

Расчет вертикальной силы тяжести из решения вспомогательной краевой задачи и вычисления поверхностного интеграла

П. Н. ВАБИЩЕВИЧ^{1,2,3,*}, Д. Х. ИВАНОВ^{2,3}

¹Институт проблем безопасного развития атомной энергетики РАН, 115191, Москва, Россия

²Северо-Восточный федеральный университет им. М.К. Аммосова, 677000, Якутск, Россия

³ЯО РНОМЦ “Дальневосточный центр математических исследований”, 677000, Якутск, Россия

*Контактный автор: Вабищевич Петр Николаевич, e-mail: vab@ibrae.ac.ru

Поступила 26 мая 2021 г., доработана 11 октября 2021 г., принята в печать 8 ноября 2021 г.

Предложен численный метод определения вертикальной силы тяжести рудного тела. Метод состоит из двух процедур: решения вспомогательной краевой задачи для уравнения Пуассона в ограниченной области с граничным условием третьего рода и вычисления поверхностного интеграла по границе этой области. Вычислительная реализация базируется на применении метода конечных элементов для численного решения вспомогательной краевой задачи и квадратурной формулы для вычисления поверхностного интеграла. Исследуется влияние параметра, входящего в граничное условие третьего рода, порядка конечных элементов и размера расчетной области на точность решения прямой задачи гравиметрии. Приведены численные результаты для модельной задачи с однородным рудным телом в форме прямоугольного параллелепипеда.

Ключевые слова: гравитационный потенциал, сила тяжести, уравнение Пуассона, метод конечных элементов, квадратурная формула.

Цитирование: Вабищевич П.Н., Иванов Д.Х. Расчет вертикальной силы тяжести из решения вспомогательной краевой задачи и вычисления поверхностного интеграла. Вычислительные технологии. 2022; 27(1):21–38. DOI:10.25743/ICT.2022.27.1.003.

Введение

В гравиметрии качественная интерпретация гравитационных аномалий нуждается в эффективном вычислении силы тяжести заданного плотного тела. Прямая задача гравиметрии кроме определения силы тяжести также включает определение гравитационного потенциала и производных высокого порядка [1]. Необходимость разработки и исследования более новых математических подходов для решения задач гравиметрии обусловлена увеличением количества и качества данных измерений, а также развитием современных вычислительных технологий и увеличением мощностей вычислительных систем.

Традиционный способ решения прямой задачи гравиметрии основан на вычислении объемных интегралов с помощью аналитических [2–4] или кубатурных формул [5, 6]. Для вычисления интегралов также применяется преобразование Фурье [7–9]. Более перспективный подход к определению гравитационных данных основан на приближенном решении вспомогательной краевой задачи для уравнения Пуассона. В этом случае задача рассматривается в ограниченной области, а на ее границе ставится граничное условие, аппроксимирующее поведение гравитационного потенциала или его производных на удалении. Для решения краевой задачи применяются следующие наиболее популярные численные методы: метод конечных разностей [10], метод конечных объемов [11, 12], метод конечных элементов [12–17] и метод спектральных элементов [18–20]. В таком подходе большое внимание уделяется проблеме выбора аппроксимирующего граничного условия, размера и дискретизации расчетной области [16, 21].

Традиционный способ вычисления гравитационных данных на основе применения аналитических или кубатурных формул имеет сложность $\mathcal{O}(N_D M)$, где N_D — количество узлов дискретизации области гравитирующего тела $D \subset \mathbb{R}^3$, M — количество точек наблюдения. Сложность метода на основе решения краевой задачи для уравнения Пуассона зависит от выбранного решателя системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Оптимальным решателем является многосеточный метод с оценкой сложности $\mathcal{O}(N_\Omega)$, где N_Ω — количество узлов дискретизации расчетной ограниченной области Ω ($D \subseteq \Omega \subset \mathbb{R}^3$) [22]. Для итерационного метода сопряженных градиентов с предобуславливателем в виде неполного разложения Холецкого сложность решения СЛАУ оценивается как $\mathcal{O}(N_\Omega^{4/3})$, а вычислительная сложность прямого метода равна $\mathcal{O}(N_\Omega^{5/3})$.

В данной работе используется метод на основе решения вспомогательной краевой задачи для уравнения Пуассона в области, включающей рудное тело. Использование третьей формулы Грина к решению вспомогательной краевой задачи приводит к эквивалентному определению гравитационного эффекта на основе вычисления поверхностного интеграла. Такой подход в двумерных задачах аксиально-симметричного магнито-гидродинамического равновесия плазмы в тороидальных системах предложен в работе [23]. Дву- и трехмерные прямые задачи грави- и магниторазведки рассмотрены в [24, 25]. В этих работах вспомогательная краевая задача дополняется однородным граничным условием первого рода. Для расчета гравитационных величин по всей расчетной области решается краевая задача с предварительно вычисленными данными на границе расчетной области по вспомогательному поверхностному потенциалу.

В настоящей работе для расчета вертикальной силы тяжести на отдаленной поверхности наблюдения (наблюдение на дневной поверхности) вспомогательная краевая задача рассматривается в произвольной области, объемлющей гравитирующее тело и необязательно включающей в себя область наблюдения. Новые возможности подхода обусловлены постановкой краевой задачи для уравнения Пуассона непосредственно для вертикальной силы тяжести с исключением дополнительных процедур, связанных с дифференцированием гравитационного потенциала, и использования однородного граничного условия третьего рода. Как отдельный метод такая постановка краевой задачи для вертикальной силы тяжести рассмотрена в работе [17] с применением различных граничных условий.

Вычислительную сложность предложенного подхода оцениваем величиной $\mathcal{O}(N) + \mathcal{O}(N^{2/3}M)$, где N — количество узлов дискретизации объемлющей области. Первое слагаемое характеризует сложность решения СЛАУ для вспомогательной краевой задачи оптимальным (многосеточным) методом, второе слагаемое $\mathcal{O}(N^{2/3}M)$ — сложность вы-

числения поверхностного интеграла, где количество узлов на границе расчетной сетки оценивается как $\mathcal{O}(N^{2/3})$.

В рамках вычислительного эксперимента для трехмерных тестовых задач исследуется влияние параметра, входящего в граничное условие третьего рода, размера расчетной области и порядка конечных элементов на точность расчета вертикальной силы тяжести на дневной поверхности. Также приводится анализ сходимости приближенного решения при уменьшении размера сетки. Вспомогательная краевая задача решается с использованием стандартного метода конечных элементов, а поверхностный интеграл вычисляется с применением квадратурной формулы Гаусса.

1. Постановка задачи

Гравитационный потенциал [26] трехмерного тела, заключенного в ограниченной области $D \subset \mathbb{R}^3$, с заданной плотностью $\rho(x, y, z)$ равен

$$U(P) = \gamma \int_D \frac{\rho(Q)}{r(P, Q)} dv, \quad P = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,$$

где $\gamma = 6.674 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3 \cdot \text{кг}^{-1} \cdot \text{с}^{-2}$ — гравитационная постоянная, $Q = (x', y', z')$ — точка интегрирования, $dv = dx' dy' dz'$ и

$$r(P, Q) = [(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{1/2}.$$

Градиент потенциала (сила тяжести) задается формулой

$$\mathbf{g} := \nabla U = \gamma \int_D \rho(Q) \nabla \frac{1}{r(P, Q)} dv. \quad (1)$$

Пусть $\mathbf{g} = (g_x, g_y, g_z)$, тогда g_x и g_y называются горизонтальными составляющими, а g_z — вертикальной составляющей силы тяжести.

