном строительстве, горнодобывающей и перерабатывающей промышленности [1–4].

Существуют различные методы расчета напряженно-деформированного состояния (НДС) тонкостенных оболочечных конструкций под воздействием нагрузок. Наиболее распространенным из них является метод конечных элементов (МКЭ) [5–7]. Однако у МКЭ имеется ряд недостатков, таких как необходимость построения геометрической сетки [8] и усложненная процедура моделирования неустойчивости конструкций [9]. В тех случаях, когда недостатки МКЭ оказываются существенными, применяются другие методы, например метод Ритца. Метод Ритца часто используется в тех случаях,

когда оболочка задается параметрически, а ее поведение описывается математической моделью на основе вариационных принципов. Пример исследования оболочек с использованием метода Ритца приведен в [10].

На данный момент способы повышения производительности вычислений при использовании метода Ритца малоизучены. Его применение вызывает экспоненциальный рост вычислительной сложности задачи при увеличении количества аппроксимирующих слагаемых, поэтому высокоточные расчеты оболочечных конструкций с использованием этого метода требуют существенных вычислительных ресурсов и временных затрат.

В настоящей работе предложен ряд высокопроизводительных алгоритмов, позволяющих сократить длительность численного моделирования НДС-оболочек с использованием метода Ритца. Для апробации алгоритмов было модифицировано ранее разработанное авторами программное обеспечение (ПО) компьютерного моделирования оболочек. Задачи, решение которых требовало нескольких суток вычислений с использованием исходной версии ПО, могут быть решены за минуты благодаря предложенным алгоритмам. Подобный прирост производительности достигнут за счет возможности решения рассматриваемых задач с использованием графических ускорителей и многоядерных процессоров, а также за счет оригинальных алгоритмических решений, учитывающих особенности как применяемых численных методов, так и математической модели тонкостенных оболочечных конструкций.

Проведен анализ современного состояния исследований в области компьютерного моделирования оболочечных конструкций. Изучены применяемые схемы расчета, выявлены и оптимизированы наиболее ресурсоемкие этапы расчета. Для программной реализации разработанных алгоритмов использован язык программирования Python. При проведении вычислительного эксперимента использован компьютер на базе процессора AMD Ryzen 9 3900X с 64 ГБ ОЗУ и видеокартой Nvidia Geforce RTX 2070 Super под управлением ОС Windows 10.

## 1. Обзор литературы

Метод Ритца активно применяется для численного моделирования различных оболочечных конструкций. Например, в работе [11] он используется для анализа подобия оболочек, в [12] с помощью данного метода анализируются аэротермоэластические свойства оболочек, в [10] — их колебания. Его часто используют при моделировании многослойных оболочек [13].

Вариационная формулировка задачи упрощает параметрическое задание геометрии оболочечной конструкции [14], а основанные на вариационных принципах методы численного расчета просты в реализации на ЭВМ и обладают высокой точностью [15].

В работах [8, 9] показано, что у метода конечных элементов, активно используемого для расчета строительных конструкций (в частности оболочек), есть ряд недостатков, отсутствующих у метода Ритца. С другой стороны, исследования, направленные на повышение производительности вычислений при использовании метода Ритца, единичны. Среди наиболее актуальных работ, посвященных модификации метода Ритца, можно отметить [16], где предлагается использовать глубокое обучение для решения вариационной задачи. В то же время влияние подобной модификации на производительность моделирования, как и ее применимость к задаче моделирования оболочек (авторы рассматривают функционал, зависящий от одной функции, а функционал полной потенциальной энергии деформации оболочки зависит от пяти функций), практически не изучены.

## 2. Архитектура программного обеспечения компьютерного моделирования оболочечных конструкций

Использованная архитектура ПО состоит из четырех модулей, решающих основные задачи расчета и анализа НДС оболочечных конструкций (рис. 1).

*Модуль построения математической модели* выполняет генерацию составляющей функционала, ответственной за потенциальную энергию конструкции, и раскрытие всех скобок в выражении.

*Модуль интегрирования функционала* вычисляет интеграл функционала, построенного по математической модели. В ходе интегрирования каждое слагаемое разделяется на не требующие интегрирования константы (числовые множители, неизвестные коэффициенты) и численно интегрируемые аналитические функции. Для выполнения численного интегрирования предлагается использовать графические ускорители, ранее не применявшиеся при реализации метода Ритца.

*Модуль поиска минимума функционала* выполняет минимизацию функционала при различных значениях нагрузки  $q$  в рамках расчета НДС-оболочки. Для повышения производительности процесса минимизации предлагаются JIT-компиляция и кеширование минимизируемой функции и ее градиента.



Рис. 1. Архитектура программы

Fig. 1. Software architecture

Модуль интерактивной визуализации применяется по окончании расчета НДС-оболочки для детального анализа прочностных и жесткостных свойств конструкции.