Гравитационный потенциал удовлетворяет уравнению Пуассона

$$-\Delta U = 4\pi\gamma\rho(P), \quad P \in \mathbb{R}^3. \quad (2)$$

Плотность среды вне области рудного тела D считается равной нулю. Уравнение (2) дополняется условием (ограниченность решения)

$$\lim_{r(P, Q) \rightarrow \infty} U(P) = 0, \quad Q \in D. \quad (3)$$

Численный расчет силы тяжести \mathbf{g} базируется либо на прямом вычислении интегральных выражений (1), либо на решении краевой задачи (2), (3) с привлечением процедуры численного дифференцирования. Отметим также возможность нахождения выбранной составляющей силы тяжести из решения краевой задачи для уравнения Пуассона, полученного дифференцированием уравнения (2) по соответствующему направлению.

Пусть Ω , $D \subseteq \Omega$, — ограниченная область с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega$. Вспомогательная функция W определяется как решение краевой задачи

$$\begin{aligned} -\Delta W &= 4\pi\gamma\rho(P), \quad P \in \Omega, \\ \frac{\partial W}{\partial \mathbf{n}} + \alpha W &= 0, \quad P \in \partial\Omega, \end{aligned} \quad (4)$$

где \mathbf{n} — внешняя нормаль к границе $\partial\Omega$, α — постоянная величина, м^{-1} . В (2), (3) на границе области Ω задается произвольное граничное условие третьего рода, необязательно аппроксимирующее условие гравитационного потенциала на удалении.

Для функции $W(P)$ и фундаментального решения оператора Лапласа (функции Грина в неограниченной области) $G(P, Q) = 1/r(P, Q)$ применение третьей формулы Грина [27] дает

$$\chi W(P) = \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial W}{\partial \mathbf{n}}(Q) G(P, Q) - W(Q) \frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}}(P, Q) \right) ds - \int_{\Omega} \Delta W(Q) G(P, Q) dv,$$

где число χ зависит от местоположения точки P и для гладкой границы

$$\chi = \begin{cases} 4\pi, & \text{если } P \in \Omega, \\ 2\pi, & \text{если } P \in \partial\Omega, \\ 0, & \text{если } P \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}. \end{cases}$$

Мы ограничимся случаем, когда область наблюдения Γ находится вне области Ω : $\Gamma \cap \Omega = \emptyset$. Тогда с учетом интегрального представления гравитационного потенциала U и граничного условия в краевой задаче (4) получим

$$- \int_{\partial\Omega} \left(\alpha W(Q) G(P, Q) + W(Q) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} G(P, Q) \right) ds + 4\pi U(P) = 0.$$

Таким образом, гравитационный потенциал находится из вычисления поверхностного интеграла

$$U(P) = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial\Omega} \left(\alpha W(Q) G(P, Q) + W(Q) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} G(P, Q) \right) ds. \quad (5)$$

При $\Gamma \cap \partial\Omega = \emptyset$ подынтегральная функция в формуле (5) непрерывна по обоим переменным. Поэтому компоненты силы тяжести можно определить на основе дифференцирования по соответствующему направлению. Например, для вертикальной составляющей силы тяжести (далее — просто вертикальная сила тяжести) имеем

$$g_z(P) = \frac{\partial U}{\partial z}(P) = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial\Omega} \left(\alpha W(Q) G_z(P, Q) + W(Q) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} G_z(P, Q) \right) ds, \quad (6)$$

где

$$G_z(P, Q) = \frac{\partial G}{\partial z}(P, Q) = -\frac{z - z'}{r^3(P, Q)}.$$

При расчете вертикальной силы тяжести g_z вспомогательную функцию можно определить как решение краевой задачи, полученной дифференцированием самого уравнения (2) по z . Для вспомогательной функции w решается задача

$$\begin{aligned} -\Delta w &= 4\pi\gamma \frac{\partial \rho}{\partial z}, & P \in \Omega. \\ \frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}} + \alpha w &= 0, & P \in \partial\Omega. \end{aligned} \quad (7)$$

Применение формулы Грина для точек вне области Ω дает

$$g_z(P) = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial\Omega} \left(\alpha w(Q) G(P, Q) + w(Q) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} G(P, Q) \right) ds. \quad (8)$$

2. Численная реализация

На базе вычислительной платформы FEniCS (<https://fenicsproject.org>) [28] разработано прикладное программное обеспечение для решения прямых задач гравиметрии. Решение вспомогательных краевых задач базируется на применении метода конечных элементов. Значения поверхностных интегралов вычисляются с привлечением стандартных квадратурных формул Гаусса.

2.1. Решение краевых задач

Для решения краевой задачи (4) или (7) в ограниченной области Ω применяется метод конечных элементов [29, 30]. Область Ω покрывается тетраэдральной сеткой, решение аппроксимируется лагранжевыми конечными элементами. Для простоты ограничимся описанием тривиального случая — использования кусочно-линейных базисных функций.

Пусть $V^h \subset H^1(\Omega)$ — гильбертово пространство лагранжевых конечных элементов первого порядка. Скалярное произведение и норма вводятся стандартным образом:

$$(u, v) = \int_{\Omega} uv dv, \quad \|u\| = (u, u)^{1/2} \quad \forall u, v \in V^h.$$

Введем дополнительное обозначение

$$(u, v)_{\partial\Omega} = \int_{\partial\Omega} uv ds.$$

Вместо краевой задачи (4) рассматривается вариационная формулировка с учетом граничного условия третьего рода:

$$(\nabla W, \nabla v) + \alpha(W, v)_{\partial\Omega} = 4\pi\gamma(\rho, v) \quad \forall v \in V^h. \quad (9)$$

Аналогично для краевой задачи (7) ставится вариационная задача с учетом обобщенной производной правой части:

$$(\nabla w, \nabla v) + \alpha(w, v)_{\partial\Omega} = -4\pi\gamma \left(\rho, \frac{\partial v}{\partial z} \right) \quad \forall v \in V^h. \quad (10)$$

Функции W и w аппроксимируются кусочно-линейными базисными функциями φ_i , $i = 1, 2, \dots, N$, определенными на элементах сетки:

$$W(P) = \sum_{i=1}^N W_i \varphi_i(P), \quad w(P) = \sum_{i=1}^N w_i \varphi_i(P).$$

Значения функции W_i в узлах сетки Q_i составляют вектор $\mathbf{W} = (W_i)$, аналогично $\mathbf{w} = (w_i)$. Кусочно-линейные базисные функции удовлетворяют условию

$$\varphi_i(Q_j) = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

В силу этого каждая из вариационных задач (9) и (10) сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений. В случае (9) получаем следующую систему:

$$A\mathbf{W} = \mathbf{B}. \quad (11)$$

Элементы матрицы A равны

$$A_{ij} = (\nabla\varphi_i, \nabla\varphi_j) + \alpha(\varphi_i, \varphi_j)_{\partial\Omega},$$

а для вектора \mathbf{B} имеем

$$B_i = 4\pi\gamma(\rho, \varphi_i).$$

При решении задачи (10) имеем

$$A\mathbf{w} = \mathbf{b}, \quad (12)$$

где используется та же матрица жесткости A , а компоненты вектора \mathbf{b} есть

$$b_i = -4\pi\gamma \left(\rho, \frac{\partial\varphi_i}{\partial z} \right).$$

Полученная матрица A является симметричной, положительно определенной и сильно разреженной. Для эффективного решения СЛАУ с такой матрицей разработаны специальные способы хранения и алгоритмы матрично-векторных произведений. При работе с FEniCS мы используем вычислительную библиотеку PETSc для решения СЛАУ.