Каждый из модулей (за исключением модуля визуализации [17]) и разработанные алгоритмы подробно описаны ниже.

### 2.1. Построение математической модели

Используется геометрически-нелинейная математическая модель деформирования тонкостенной оболочечной конструкции, являющаяся частным случаем модели подкрепленной оболочки, подробное описание которой приведено в работе [18]. Модель предполагает решение вариационной задачи для функционала полной потенциальной энергии деформации оболочки. Решением вариационной задачи являются три функции  $U$ ,  $V$ ,  $W$ , описывающие перемещения точек срединной поверхности оболочки в трех ортогональных направлениях  $x$ ,  $y$ ,  $z$  соответственно, а также две функции поворота  $\Psi_x$ ,  $\Psi_y$ , определяющие углы поворота отрезка нормали к срединной поверхности в сечениях  $x0z$  и  $y0z$  соответственно.

Для численного решения вариационной задачи к функционалу полной потенциальной энергии деформации применяется метод Рунта, позволяющий свести задачу минимизации функционала к задаче минимизации функции многих переменных. Суть метода заключается в замене неизвестных функций интегрируемыми функциями с неизвестными численными коэффициентами:

$$\begin{aligned} U(x, y) &= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n U_{kl} X_1^k Y_1^l, & V(x, y) &= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n V_{kl} X_2^k Y_2^l, & W(x, y) &= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n W_{kl} X_3^k Y_3^l, \\ \Psi_x(x, y) &= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \Psi_{x_{kl}} X_4^k Y_4^l, & \Psi_y(x, y) &= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \Psi_{y_{kl}} X_5^k Y_5^l. \end{aligned} \quad (1)$$

Рассматривалась полая оболочка двойкой кривизны с шарнирно-неподвижным закреплением, поэтому аппроксимирующие функции (с учетом симметрии конструкции) имеют вид

$$\begin{aligned} f_1(i, t) &= \sin(2i\pi t), & f_2(i, t) &= \sin((2i-1)\pi t), & f_3(i, t) &= \cos((2i-1)\pi t), \\ U(x, y) &= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n U_{kl} f_1(k, x/a) f_2(l, y/b), & V(x, y) &= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n V_{kl} f_2(k, x/a) f_1(l, y/b), \\ W(x, y) &= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n W_{kl} f_2(k, x/a) f_2(l, y/b), & \Psi_x(x, y) &= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \Psi_{x_{kl}} f_3(k, x/a) f_2(l, y/b), \\ \Psi_y(x, y) &= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \Psi_{y_{kl}} f_2(k, x/a) f_3(l, y/b). \end{aligned}$$

Количество слагаемых в функционале полной потенциальной энергии деформации с увеличением параметра  $n$  растет экспоненциально, что и обуславливает необходимость в разработке высокопроизводительных алгоритмов расчета. В табл. 1 для разных значений  $n$  приведено количество слагаемых для работы внутренних сил двойковыпуклой оболочки. Очевидно, что с увеличением количества слагаемых экспоненциально возрастает сложность интегрирования функционала и его минимизации.

Т а б л и ц а 1. Количество слагаемых в функционале при разных значениях  $n$   
 Table 1. Number of terms in the functional for different values of  $n$

$n$	1	2	3	4	5	6
$5n^2$	5	20	45	80	25	180
$E_p$	71	3561	56 874	467 236	2 524 375	10 263 801

Для построения функционала в рамках разработанного ПО использована библиотека символьной математики SymEngine, написанная на языке C++ (хотя имеется “обертка” для Python, используемая в данной работе) и обладающая высокой (по сравнению с аналогичными решениями) производительностью обработки сложных математических выражений. Стоит отметить, что модуль построения математической модели выполняет генерацию только той составляющей функционала, которая ответственна за потенциальную энергию конструкции. Слагаемые, связанные с нагрузкой, добавляются в функционал в модуле расчета НДС-оболочки.

## 2.2. Интегрирование функционала

После подстановки в функционал аппроксимирующих функций необходимо выполнить его интегрирование. Интегрирование многих миллионов слагаемых, возникающих после применения к функционалу метода Ритца, даже с использованием многоядерных процессоров требует больших временных затрат. В работе предлагается использовать графические ускорители для сокращения длительности интегрирования аппроксимированного методом Ритца функционала.

Современные графические ускорители (Graphics Processing Unit — GPU) включают в себя тысячи ядер, благодаря чему их использование крайне эффективно при необходимости выполнять большое количество независимых друг от друга однотипных операций. Главной сложностью при этом является разработка структуры данных для представления интегрируемых слагаемых на GPU.