2.2. Вычисление поверхностных интегралов

Пусть $P_i \in \Gamma$, $i = 1, 2, \dots, M$, — точки наблюдения в области Γ . Обозначим элементы сетки, соответствующие поверхности $\partial\Omega$, через f_j , $j = 1, 2, \dots, N_f$. В нашем случае f_j — одна из граней приграничного тетраэдра τ_j , представляет собой треугольник.

Вычисление поверхностных интегралов (6) и (8) основано на применении квадратурной формулы Гаусса. В каждом элементе f_j задаются квадратурные точки Q_k и веса θ_k , $k = 1, \dots, N_q$, соответствующие порядку d . Пусть для простоты треугольный элемент поверхности имеет вершины $(0, 0)$, $(1, 0)$ и $(0, 1)$. Узлы квадратурной формулы \tilde{Q}_k и веса $\tilde{\theta}_k$, $k = 1, 2, \dots, N_q$, при $d = 1$ есть [31]

$$N_q = 1, \quad \tilde{Q}_1 = (1/3, 1/3), \quad \tilde{\theta}_1 = 1/2.$$

Для $d = 2$ узлы и веса соответственно равны:

$$N_q = 3, \quad \tilde{Q}_1 = (1/6, 1/6), \quad \tilde{Q}_2 = (1/6, 2/3), \quad \tilde{Q}_3 = (2/3, 1/6), \quad \tilde{\theta}_1 = \tilde{\theta}_2 = \tilde{\theta}_3 = 1/6.$$

Рассмотрим случай, когда функции $G(P, Q)$ и $G_z(P, Q)$ приближаются полиномом степени n_p в приграничных тетраэдрах. Здесь производная по нормали вычисляется как скалярное произведение вектора нормали \mathbf{n} и градиента функции. Следовательно, формула (6) для вертикальной силы тяжести g_z имеет дискретный аналог

$$g_z(P_i; W) \approx \sum_{j=1}^{N_f} \sum_{k=1}^{N_q} \theta_k W(Q_k) (\alpha G_z(P_i, Q_k) + \mathbf{n}_j \cdot \nabla G_z(P_i, Q_k)), \quad i = 1, 2, \dots, M. \quad (13)$$

Внешняя нормаль элемента f_j обозначена через \mathbf{n}_j . Аналогично приближенно вычисляется поверхностный интеграл (8):

$$g_z(P_i; w) \approx \sum_{j=1}^{N_f} \sum_{k=1}^{N_q} \theta_k w(Q_k) (\alpha G(P_i, Q_k) + \mathbf{n}_j \cdot \nabla G(P_i, Q_k)), \quad i = 1, 2, \dots, M. \quad (14)$$

В более общем случае в отдельном элементе f_j можно выбрать разный порядок квадратурной формулы.

Рассмотрим случай, когда функции $G(P, Q)$ и $G_z(P, Q)$, а также их производные по нормали вычисляются аналитически. Градиент функции $G(P, Q)$, где $P = (x, y, z)$, $Q = (x', y', z')$, по второму аргументу равен

$$\nabla' G(P, Q) = \left(\frac{x - x'}{r^3}, \frac{y - y'}{r^3}, \frac{z - z'}{r^3} \right).$$

Следовательно, на каждой грани области Ω в форме прямоугольного параллелепипеда производная по нормали вычисляется так:

$$G_n(P, Q) := \frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}}(P, Q) = \begin{cases} \pm \frac{x - x'}{r^3}, & \text{если } \mathbf{n} = (\pm 1, 0, 0), \\ \pm \frac{y - y'}{r^3}, & \text{если } \mathbf{n} = (0, \pm 1, 0), \\ \pm \frac{z - z'}{r^3}, & \text{если } \mathbf{n} = (0, 0, \pm 1). \end{cases}$$

Градиент для функции $G_z(P, Q)$ равен

$$\nabla' G_z(P, Q) = \left(-3 \frac{(x - x')(z - z')}{r^5}, -3 \frac{(y - y')(z - z')}{r^5}, -3 \frac{(z - z')^2}{r^5} + \frac{1}{r^3} \right),$$

и поэтому

$$G_{zn}(P, Q) := \frac{\partial G_z}{\partial \mathbf{n}}(P, Q) = \begin{cases} \mp 3 \frac{(x - x')(z - z')}{r^5}, & \text{если } \mathbf{n} = (\pm 1, 0, 0), \\ \mp 3 \frac{(y - y')(z - z')}{r^5}, & \text{если } \mathbf{n} = (0, \pm 1, 0), \\ \mp 3 \frac{(z - z')^2}{r^5} \pm \frac{1}{r^3}, & \text{если } \mathbf{n} = (0, 0, \pm 1). \end{cases}$$

При решении задачи (9) для поверхностного интеграла получим

$$g_z(P_i; W) \approx \sum_{j=1}^{N_f} \sum_{k=1}^{N_q} \theta_k^j W(Q_k^j) (\alpha G_z(P_i, Q_k^j) + G_{zn}(P_i, Q_k^j)), \quad i = 1, 2, \dots, M, \quad (15)$$

а для задачи (10) —

$$g_z(P_i; w) \approx \sum_{j=1}^{N_f} \sum_{k=1}^{N_q} \theta_k^j w(Q_k^j) (\alpha G(P_i, Q_k^j) + G_n(P_i, Q_k^j)), \quad i = 1, 2, \dots, M. \quad (16)$$

Таким образом, для вычисления вертикальной силы тяжести имеем четыре варианта.

Вариант 1.1:

- найти вспомогательную функцию W из (11);
- вычислить g_z с помощью (13).

Вариант 1.2:

- найти вспомогательную функцию W из (11);
- вычислить g_z с помощью (15).

Вариант 2.1:

- найти вспомогательную функцию w из (12);
- вычислить g_z с помощью (14).

Вариант 2.2:

- найти вспомогательную функцию w из (12);
- вычислить g_z с помощью (16).

3. Численный эксперимент

В тестовой задаче рудное тело D заключено в прямоугольную призму с размерами 1, 1 и 0.5 км. Система координат совпадает с главными осями призмы, ось z направлена вниз. Область наблюдения Γ представляет собой горизонтальную площадь $[-1, 1] \times [-1, 1]$ км на высоте $H = 1$ км от начала координат.

В качестве расчетной области Ω возьмем саму область рудного тела D , $\Omega = D$. Дискретизация области представляет собой структурированную сетку из тетраэдров, для этого каждая из сторон призмы разбивается на интервалы с шагом $h = 1/12$ км, $N = 1183$. Точки наблюдения $P_i \in \Gamma$, $i = 1, 2, \dots, M = 625$ являются узлами равномерной сетки, построенной в Γ с шагом $h_x = h_y = 1/12$ км.