При программировании под используемую в рамках этой работы GPU-платформу Nvidia CUDA [19] в качестве передаваемых данных доступны только примитивные типы (float, double, bool, int и т. д.). По этой причине символьные выражения SymEngine невозможно передать на видеокарту напрямую, необходимо предварительно преобразовать их. Для разработки подходящей структуры данных выполнен анализ функционала после применения к нему метода Ритца. В соответствии с (1) численному интегрированию функций подлежат только произведения функций  $f_1$ ,  $f_2$ ,  $f_3$  и их производных до второго порядка включительно. Следовательно, та часть слагаемого, которую необходимо численно проинтегрировать, включает в себя лишь произведения синусов и косинусов разных степеней:

$$\prod_{i=1}^n (\sin \setminus \cos(a_i \times x \setminus y))^{\alpha_i},$$

где косой чертой “\” обозначены альтернативные варианты,  $a_i, \alpha_i \in \mathbb{R}$ .

Представив в виде двух булевых переменных используемую функцию (sin или cos) и аргумент ( $x$  или  $y$ ), а также использовав две переменных типа double (множитель аргумента и степень), можно описать один множитель в слагаемом функционала через примитивные типы данных. Массив таких структур образует одно слагаемое, массив массивов — функционал в формате, передаваемом на GPU. Подобный подход позволил сократить длительность интегрирования функционала при  $n=4$  в 420 раз по сравнению с последовательным интегрированием на центральном процессоре (см. ниже табл. 3).

### 2.3. Расчет НДС-оболочки

Для численного поиска минимума функционала полной потенциальной энергии деформации использовалась реализация алгоритма L-BFGS-B библиотеки SciPy [20]. Так как она является последовательной, единственный способ повышения производительности поиска минимума в данном случае — это повышение скорости вычисления минимизируемой функции и ее производных.

Подстановка значений (метод `subs` библиотеки SymEngine) — один из наиболее распространенных и в то же время медленных способов вычисления символьного выражения. Альтернативой является генерация Python-функций (которые вычисляются быстрее по сравнению с `subs`), но для построения Python-функции из суммы многих миллионов слагаемых встроенные средства SymEngine оказались непригодными.

Чтобы оптимизировать процесс вычисления функционала и его производных, рассмотрено применение Just-In-Time (JIT) компиляции, позволяющей в ходе выполнения программы компилировать Python-код в машинные инструкции. В данной работе использована библиотека JIT-компиляции Numba [21].

Напрямую использовать Numba для компиляции выражений SymEngine невозможно, поскольку аргументами скомпилированной функции должны быть примитивные типы данных. Кроме того, компиляция представляет собой относительно длительный процесс (секунды на используемом в рамках данного исследования оборудовании), т. е. для разных символьных выражений следует использовать одну и ту же функцию, иначе прирост в скорости вычислений будет нивелирован длительностью компиляции.

Предложен подход, решающий описанные выше проблемы для любой задачи минимизации методом Рунца. Подход сводится к “компиляции” символьных выражений в специальную структуру данных и последующему кешированию этой структуры.

Обратим внимание на то, что функционал после применения метода Рунца сводится к многомерному полиному

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^m p_i(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad p_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_i \prod_{j=1}^{k_i} x_{t_{ij}}^{s_{ij}},$$

где  $x_1, \dots, x_n$  — минимизируемые параметры;  $p_i$  — слагаемые, из которых состоит полином;  $a_i \in \mathbb{R}$  — числовой коэффициент;  $t_{ij} \in \mathbb{R}$  — индекс минимизируемого параметра;  $s_{ij} \in \mathbb{R}$  — степень, в которую возведен минимизируемый параметр.

Таким образом, любая минимизируемая в рамках метода Рунца функция определяется набором параметров  $a_i, t_{ij}, s_{ij}$  и значениями  $x_1, \dots, x_n$ , а “компиляция” функции сводится к выделению этих параметров из символьного выражения. Для вычисления полинома можно использовать единожды скомпилированную Python-функцию. Более того, эту функцию можно скомпилировать с параметром `parallel = True`, что позволит применить к ней встроенные средства распараллеливания Numba.

Сравнение скорости вычислений с использованием метода `subs` и компилируемой функции (с распараллеливанием и без него) представлено в табл. 2, где при разных значениях  $n$  была произведена тысяча вычислений значения функционала в произвольной точке  $5n^2$ -мерного пространства (пять аппроксимирующих функций, в каждой из которых  $n^2$  оптимизируемых параметров).

Как можно видеть из табл. 2, начиная с  $n = 2$  предложенная оптимизация позволяет на порядок повысить производительность вычисления минимизируемых функций по сравнению с методом `subs`. Использование параметра `parallel = True` при малых значениях  $n$  не позволило получить какой-либо прирост в производительности. Отметим, что

Т а б л и ц а 2. Производительность методов вычисления минимизируемой функции  
 Table 2. Performance of methods for calculating the minimized function

$n$	Время вычисления минимизируемой функции, с		
	subs	скомпилированная	скомпилированная параллельная
2	3.22	0.27	0.22
3	66.52	4.47	2.67
4	807.36	38.66	21.40

при  $n > 2$  наблюдается прирост в производительности, но лишь на 40 %. Возможным объяснением низкой эффективности этой оптимизации является то, что при распараллеливании вычислений через Numba выполняются дополнительные действия по обработке данных, резко снижающие эффективность распараллеливания при относительно малых объемах обрабатываемых данных.

Стоит отметить, что преобразование минимизируемой функции и ее градиента в “скомпилированный” вид является длительной процедурой, занимающей до нескольких минут при  $n = 5$ . С другой стороны, для конкретной конфигурации оболочки оптимизируемые функции отличаются лишь слагаемыми, связанными с приложением нагрузки. Поэтому выполнена дополнительная модификация алгоритма, заключающаяся в кешировании неизменной составляющей функционала. Такая модификация позволяет однократно выполнить компиляцию не зависящей от нагрузки части функционала и его градиентов перед расчетом НДС, а затем прибавлять к скомпилированному функционалу и градиентам дополнительные слагаемые.

### 3. Вычислительный эксперимент

По завершении разработки ПО для расчета оболочечных конструкций выполнено его тестирование посредством расчета НДС полой двояковыпуклой оболочки со следующими характеристиками:

- параметры Ляме и радиусы кривизны:  $A = B = 1$ ,  $R_1 = \text{const}$ ,  $R_2 = \text{const}$ ;
- геометрические параметры:  $a = b = 36.0$  м,  $R_1 = R_2 = 90.6$  м,  $h = 0.06$  м;
- материал — сталь,  $E = 2.1 \cdot 10^5$  МПа,  $\mu = 0.3$ ,  $G = 8.08 \cdot 10^4$  МПа.

Закрепление оболочки — шарнирно-неподвижное по контуру. Оболочка находится под воздействием равномерно-распределенной поперечной нагрузки. Диапазон прикладываемых нагрузок — от 0.0 до 0.1 МПа включительно с шагом 0.001 МПа. Расчетная схема для рассматриваемой конструкции представлена на рис. 2. На рис. 3 приведены диаграммы “нагрузка — прогиб” (показывающие максимальные вертикальные перемещения при разных значениях прикладываемой нагрузки  $q$ ), полученные при разном количестве аппроксимационных слагаемых  $n$ .

Сведения о длительности расчета НДС-оболочки с использованием исходной и модифицированной версий ПО приведены в табл. 3. При расчете НДС посредством оптимизированной версии использовались сетка интегрирования  $101 \times 101$  и параметр компиляции `Numba parallel = True`.

Суммарная длительность шести вычислений (для  $n = 1, 2, \dots, 6$ ) составила 10.5 ч. Для  $n = 1, 2, 3$  десятки вычислений выполняются в течение нескольких секунд, что может быть полезно для предварительного анализа конструкции и определения порядка

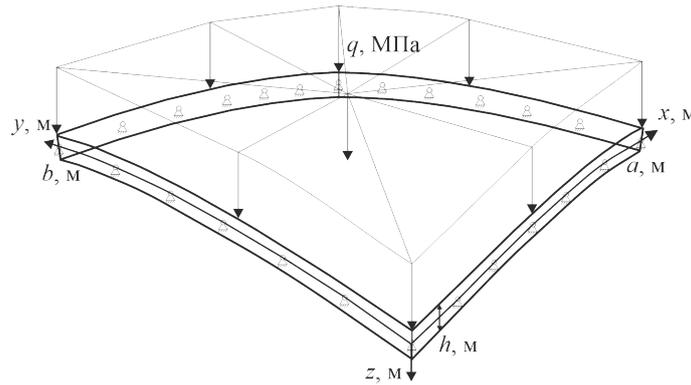


Рис. 2. Расчетная схема пологой двояковыпуклой оболочки  
 Fig. 2. Design scheme of a sloping doubly-curved shell