Исследуется влияние параметра α (размерность км^{-1}) в граничном условии третьего рода на точность аппроксимации для каждого варианта алгоритма. Будем измерять время t_s решения системы линейных алгебраических уравнений, а также время t_a вычисления поверхностного интеграла. При расчете вертикальной силы тяжести в точках наблюдения оцениваются относительные ошибки

$$\varepsilon_2 = \frac{\left(\sum_{i=1}^M |g_z(P_i) - g_z^E(P_i)|^2 \right)^{1/2}}{\left(\sum_{i=1}^M |g_z^E(P_i)|^2 \right)^{1/2}}, \quad \varepsilon_\infty = \frac{\max_{i=1, M} |g_z(P_i) - g_z^E(P_i)|}{\max_{i=1, M} |g_z^E(P_i)|}, \quad (17)$$

где g_z^E — точное аналитическое решение из [32], которое представлено на рис. 1.

В табл. 1 приведены ошибки (17) для варианта 1.1. Порядок квадратурной формулы выбирается таким же, как порядок полинома: $d = n_p = 1$ и $d = n_p = 2$. Время решения СЛАУ (11) равно $t_s = 5.81 \cdot 10^{-3}$ с. При малых значениях параметра α требуется высокий порядок полинома для вычисления градиента функции Грина с учетом большого вклада второго слагаемого в подынтегральном выражении (6). Среднее время расчета наблюдаемых данных равно 0.77 с для $d = n_p = 1$ и 1.07 с для $d = n_p = 2$.

В табл. 2 приведены ошибки аппроксимации при использовании варианта 1.2. При вычислении интеграла используется квадратурная формула порядка $d = 1, 2$. Среднее время вычисления с помощью квадратурной формулы первого порядка равно 1.00 с, второго порядка — 1.22 с.

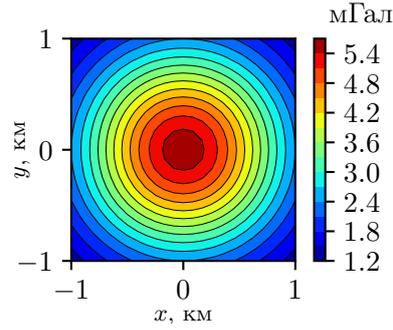


Рис. 1. Точное решение в области наблюдения Γ , $1 \text{ мГал} = 0.00001 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$
 Fig. 1. Exact solution in the observation area Γ , $1 \text{ mGal} = 0.00001 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

Т а б л и ц а 1. Ошибка приближения g_z при использовании варианта 1.1, %
 Table 1. Approximation error of g_z for the variant 1.1, %

α	$d = n_p = 1$		$d = n_p = 2$	
	ε_2	ε_∞	ε_2	ε_∞
1e-06	8.098e+06	1.083e+07	1.427e+05	2.328e+05
1e-04	8.098e+04	1.083e+05	1.427e+03	2.328e+03
1e-02	8.102e+02	1.085e+03	1.426e+01	2.327e+01
1e+00	8.395e+00	1.188e+01	1.520e-01	2.108e-01
1e+02	1.392e-01	2.347e-01	1.492e-01	2.579e-01
1e+04	1.694e-01	2.263e-01	1.557e-01	2.742e-01
1e+06	1.700e-01	2.272e-01	1.557e-01	2.744e-01

На рис. 2 изображена погрешность решения $\delta = g_z - g_z^E$ для варианта 1.1 и варианта 1.2 при $\alpha = 10^{-4}$, 1 и 10^4 . Показаны результаты для квадратурной формулы второго порядка.

В табл. 3 приведены ошибки приближения g_z при использовании варианта 2.1. Время решения СЛАУ (12) в среднем равно $5.74 \cdot 10^{-3}$ с. Среднее время расчета наблюдаемых данных равно 0.62 с для $d = n_p = 1$ и 0.77 с — для $d = n_p = 2$. Сравнение с табл. 1 показывает, что при малых значениях параметра α мы имеем относительно хороший результат.

Т а б л и ц а 2. Ошибка приближения g_z при использовании варианта 1.2, %
 Table 2. Approximation error of g_z for the variant 1.2, %

α	$d = 1$		$d = 2$	
	ε_2	ε_∞	ε_2	ε_∞
1e-06	8.834e+04	1.428e+05	2.376e+01	4.481e+01
1e-04	8.835e+02	1.428e+03	2.803e-01	5.463e-01
1e-02	8.869e+00	1.437e+01	1.050e-01	1.600e-01
1e+00	1.582e-01	2.759e-01	1.102e-01	1.641e-01
1e+02	1.345e-01	2.122e-01	1.509e-01	2.623e-01
1e+04	1.363e-01	2.098e-01	1.558e-01	2.744e-01
1e+06	1.364e-01	2.098e-01	1.558e-01	2.746e-01

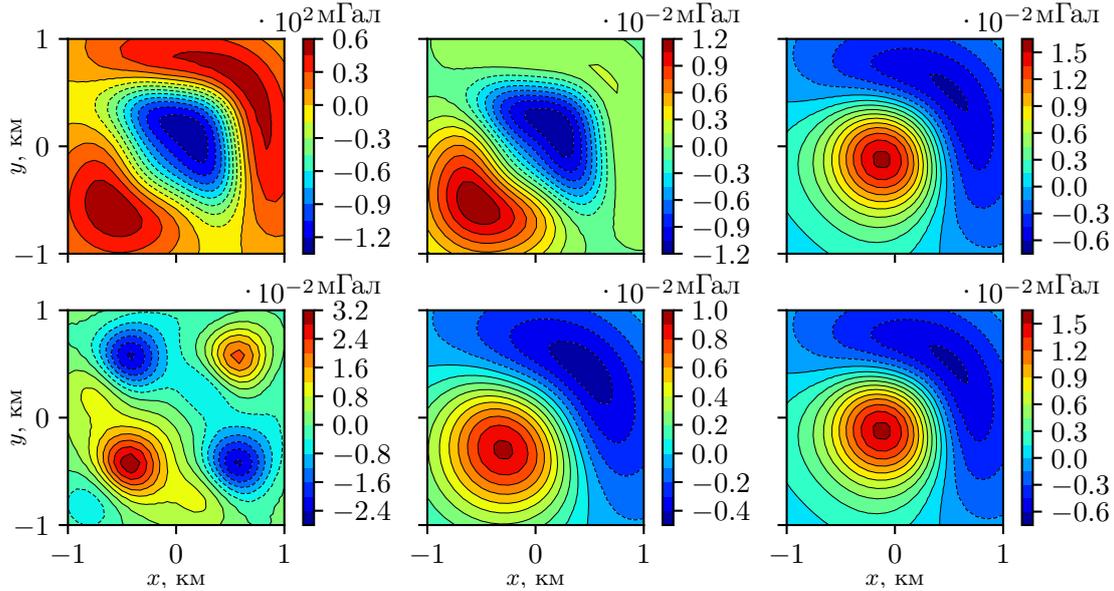


Рис. 2. Ошибка δ аппроксимации g_z в области наблюдения Γ для варианта 1.1 (сверху) и варианта 1.2 (снизу), $d = 2$. Левый столбец — $\alpha = 10^{-4}$, средний столбец — $\alpha = 1$, правый столбец — $\alpha = 10^4$

Fig. 2. Approximation error δ of g_z in the observation area Γ for the variant 1.1 (on the top) and for variant 1.2 (on the bottom), $d = 2$. Left column: $\alpha = 10^{-4}$, middle column: $\alpha = 1$, right column: $\alpha = 10^4$

В табл. 4 приведены результаты при использовании варианта 2.2. Среднее время расчета g_z в точках наблюдения равно 1.02 и 1.14 с соответственно.