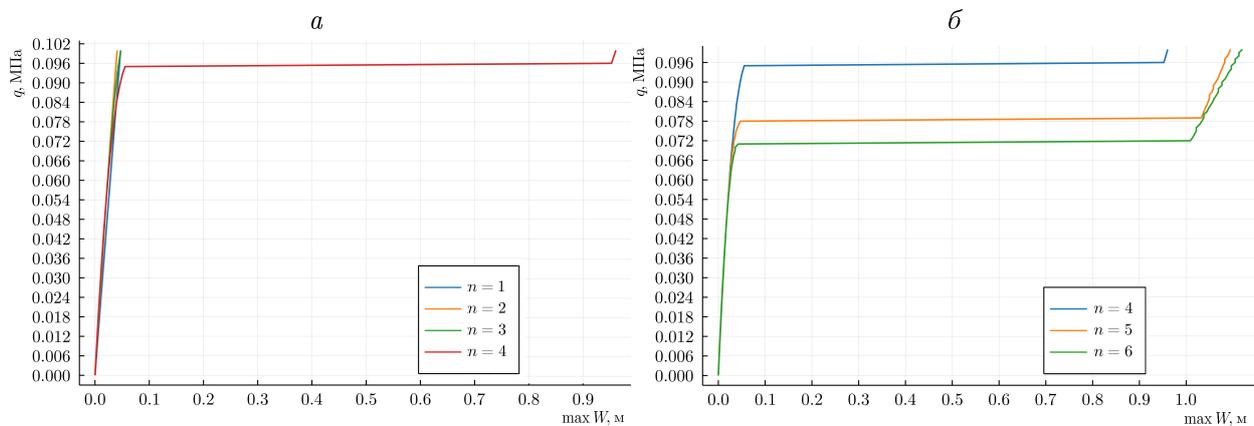


Рис. 3. График зависимости “нагрузка — прогиб” для моделируемой оболочки:  $n = 1, 2, 3, 4$  (а) и  $n = 4, 5, 6$  (б)  
 Fig. 3. Load — deflection dependence graph for the modelled shell:  $n = 1, 2, 3, 4$  (a) and  $n = 4, 5, 6$  (б)

Т а б л и ц а 3. Длительность вычислений при  $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$   
 Table 3. Duration of calculations for  $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$

$n$	1	2	3	4	5	6
Количество слагаемых	71	3561	56 874	467 236	2 524 375	10 263 801
Генерация функционала, с	0.00	0.03	0.6	6.19	36.73	190.71
Интегрирование функционала, с	0.35	94.91	3757.86	57 270.74	—	—
То же, модифицированная версия, с	0.64	4.69	17.54	136.79	725.98	3255.16
Компиляция и кэширование функционала и градиентов, с	0.00	0.08	2.14	35.50	306.67	1842.07
Среднее время минимизации для одного значения нагрузки, с	0.05	0.21	3.66	79.39	—	—
То же, модифицированная версия, с	0.06	0.14	0.52	5.44	43.65	256.95
Итого, с	5.29	116.11	4131.26	65 345.05	—	—
Итого, модифицированная версия, с	6.35	19.38	72.79	729.33	5493.06	31 539.23

деформаций. Для более детального исследования могут быть использованы аппроксимации с  $n = 4, 5, 6$ , при которых вычисления выполняются дольше, но точность определения критической нагрузки значительно выше.

Из табл. 3 следует, что модифицированная версия ПО обладает значительно более высокими показателями производительности в сравнении с оригинальной программой, причем эффективность оптимизации повышается с ростом  $n$ . При  $n = 4$  наблюдаются 420-кратное сокращение длительности интегрирования, 15-кратное ускорение поиска минимума функционала и 90-кратный прирост производительности в целом. Более того, разработанное ПО позволило выполнить моделирование с использованием аппроксимаций порядка  $n = 6$  (т.е. 36 аппроксимационных слагаемых для каждой из пяти неизвестных функций). Ранее в исследованиях, посвященных моделированию оболочечных конструкций с использованием геометрически-нелинейной математической модели, столь сложные аппроксимации не применялись, так как это требовало больших временных затрат.

Для валидации результатов вычислительного эксперимента использованы результаты компьютерного моделирования данной конструкции, представленные в монографии В.В. Карпова [15, § 7.6]. В ней определена критическая нагрузка для рассматриваемой конструкции с использованием конечно-элементного ПО ANSYS (0.068 МПа), метода Ритца при  $n = 4$  (0.096 МПа) и с применением несимметричных возмущений (0.067 МПа).

Как можно видеть из рис. 3, начиная с  $n = 4$  на диаграмме наблюдается потеря устойчивости, чему при  $n = 4$  соответствует нагрузка в 0.095 МПа, т.е. результаты моделирования с использованием метода Ритца, полученные в данной работе, совпадают с результатами из [15] с точностью в 0.001 МПа. При выполнении расчетов для более высоких значений  $n$  наблюдается существенное снижение значения критической нагрузки, при  $n = 6$  критическая нагрузка составила 0.071 МПа. Для получения подобного результата в [15] требовалось использовать моделирование с несимметричными возмущениями. Как показывает проведенный вычислительный эксперимент, при  $n = 6$  можно определить критическую нагрузку конструкции с высокой точностью без применения несимметричных возмущений.

## Заключение

Описан ряд алгоритмов и программных модификаций, позволивших на несколько порядков сократить длительность вычислений при расчете НДС оболочечных конструкций. Для их апробации создано ПО и проведен вычислительный эксперимент, в рамках которого рассчитано НДС пологой двояковыпуклой оболочечной конструкции. За счет высокой производительности и информативных средств визуализации ПО позволило в короткие сроки провести детальный анализ конструкции. Сравнительный анализ полученных результатов с результатами сторонних исследователей показал высокую точность моделирования с использованием разработанного ПО.

Математические модели на основе вариационных принципов активно применяются исследователями в различных областях науки. Тем не менее вопросы производительности решения вариационной задачи при использовании метода Ритца остаются малоизученными. Предложены различные подходы к сокращению длительности вычислений с использованием данного метода. Это открывает новые возможности для исследователей, позволяя им с высокой точностью исследовать те модели, которые ранее были недоступны для вычислительного эксперимента из-за высокой вычислительной сложности, а также оперативно получать результаты компьютерного моделирования.

## Список литературы

- [1] **Леденев В.В., Худяков А.В.** Оболочечные конструкции в строительстве. Тамбов: ФГБОУ ВО “ТГТУ”; 2016: 272.
- [2] **Raeesi A., Zohrehheydariha J., Das S.** Failure analysis of steel silos subject to wind load. *Engineering Failure Analysis*. 2017; (79):749–761. DOI:10.1016/j.engfailanal.2017.04.031.
- [3] **Lee S.E., Sahin S., Rigo P., Park M., Paik J.K.** Ultimate strength of cylindrical shells with cutouts. *Ships and Offshore Structures*. 2017; 12(S1):153–173. DOI:10.1080/17445302.2016.1271592.
- [4] **Godoy L.A.** Buckling of vertical oil storage steel tanks: review of static buckling studies. *Thin-Walled Structures*. 2016; (103):1–21. DOI:10.1016/j.tws.2016.01.026.
- [5] **Stupishin L., Nikitin K., Kolesnikov A.** Numerical research orthotropic geometrically nonlinear shell stability using the mixed finite element method. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. 2017; (201):012019. DOI:10.1088/1757-899X/201/1/012019.
- [6] **Paccola R.R., Sampaio M.S., Coda H.B.** Continuous stress distribution following transverse direction for FEM orthotropic laminated plates and shells. *Applied Mathematical Modelling*. 2016; 40(15–16):7382–7409. DOI:10.1016/j.apm.2016.03.005.
- [7] **Solovei N.A., Krivenko O.P., Malygina O.A.** Finite element models for the analysis of nonlinear deformation of shells stepwise-variable thickness with holes, channels and cavities. *Magazine of Civil Engineering*. 2015; 1(53):56–69. DOI:10.5862/MCE.53.6.
- [8] **Mellouli H., Jrad H., Wali M., Dammak F.** Meshless implementation of arbitrary 3D-shell structures based on a modified first order shear deformation theory. *Computers & Mathematics with Applications*. 2019; 77(1):34–49. DOI:10.1016/j.camwa.2018.09.010.
- [9] **Faghih Shojaeri M., Ansari R.** Variational differential quadrature: a technique to simplify numerical analysis of structures. *Applied Mathematical Modeling*. 2017; (49):705–738. DOI:10.1016/j.apm.2017.02.052.
- [10] **Deng J., Guasch O., Maxit L., Zheng L.** Vibration of cylindrical shells with embedded annular acoustic black holes using the Rayleigh-Ritz method with Gaussian basis functions. *Mechanical Systems and Signal Processing*. 2021; (150):107225. DOI:10.1016/j.ymssp.2020.107225.
- [11] **Wang J., Li Z.L., Yu W.** Structural similitude for the geometric nonlinear buckling of stiffened orthotropic shallow spherical shells by energy approach. *Thin-Walled Structures*. 2019; (138):430–457. DOI:10.1016/j.tws.2018.02.006.
- [12] **Chai Y., Song Z., Li F.** Investigations on the aerothermoelastic properties of composite laminated cylindrical shells with elastic boundaries in supersonic airflow based on the Rayleigh–Ritz method. *Aerospace Science and Technology*. 2018; (82–83):534–544. DOI:10.1016/j.ast.2018.09.040.
- [13] **Li H., Pang F., Gao C., Huo R.** Jacobi–Ritz method for dynamic analysis of laminated composite shallow shells with general elastic restraints. *Composite Structures*. 2020; (242):112091. DOI:10.1016/j.compstruct.2020.112091.
- [14] **Fazzolari F.A., Carrera E.** Refined hierarchical kinematics quasi-3D Ritz models for free vibration analysis of doubly curved FGM shells and sandwich shells with FGM core. *Journal of Sound and Vibration*. 2014; 333(5):1485–1508. DOI:10.1016/j.jsv.2013.10.030.