Погрешность δ при решении вспомогательной задачи (10) изображена на рис. 3 при значениях параметра α : 10^{-4} , 1, 10^4 — для квадратурной формулы второго порядка. Как видно, оба варианта алгоритма на основе решения вспомогательной краевой задачи для вертикальной силы тяжести показывают относительно хороший результат.

Рассмотрим конечные элементы второго порядка для решения вариационной задачи (10). В этом случае количество неизвестных увеличивается до 8125 и СЛАУ (12) прямым методом решается за 0.28 с. Результаты расчетов для разных значений параметра α содержатся в табл. 5. Сравнивая полученные результаты с данными табл. 3 и 4, видим, что точность вспомогательной функции при малых параметрах α слабо влияет

Т а б л и ц а 3. Ошибка приближения g_z при использовании варианта 2.1, %
Table 3. Approximation error of g_z for the variant 2.1, %

α	$d = n_p = 1$		$d = n_p = 2$	
	ε_2	ε_∞	ε_2	ε_∞
1e-06	2.932e+00	4.343e+00	2.137e-01	3.011e-01
1e-04	2.932e+00	4.343e+00	2.137e-01	3.011e-01
1e-02	2.924e+00	4.333e+00	2.133e-01	3.008e-01
1e+00	2.343e+00	3.562e+00	1.852e-01	2.805e-01
1e+02	5.257e-01	7.058e-01	2.425e-02	3.639e-02
1e+04	4.443e-01	5.486e-01	7.257e-03	9.828e-03
1e+06	4.435e-01	5.471e-01	7.075e-03	9.553e-03

Т а б л и ц а 4. Ошибка приближения g_z при использовании варианта 2.2, %
 Table 4. Approximation error of g_z for the variant 2.2, %

α	$d = 1$		$d = 2$	
	ε_2	ε_∞	ε_2	ε_∞
1e-06	1.473e-01	2.462e-01	4.839e-05	8.173e-05
1e-04	1.472e-01	2.461e-01	4.442e-05	7.346e-05
1e-02	1.451e-01	2.430e-01	6.059e-04	1.012e-03
1e+00	7.340e-02	7.847e-02	4.067e-02	6.797e-02
1e+02	3.056e-01	2.829e-01	1.921e-02	2.407e-02
1e+04	2.986e-01	2.730e-01	7.302e-03	9.967e-03
1e+06	2.985e-01	2.728e-01	7.168e-03	9.826e-03

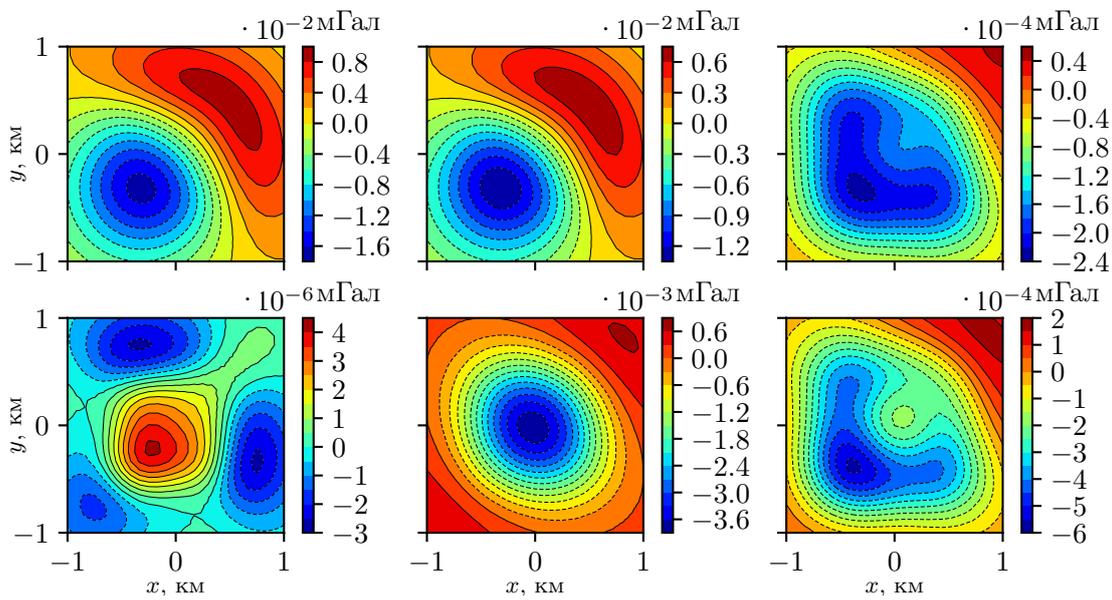


Рис. 3. Ошибка δ аппроксимации g_z в области наблюдения Γ для варианта 2.1 (сверху) и варианта 2.2 (снизу), $d = 2$. Левый столбец — $\alpha = 10^{-4}$, средний столбец — $\alpha = 1$, правый столбец — $\alpha = 10^4$

Fig. 3. Approximation error δ of g_z in the observation area Γ for the variant 2.1 (on the top) and for variant 2.2 (on the bottom), $d = 2$. Left column: $\alpha = 10^{-4}$, middle column: $\alpha = 1$, right column: $\alpha = 10^4$

на точность приближения вертикальной силы тяжести. При больших значениях параметра α относительная квадратичная ошибка уменьшилась в 1.9 раза, а относительная абсолютная ошибка — в 2.4 раза.

Исследовалась сходимость варианта алгоритма 2.2 при использовании вспомогательной функции w и аналитического представления функции $G(P, Q)$. Для этого рассматривалась серия дискретизаций расчетной области $\Omega = D$ с уменьшением шага h : 1/6, 1/12, 1/24, 1/48, 1/96, 1/144 км. Во всех случаях для решения системы линейных алгебраических уравнений выбирался итерационный метод сопряженных градиентов cg с многосеточным предобусловливателем `petsc_amg`. Итерации прерывались при достижении относительной ошибки 10^{-8} .

Т а б л и ц а 5. Ошибка приближения g_z на основе решения вспомогательной краевой задачи (10) конечными элементами второго порядка, %

Table 5. Error for approximation of g_z based for the solution of the auxiliary boundary value problem (10) by quadratic finite elements, %

α	Вариант 2.1, $n_p = d = 2$		Вариант 2.2, $d = 2$	
	ε_2	ε_∞	ε_2	ε_∞
1e-06	2.137e-01	3.011e-01	4.843e-05	8.182e-05
1e-04	2.137e-01	3.011e-01	4.843e-05	8.181e-05
1e-02	2.130e-01	3.002e-01	4.813e-05	8.107e-05
1e+00	1.649e-01	2.365e-01	1.158e-04	1.372e-04
1e+02	9.572e-03	1.511e-02	1.998e-03	2.289e-03
1e+04	3.726e-03	4.066e-03	3.765e-03	4.151e-03
1e+06	3.730e-03	3.972e-03	3.808e-03	4.197e-03

В табл. 6 представлены данные о времени расчета краевой задачи и количестве итераций. Приводится также время расчета поверхностного интеграла с применением квадратурных формул первого и второго порядков ($d = 1, 2$). При меньшем значении параметра α требуется больше итераций для решения системы линейных алгебраических уравнений выбранным методом. Сходимость метода иллюстрируется на рис. 4 для трех значений параметра α : 10^{-4} , 10^0 , 10^4 . При использовании квадратичной формулы первого порядка ($d = 1$) ошибки имеют второй порядок сходимости независимо от