- [15] **Карпов В.В.** Прочность и устойчивость подкрепленных оболочек вращения. В 2 ч. Ч. 2. Вычислительный эксперимент при статическом механическом воздействии. М.: Физматлит; 2010: 248.
- [16] **Weinan E., Yu B.** The deep Ritz method: a deep learning-based numerical algorithm for solving variational problems. *Communications in Mathematics and Statistics*. 2018; 6(1):1–12. DOI:10.48550/arXiv.1710.00211.
- [17] **Semenov A.A., Zgoda Yu.N.** Visualization of the stress — strain state of shell structures using virtual and augmented reality technologies. *Proceedings of the 30th International Conference on Computer Graphics and Machine Vision (GraphiCon 2020)*. Pt 2. 2020: 13-1–13-12. Available at: <http://ceur-ws.org/Vol-2744/paper13.pdf>.
- [18] **Karpov V.V.** Models of the shells having ribs, reinforcement plates and cutouts. *International Journal of Solids and Structures*. 2018; (146):117–135. DOI:10.1016/j.ijsolstr.2018.03.024.
- [19] **Nickolls J., Buck I., Garland M., Skadron K.** Scalable parallel programming with CUDA: is CUDA the parallel programming model that application developers have been waiting for? *Queue*. 2008; 6(2):40–53. DOI:10.1145/1365490.1365500.
- [20] **Virtanen P., Gommers R., Oliphant T.E. et al.** SciPy 1.0: fundamental algorithms for scientific computing in Python. *Nature Methods*. Nature Publishing Group; 2020; 17(3):261–272. DOI:10.1038/s41592-019-0686-2.
- [21] **Lam S.K., Pitrou A., Seibert S.** Numba: a LLVM-based Python JIT compiler. *Proceedings of the Second Workshop on the LLVM Compiler Infrastructure in HPC*. Association for Computing Machinery; 2015: 1–6. DOI:10.1145/2833157.2833162.

## High performance computation of thin shell constructions with the use of parallel computations and GPUs

ZGODA YURIY N.\* , SEMENOV ALEXEY A.

Saint Petersburg State University of Architecture and Civil Engineering, 190005, Saint Petersburg, Russia

\*Corresponding author: Zgoda Yuriy N., e-mail: [yurii.zgoda@mail.ru](mailto:yurii.zgoda@mail.ru)

Received April 01, 2022, revised July 26, 2022, accepted August 17, 2022.

### Abstract

*Purpose.* The Ritz method often used for calculation of thin-shell structures allows performing a transition from a variational problem to the problem of multidimensional function minimization. The main disadvantage of this method is the nonlinear increase of computational complexity with the increase of terms amount in approximation functions. This fact makes it difficult or impossible to obtain results in cases where high solution accuracy is required or when a shell structure with complex geometry is investigated. At the same time, studies aimed at improving computing performance of the Ritz method, especially in problems of shell computer modelling, are rare. The purpose of this work is to develop algorithms for high-performance calculation of the stress-strain state (SSS) of thin-walled shell structures using the Ritz method.

*Methodology.* Analysis of the current state in the field of computer modelling for shell structures was performed. Shell SSS calculation schemes are studied. Algorithms are proposed to improve

computer modelling performance by using different mathematical model properties, multi-core CPUs and graphics accelerators.

*Findings.* Described algorithms were implemented in shell SSS modelling software previously developed by the authors. Tests of the performance have shown that they improve the calculation time by several orders compared with the non-optimized version of the software.

*Originality/Value.* New effective algorithms have been developed for modelling the SSS of thin-walled shell structures using the Ritz method. These algorithms can be applied not only to the calculation of shells, but to any other application of Ritz method to the problem of functional minimization.

*Keywords:* shell constructions, parallel computations, GPU computations, Python, Ritz method.

*Citation:* Zgoda Yu.N., Semenov A.A. High performance computation of thin shell constructions with the use of parallel computations and GPUs. Computational Technologies. 2022; 27(6):45–57. DOI:10.25743/ICT.2022.27.6.005. (In Russ.)

## References

1. **Ledenev V.V., Hudyakov A.V.** Obolocheynye konstruksii v stroitelstve [Shell constructions in civil engineering]. Tambov: FGBOU VO "TGTU"; 2016: 272. (In Russ.)
2. **Raeesi A., Zohrehheydariha J., Das S.** Failure analysis of steel silos subject to wind load. Engineering Failure Analysis. 2017; (79):749–761. DOI:10.1016/j.engfailanal.2017.04.031.
3. **Lee S.E., Sahin S., Rigo P., Park M., Paik J.K.** Ultimate strength of cylindrical shells with cutouts. Ships and Offshore Structures. 2017; 12(S1):153–173. DOI:10.1080/17445302.2016.1271592.
4. **Godoy L.A.** Buckling of vertical oil storage steel tanks: review of static buckling studies. Thin-Walled Structures. 2016; (103):1–21. DOI:10.1016/j.tws.2016.01.026.
5. **Stupishin L., Nikitin K., Kolesnikov A.** Numerical research orthotropic geometrically nonlinear shell stability using the mixed finite element method. IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. 2017; (201):012019. DOI:10.1088/1757-899X/201/1/012019.
6. **Paccola R.R., Sampaio M.S., Coda H.B.** Continuous stress distribution following transverse direction for FEM orthotropic laminated plates and shells. Applied Mathematical Modelling. 2016; 40(15–16):7382–7409. DOI:10.1016/j.apm.2016.03.005.
7. **Solovei N.A., Krivenko O.P., Malygina O.A.** Finite element models for the analysis of nonlinear deformation of shells stepwise-variable thickness with holes, channels and cavities. Magazine of Civil Engineering. 2015; 1(53):56–69. DOI:10.5862/MCE.53.6.
8. **Mellouli H., Jrad H., Wali M., Dammak F.** Meshless implementation of arbitrary 3D-shell structures based on a modified first order shear deformation theory. Computers & Mathematics with Applications. 2019; 77(1):34–49. DOI:10.1016/j.camwa.2018.09.010.
9. **Faghih Shojaeri M., Ansari R.** Variational differential quadrature: a technique to simplify numerical analysis of structures. Applied Mathematical Modeling. 2017; (49):705–738. DOI:10.1016/j.apm.2017.02.052.
10. **Deng J., Guasch O., Maxit L., Zheng L.** Vibration of cylindrical shells with embedded annular acoustic black holes using the Rayleigh-Ritz method with Gaussian basis functions. Mechanical Systems and Signal Processing. 2021; (150):107225. DOI:10.1016/j.ymsp.2020.107225.
11. **Wang J., Li Z.L., Yu W.** Structural similitude for the geometric nonlinear buckling of stiffened orthotropic shallow spherical shells by energy approach. Thin-Walled Structures. 2019; (138):430–457. DOI:10.1016/j.tws.2018.02.006.
12. **Chai Y., Song Z., Li F.** Investigations on the aerothermoelastic properties of composite laminated cylindrical shells with elastic boundaries in supersonic airflow based on the Rayleigh–Ritz method. Aerospace Science and Technology. 2018; (82–83):534–544. DOI:10.1016/j.ast.2018.09.040.
13. **Li H., Pang F., Gao C., Huo R.** Jacobi–Ritz method for dynamic analysis of laminated composite shallow shells with general elastic restraints. Composite Structures. 2020; (242):112091. DOI:10.1016/j.compstruct.2020.112091.
14. **Fazzolari F.A., Carrera E.** Refined hierarchical kinematics quasi-3D Ritz models for free vibration analysis of doubly curved FGM shells and sandwich shells with FGM core. Journal of Sound and Vibration. 2014; 333(5):1485–1508. DOI:10.1016/j.jsv.2013.10.030.
15. **Karpov V.V.** Prochnost' i ustoychivost' podkrepennykh obolochek vrashcheniya. V 2 ch. Ch. 2. Vychislitel'nyy eksperiment pri staticheskom mekhanicheskom vozdeystvii [Strength and stability of

- the reinforced shells of rotation. In 2 parts. Pt 2. Computational experiment with static mechanical impact]. Moscow: Fizmatlit; 2010: 248.
16. **Weinan E., Yu B.** The deep Ritz method: a deep learning-based numerical algorithm for solving variational problems. *Communications in Mathematics and Statistics*. 2018; 6(1):1–12. DOI:10.48550/arXiv.1710.00211.
  17. **Semenov A.A., Zgoda Yu.N.** Visualization of the stress — strain state of shell structures using virtual and augmented reality technologies. *Proceedings of the 30th International Conference on Computer Graphics and Machine Vision (GraphiCon 2020)*. Pt 2. 2020: 13-1–13-12. Available at: <http://ceur-ws.org/Vol-2744/paper13.pdf>.
  18. **Karpov V.V.** Models of the shells having ribs, reinforcement plates and cutouts. *International Journal of Solids and Structures*. 2018; (146):117–135. DOI:10.1016/j.ijsolstr.2018.03.024.
  19. **Nickolls J., Buck I., Garland M., Skadron K.** Scalable parallel programming with CUDA: is CUDA the parallel programming model that application developers have been waiting for? *Queue*. 2008; 6(2):40–53. DOI:10.1145/1365490.1365500.
  20. **Virtanen P., Gommers R., Oliphant T.E. et al.** SciPy 1.0: fundamental algorithms for scientific computing in Python. *Nature Methods*. Nature Publishing Group; 2020; 17(3):261–272. DOI:10.1038/s41592-019-0686-2.
  21. **Lam S.K., Pitrou A., Seibert S.** Numba: a LLVM-based Python JIT compiler. *Proceedings of the Second Workshop on the LLVM Compiler Infrastructure in HPC*. Association for Computing Machinery; 2015: 1–6. DOI:10.1145/2833157.2833162.