Т а б л и ц а 6. Результаты расчета для варианта 2.2 при различных шагах h дискретизации области $\Omega = D$: t_s — время решения СЛАУ, K — количество итераций, t_a — время вычисления поверхностного интеграла с квадратурной формулой порядка d

Table 6. Results of calculations for the variant 2.2 for various discretization steps h in the domain $\Omega = D$: t_s is the SLAE solution time, K is the iterations, t_a is the time for evaluating the surface integral using a quadrature formula of the order d

α	h	t_s, c	K	$t_a, c, d = 1$	$t_a, c, d = 2$
1e-04	1/6	7.87e-04	5	0.89	0.92
	1/12	3.95e-03	7	1.00	1.12
	1/24	3.28e-02	10	1.45	1.95
	1/48	4.06e-01	16	3.22	5.14
	1/96	4.94e+00	25	10.33	17.78
	1/144	2.18e+01	32	23.17	40.02
1e+00	1/6	6.79e-04	5	0.92	0.97
	1/12	3.47e-03	5	0.99	1.14
	1/24	3.09e-02	10	1.45	1.94
	1/48	3.38e-01	13	3.24	5.14
	1/96	4.32e+00	21	10.37	17.87
	1/144	1.88e+01	27	23.04	39.81
1e+04	1/6	7.34e-04	6	0.93	0.94
	1/12	3.69e-03	6	0.99	1.12
	1/24	2.54e-02	9	1.45	1.95
	1/48	2.87e-01	10	3.23	5.13
	1/96	3.38e+00	15	10.32	17.77
	1/144	1.41e+00	19	22.96	39.50

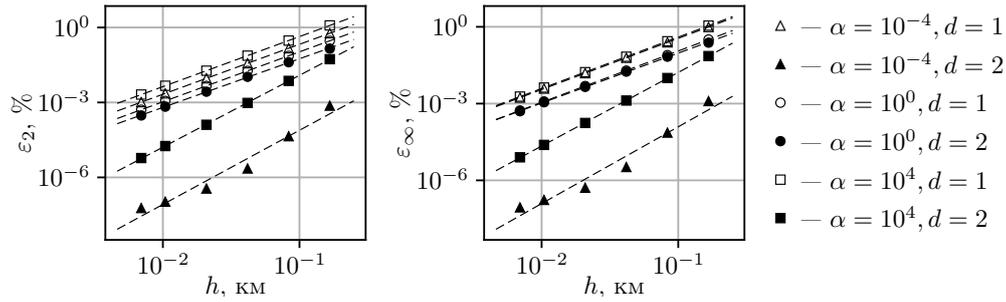


Рис. 4. Сходимость квадратичной ошибки (слева), сходимость абсолютной ошибки (справа) аппроксимации вертикальной силы тяжести для варианта 2.2. Штриховая линия соответствует линейной аппроксимации

Fig. 4. Convergence of quadratic (left) and absolute (right) errors for the approximated vertical gravity force for the variant 2.2. Dashed line represents line of the the best fit

параметра α . Для квадратурной формулы второго порядка ($d = 2$) порядок сходимости зависит от параметра α . Для $\alpha = 1$ порядок сходимости примерно равен 2, для $\alpha = 10^4$ — 3, а для $\alpha = 10^{-4}$ порядок сходимости меняется по мере уменьшения шага сетки, имея в среднем порядок 3.

Приведем также результаты по влиянию размера расчетной области для варианта 2.2. Рассматриваются следующие расчетные области:

$$\Omega_l = [-a - l\hat{h}, a + l\hat{h}] \times [-b - l\hat{h}, b + l\hat{h}] \times [-c - l\hat{h}, c + l\hat{h}], \quad l = 1, 2, 3, 4,$$

где $a = 0.5$ км, $b = 0.5$ км, $c = 0.25$ км — половины сторон рудного тела, $\hat{h} = 1/6$ км.

На рис. 5 представлены ошибки аппроксимации вертикальной силы тяжести для каждой области с шагом сетки $h = 1/12$ км для некоторых значений параметра α . Также приводятся результаты для области $\Omega_0 = D$. В целом наблюдается достаточно хорошая аппроксимация вертикальной силы тяжести при использовании всех областей. Заметно небольшое ухудшение точности при увеличении размера области. Аналогичные исследования на сходимость показали, что во всех областях ошибка метода имеет второй порядок сходимости по обеим нормам.

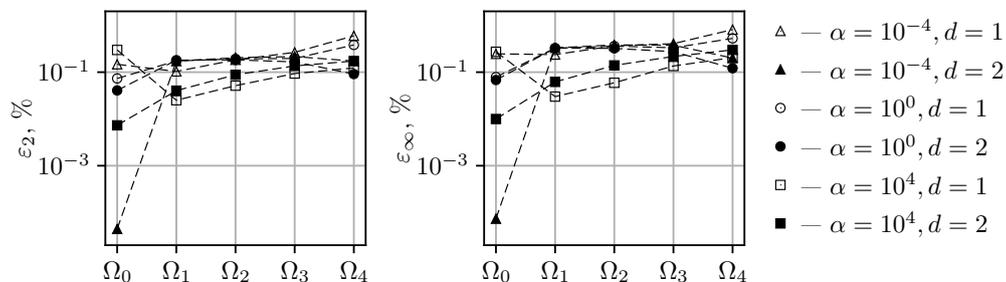


Рис. 5. Ошибка аппроксимации вертикальной силы тяжести с помощью варианта 2.2 для каждой расчетной области Ω_l , $l = 1, 2, 3, 4$: ε_2 (слева), ε_∞ (справа)

Fig. 5. Approximation error of the vertical gravity by using the variant 2.2. for each computational domain Ω_l , $l = 1, 2, 3, 4$. Left: ε_2 , right: ε_∞

Заключение

Рассмотрен численный метод решения прямой задачи гравиметрии на основе решения вспомогательной краевой задачи и вычисления поверхностного интеграла. Вспомогательная краевая задача с граничным условием третьего рода ставилась в ограниченной расчетной области для гравитационного потенциала или непосредственно для вертикальной силы тяжести. Вычисление поверхностного интеграла по границе расчетной области базировалось на применении квадратурной формулы Гаусса. Для этого рассмотрены два подхода приближения функции Грина для оператора Лапласа в неограниченной области и ее производных: полиномиальное и аналитическое.

Проведен анализ влияния параметра α в граничном условии третьего рода на точность метода. Расчеты показали, что метод на основе решения вспомогательной краевой задачи для вертикальной силы тяжести с большим значением параметра α и аналитическим представлением функции Грина для расчета поверхностного интеграла является наиболее эффективным методом приближения вертикальной силы тяжести. Численный анализ на последовательности сгущающихся сеток показал, что точность приближенного решения имеет второй порядок.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 20-01-00207), Правительства РФ (грант № 14.Y26.31.0013) и Минобрнауки РФ (соглашение от 31.05.2021 г. № 075-02-2021-1396).

Список литературы

- [1] **Gupta H.** Encyclopedia of solid earth geophysics. Dordrecht: Springer Science & Business Media; 2011: 1613.
- [2] **D’Urso M.** Analytical computation of gravity effects for polyhedral bodies. Journal of Geodesy. 2014; 88(1):13–29.
- [3] **Nagy D., Papp G., Benedek J.** The gravitational potential and its derivatives for the prism. Journal of Geodesy. 2000; 74(7–8):552–560.
- [4] **Tsoulis D.** Analytical computation of the full gravity tensor of a homogeneous arbitrarily shaped polyhedral source using line integrals. Geophysics. 2012; 77(2):F1–F11.
- [5] **Martin R., Chevrot S., Komatitsch D., Seoane L., Spangenberg H., Wang Y., Dufréchou G., Bonvalot S., Bruinsma S.** A high-order 3-D spectral-element method for the forward modelling and inversion of gravimetric data — Application to the Western Pyrenees. Geophysical Journal International. 2017; 209(1):406–424.
- [6] **Ren Z., Tang J., Kalscheuer T., Maurer H.** Fast 3-D large-scale gravity and magnetic modeling using unstructured grids and an adaptive multilevel fast multipole method. Journal of Geophysical Research: Solid Earth. 2017; 122(1):79–109.
- [7] **Dai S., Zhao D., Wang S., Xiong B., Zhang Q., Li K., Chen L., Chen Q.** Three-dimensional numerical modelling of gravity and magnetic anomaly in a mixed space-wave number domain. Geophysics. 2019; 84(4):G41–G54.
- [8] **Wu L.** Fourier-domain modelling of gravity effects caused by polyhedral bodies. Journal of Geodesy. 2019; 93(5):635–653.
- [9] **Zhao G.** High-accuracy 3D Fourier forward modelling of gravity field based on the Gauss-FFT technique. Journal of Applied Geophysics. 2018; (150):294–303.

- [10] **Farquharson C., Mosher C.** Three-dimensional modelling of gravity data using finite differences. *Journal of Applied Geophysics*. 2009; 68(3):417–422.
- [11] **Haber E., Holtham E., Davis K.** Large-scale inversion of gravity gradiometry with differential equations. *SEG Technical Program Expanded Abstracts 2014*. Society of Exploration Geophysicists; 2014: 1302–1307.
- [12] **Jahandari H., Farquharson C.** Forward modelling of gravity data using finite-volume and finite-element methods on unstructured grids. *Geophysics*. 2013; 78(3):G69–G80.
- [13] **Butler S., Sinha G.** Forward modelling of applied geophysics methods using Comsol and comparison with analytical and laboratory analog models. *Computers & Geosciences*. 2012; (42):168–176.
- [14] **Cai Y., Wang C.-Y.** Fast finite-element calculation of gravity anomaly in complex geological regions. *Geophysical Journal International*. 2005; 162(3):696–708.
- [15] **Maag E., Capriotti J., Li Y.** 3D gravity inversion using the finite element method. *SEG Technical Program Expanded Abstracts 2017*. Society of Exploration Geophysicists; 2017: 1713–1717. DOI:10.1190/segam2017-17682714.1. Available at: https://www.researchgate.net/publication/319166732_3D_gravity_inversion_using_the_finite_element_method.
- [16] **May D., Knepley M.** Optimal, scalable forward models for computing gravity anomalies. *Geophysical Journal International*. 2011; 187(1):161–177.
- [17] **Ivanov D., Vabishchevich P.** Numerical solution of a boundary value problem with effective boundary conditions for calculation of gravity. *Mathematical Notes of NEFU*. 2021; 28(1):93–113.
- [18] **Gharti H., Tromp J.** A spectral-infinite-element solution of Poisson’s equation: An application to self gravity. Preprint 1706.00855. arXiv. 2017. Available at: https://scholar.google.com/citations?view_op=view_citation&hl=ru&user=5kLrzjcAAAAJ&citation_for_view=5kLrzjcAAAAJ:NXb4pA-qfm4C.
- [19] **Gharti H., Tromp J., Zampini S.** Spectral-infinite-element simulations of gravity anomalies. *Geophysical Journal International*. 2018; 215(2):1098–1117.
- [20] **Haji T., Faramarzi A., Metje N., Chapman D., Rahimzadeh F.** Development of an infinite element boundary to model gravity for subsurface civil engineering applications. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*. 2020; 44(3):418–431.
- [21] **Haji T., Faramarzi A., Metje N., Chapman D., Rahimzadeh F.** Challenges associated with finite element methods for forward modelling of unbounded gravity fields. *UK Association for Computational Mechanics Conference*. 2019; (16):1–4.
- [22] **Saad Y.** Iterative methods for sparse linear systems. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics; 2003: 537.
- [23] **Lackner K.** Computation of ideal MHD equilibria. *Computer Physics Communications*. 1976; 12(1):33–44.
- [24] **Вабищевич П.Н., Пулатов П.А.** Экономичные разностные методы решения прямых задач грави- и магниторазведки. *Известия АН СССР. Физика Земли*. 1983; (10):68–76.
- [25] **Вабищевич П.Н., Пулатов П.А.** Численное решение прямых трехмерных задач гравиразведки. *Геология и геофизика*. 1984; (3):123–127.
- [26] **Blakely R.** Potential theory in gravity and magnetic applications. N.Y.: Cambridge University Press; 1996: 460.

- [27] **Тихонов А.Н., Самарский А.А.** Уравнения математической физики: Учебное пособие, 6-е изд., испр. и доп. М.: Издательство МГУ; 1999: 766.
- [28] **Logg A., Mardal K.-A., Wells G.** Automated solution of differential equations by the finite element method. Springer, Heidelberg; 2012: 720. DOI:10.1007/978-3-642-23099-8.
- [29] **Brenner S., Scott R.** The mathematical theory of finite element methods. Vol. 15. N.Y.: Springer Science & Business Media; 2008: 418.
- [30] **Ciarlet P.G.** The finite element method for elliptic problem. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics; 2002: 554.
- [31] **Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., Zhu J.Z.** The finite element method: Its basis and fundamentals. Oxford: Butterworth-Heinemann; 2013: 756.
- [32] **Nagy D.** The gravitational attraction of a right rectangular prism. Geophysics. 1966; 31(2):362–371.

Вычислительные технологии, 2022, том 27, № 1, с. 21–38. © ФИЦ ИВТ, 2022
Computational Technologies, 2022, vol. 27, no. 1, pp. 21–38. © FRC ICT, 2022

ISSN 1560-7534
eISSN 2313-691X

COMPUTATIONAL TECHNOLOGIES

DOI:10.25743/ICT.2022.27.1.003

Numerical computation of gravity force using solution of an auxiliary boundary value problem and the calculation of a surface integral

VABISHCHEVICH PETR N.^{1,2,3,*}, IVANOV DULUS KH.^{2,3}

¹Nuclear Safety Institute of RAS, Moscow, 115191, Russia

²North-Eastern Federal University, Yakutsk, 677000, Russia

³Yakutsk branch of the Regional Scientific and Educational Mathematical Center “Far Eastern Center of Mathematical Research”, Yakutsk, 677000, Russia

*Corresponding author: Vabishchevich Petr N., e-mail: vabpn@ibrae.ac.ru

Received May 26, 2020, revised October 11, 2021, accepted November 8, 2021.

Abstract

Purpose. We consider numerical calculation of the vertical component of the gravity force produced by the ore body using solution of an auxiliary boundary value problem (BVP) for the Poisson equation in a bounded domain.

Methodology. Auxiliary BVP can be posed according to the gravitational potential or the vertical gravity force itself supplied by a homogeneous Robin boundary condition. The use of Green’s third formula to the solution of the BVP leads to an equivalent definition of the vertical gravity force based on the calculation of the surface integral. The numerical solution of the auxiliary BVP is based on standard finite element method, the calculation of the surface integral relies on Gauss quadrature formula. In the surface integral, Green’s function for the Laplace operator in an unbounded domain is evaluated using a polynomial approximation or an analytical representation.

Findings. Numerical calculations of a model problem with a homogeneous prismatic body has shown that the method based on the solution of the auxiliary BVP for the vertical gravity force itself with a large value of the scalar parameter in the Robin boundary condition and analytical representation of the Green’s function in the surface integral is the most effective method for approximating the vertical gravity force. For this method, we obtained the second order convergence rate.

Originality/value. The considered auxiliary BVP with the Robin boundary condition allows obtaining a sufficiently good approximation of the vertical gravity force.

Keywords: gravitational potential, gravity, Poisson's equation, numerical modelling, finite element method, quadrature formula.

Citation: Vabishchevich P.N., Ivanov D.Kh. Numerical computation of gravity force using solution of an auxiliary boundary value problem and the calculation of a surface integral. Computational Technologies. 2022; 27(1):21–38. DOI:10.25743/ICT.2022.27.1.003. (In Russ.)

Acknowledgements. This research was supported by RFBR (grant No. 20-01-00207), Russian Government (grant № 14.Y26.31.0013) and the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (agreement No. 075-02-2021-1396, May 31, 2021).

References

1. **Gupta H.** Encyclopedia of solid earth geophysics. Dordrecht: Springer Science & Business Media; 2011: 1613.
2. **D'Urso M.** Analytical computation of gravity effects for polyhedral bodies. Journal of Geodesy. 2014; 88(1):13–29.
3. **Nagy D., Papp G., Benedek J.** The gravitational potential and its derivatives for the prism. Journal of Geodesy. 2000; 74(7–8):552–560.
4. **Tsouliis D.** Analytical computation of the full gravity tensor of a homogeneous arbitrarily shaped polyhedral source using line integrals. Geophysics. 2012; 77(2):F1–F11.
5. **Martin R., Chevrot S., Komatitsch D., Seoane L., Spangenberg H., Wang Y., Dufrechou G., Bonvalot S., Bruinsma S.** A high-order 3-D spectral-element method for the forward modelling and inversion of gravimetric data — Application to the Western Pyrenees. Geophysical Journal International. 2017; 209(1):406–424.
6. **Ren Z., Tang J., Kalscheuer T., Maurer H.** Fast 3-D large-scale gravity and magnetic modelling using unstructured grids and an adaptive multilevel fast multipole method. Journal of Geophysical Research: Solid Earth. 2017; 122(1):79–109.
7. **Dai S., Zhao D., Wang S., Xiong B., Zhang Q., Li K., Chen L., Chen Q.** Three-dimensional numerical modelling of gravity and magnetic anomaly in a mixed space-wave number domain. Geophysics. 2019; 84(4):G41–G54.
8. **Wu L.** Fourier-domain modelling of gravity effects caused by polyhedral bodies. Journal of Geodesy. 2019; 93(5):635–653.
9. **Zhao G.** High-accuracy 3D Fourier forward modelling of gravity field based on the Gauss-FFT technique. Journal of Applied Geophysics. 2018; (150):294–303.
10. **Farquharson C., Mosher C.** Three-dimensional modelling of gravity data using finite differences. Journal of Applied Geophysics. 2009; 68(3):417–422.
11. **Haber E., Holtham E., Davis K.** Large-scale inversion of gravity gradiometry with differential equations. SEG Technical Program Expanded Abstracts 2014. Society of Exploration Geophysicists; 2014: 1302–1307.
12. **Jahandari H., Farquharson C.** Forward modelling of gravity data using finite-volume and finite-element methods on unstructured grids. Geophysics. 2013; 78(3):G69–G80.
13. **Butler S., Sinha G.** Forward modelling of applied geophysics methods using Comsol and comparison with analytical and laboratory analog models. Computers & Geosciences. 2012; (42):168–176.
14. **Cai Y., Wang C.-Y.** Fast finite-element calculation of gravity anomaly in complex geological regions. Geophysical Journal International. 2005; 162(3):696–708.
15. **Maag E., Capriotti J., Li Y.** 3D gravity inversion using the finite element method. SEG Technical Program Expanded Abstracts 2017. Society of Exploration Geophysicists; 2017: 1713–1717. DOI:10.1190/segam2017-17682714.1. Available at: https://www.researchgate.net/publication/319166732_3D_gravity_inversion_using_the_finite_element_method.
16. **May D., Knepley M.** Optimal, scalable forward models for computing gravity anomalies. Geophysical Journal International. 2011; 187(1):161–177.
17. **Ivanov D., Vabishchevich P.** Numerical solution of a boundary value problem with effective boundary conditions for calculation of gravity. Mathematical Notes of NEFU. 2021; 28(1):93–113.

18. **Gharti H., Tromp J.** A spectral-infinite-element solution of Poisson's equation: An application to self gravity. Preprint 1706.00855. arXiv. 2017. Available at: https://scholar.google.com/citations?view_op=view_citation&hl=ru&user=5kLrzjcAAAAJ&citation_for_view=5kLrzjcAAAAJ:Nxb4pA-qfm4C.
19. **Gharti H., Tromp J., Zampini S.** Spectral-infinite-element simulations of gravity anomalies. *Geophysical Journal International*. 2018; 215(2):1098–1117.
20. **Haji T., Faramarzi A., Metje N., Chapman D., Rahimzadeh F.** Development of an infinite element boundary to model gravity for subsurface civil engineering applications. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*. 2020; 44(3):418–431.
21. **Haji T., Faramarzi A., Metje N., Chapman D., Rahimzadeh F.** Challenges associated with finite element methods for forward modelling of unbounded gravity fields. *UK Association for Computational Mechanics Conference*. 2019; (16):1–4.
22. **Saad Y.** Iterative methods for sparse linear systems. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics; 2003: 537.
23. **Lackner K.** Computation of ideal MHD equilibria. *Computer Physics Communications*. 1976; 12(1):33–44.
24. **Vabishchevich P.N., Pulatov P.A.** Economical difference methods for solving direct problems in gravimetric and magnetic prospecting. *Izvestiya Akademii Nauk SSSR. Fizika Zemli, (USSR)*. 1983; (10):68–76. (In Russ.)
25. **Vabishchevich P.N., Pulatov P.A.** Numerical solution of direct three dimensional problems in gravimetric prospecting. *Russian Geology and Geophysics*. 1984; (3):123–127. (In Russ.)
26. **Blakely R.** Potential theory in gravity and magnetic applications. N.Y.: Cambridge University Press; 1996: 460.
27. **Tikhonov A.N., Samarskii A.A.** *Uravneniya matematicheskoy fiziki: Uchebnoe posobie, 6-e izd., ispr. i dop.* [Equations of mathematical physics: textbook, 6th ed., corrected]. Moscow: Izdatel'stvo MGU; 1999: 766. (In Russ.)
28. **Logg A., Mardal K.-A., Wells G.** Automated solution of differential equations by the finite element method. Springer, Heidelberg; 2012: 720. DOI:10.1007/978-3-642-23099-8.
29. **Brenner S., Scott R.** The mathematical theory of finite element methods. Vol. 15. N.Y.: Springer Science & Business Media; 2008: 418.
30. **Ciarlet P.G.** The finite element method for elliptic problem. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics; 2002: 554.
31. **Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., Zhu J.Z.** The finite element method: Its basis and fundamentals. Oxford: Butterworth-Heinemann; 2013: 756.
32. **Nagy D.** The gravitational attraction of a right rectangular prism. *Geophysics*. 1966; 31(2):362–371.