

TVD-СХЕМА НА ПОДВИЖНОЙ АДАПТИВНОЙ СЕТКЕ*

В. Б. БАРАХНИН, В. Б. КАРАМЫШЕВ

Институт вычислительных технологий СО РАН

Новосибирск, Россия

e-mail: bar@net.ict.nsc.ru, kary@net.ict.nsc.ru

Н. В. БОРОДКИН

Новосибирский государственный университет, Россия

A second order approximation scheme for dynamically adaptive grids which is the generalization of Harten scheme is presented. We expose the conditions which guarantee that the scheme is TVD. The conditions which are sufficient to ensure that this scheme is TVD have been studied. The numerical tests of the scheme and the comparison of its characteristics with that of the explicit predictor-corrector scheme with self-adjusting approximate viscosity have been conducted.

В последние годы при численном решении задач механики жидкостей и газов широко применяются подвижные сетки, адаптирующиеся к особенностям течения. Это позволяет получать результаты высокой точности при сравнительно небольших затратах машинных ресурсов. Однако для использования динамически адаптивных сеток аппроксимируемые уравнения необходимо записывать в подвижной системе координат, что неизбежно приводит к усложнению их вида.

Недостатком конечно-разностных схем, имеющих порядок аппроксимации выше первого, является осциллирующее поведение численного решения в областях резких изменений производных и локальных экстремумов искомым функций. Существует несколько подходов к монотонизации конечно-разностных схем. Один из них состоит в том, что в схему вводится искусственная вязкость (см., например, [5]). Преимуществом этого подхода является простота его реализации. Основной его недостаток заключается в том, что параметр, отвечающий за величину искусственной вязкости, подбирается опытным путем, при этом слишком большая вязкость приводит к уменьшению точности расчета и сглаживанию профилей решения. Ввиду сказанного искусственную вязкость желательно согласовывать со свойствами решения в тех или иных подобластях. Некоторые особенности применения на подвижных сетках явной схемы предиктор — корректор с автоматически настраиваемой аппроксимационной вязкостью описаны в работах [1, 6].

Другой подход к построению неосциллирующих алгоритмов заключается в использовании схем с шаблонами, перестраивающимися в зависимости от численного решения (TVD-,

*Работа выполнена при финансовой поддержке Программы интеграционных фундаментальных исследований СО РАН, проект №43, и Российского фонда фундаментальных исследований, гранты №96-01-00136, 97-01-00819.

© В. Б. Барахнин, В. Б. Карамышев, Н. В. Бородкин, 2000.

TVB-, ENO-схемы и др.). Эти схемы часто используются в последние годы для расчетов как на равномерных, так и на неравномерных сетках, однако их аккуратное обоснование проводится, как правило, для случая скалярного закона сохранения на равномерной сетке.

Подробный обзор публикаций по TVD- и другим монотонным схемам имеется в работе [4]. Из последних работ в этой области следует отметить статью [2], посвященную расчету двумерных течений газа методом TVD. В этой работе уравнения записаны в неподвижной системе координат (хотя и криволинейной), а переход от равномерной сетки к адаптивной осуществлен путем интерполяции решения с одной сетки на другую. Такой подход оправдан лишь при исследовании стационарных течений. Во многих нестационарных задачах построение новой сетки требуется на каждом шаге по времени, поэтому указанный алгоритм может привести к снижению точности. Для подобных задач представляет интерес разработка алгоритмов расчета на основе TVD-схем с использованием подвижных адаптивных сеток.

В настоящей статье нами предлагается монотонная схема второго порядка аппроксимации, являющаяся обобщением известной схемы Хартена [7] для случая скалярного закона сохранения, записанного в подвижной системе координат. Дано ее обоснование и проведено тестирование путем сравнения ее свойств со свойствами явной схемы предиктор — корректор с автоматически настраиваемой аппроксимационной вязкостью.

1. Исходные уравнения

Рассмотрим скалярный закон сохранения, описываемый уравнением вида

$$u_t + (f(u))_x = 0, \quad t > 0, \quad (1.1)$$

с начальным условием

$$u(x, 0) = \phi(x), \quad -\infty < x < \infty. \quad (1.2)$$

В недивергентной форме уравнение (1.1) можно записать как

$$u_t + a(u)u_x = 0, \quad (1.3)$$

где $a(u) = df/du$.

Если полная вариация начальной функции $\phi(x)$ ограничена, то полная вариация решения рассматриваемой задачи Коши не возрастает со временем [8], то есть для любых $t_2 > t_1 \geq 0$ имеет место неравенство

$$\text{TV}(u(x, t_2)) \leq \text{TV}(u(x, t_1)),$$

где

$$\text{TV}(u(x, t_j)) = \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{du(x, t_j)}{dx} \right| dx + \sum_i |[u]_i|, \quad (1.4)$$

$[u]_i$ — скачок функции $u(x, t_j)$ на разрыве в точке x_i .

Применение адаптивных сеток делает целесообразным переход к подвижной системе координат. Такой переход осуществляется посредством достаточно гладкого невырожденного преобразования координат

$$t = \tau, \quad x = x(q, \tau), \quad (1.5)$$

причем при фиксированном τ функция $x = x(q, \tau)$ монотонно возрастает по переменной q . Это преобразование переводит на каждом временном слое t_n равномерную сетку с длиной ячейки Δq , построенную в области пространственной переменной q , в неравномерную сетку в области пространственной переменной x . Совокупность узлов этих сеток обозначим соответственно $\{q_i\}$ и $\{x_i^n\}$.

Далее мы будем обозначать переменную времени в новых координатах по-прежнему через t . Тогда уравнение (1.1) примет вид

$$(uJ)_t + (f(u) - x_t u)_q = 0, \quad (1.6)$$

а его недивергентная форма

$$u_t + \frac{1}{J} \left[(f(u))_q - x_t u_q \right] = 0, \quad (1.7)$$

где $J = x_q$ — якобиан отображения (1.5). Очевидно, решение задачи Коши (1.6), (1.2) будет удовлетворять условию невозрастания полной вариации (1.4).

Рассмотрим в плоскости переменных (t, q) прямоугольник D с вершинами (t_n, q_j) , (t_n, q_{j+1}) , (t_{n+1}, q_{j+1}) и (t_{n+1}, q_j) . Будем полагать, что искомая функция u задана в полуцелых узлах пространственной сетки, и введем обозначение $u(t_m, q_{i+1/2}) = u_{i+1/2}^m$. Запишем разностный аналог закона сохранения в расчетной ячейке D в виде

$$(uJ)_{j+1/2}^{n+1} \Delta q - (uJ)_{j+1/2}^n \Delta q + \left(\hat{f}_{j+1} - (x_t)_{j+1}^n \hat{u}_{j+1} \right) \Delta t^n - \left(\hat{f}_j - (x_t)_j^n \hat{u}_j \right) \Delta t^n = 0. \quad (1.8)$$

Здесь $(x_t)_i^n = (x_i^{n+1} - x_i^n) / \Delta t^n$, $\Delta t^n = t_{n+1} - t_n$ (далее для краткости записи индекс n у величин $(x_t)_i^n$ и Δt^n будем опускать), \hat{u}_i, \hat{f}_i — аппроксимации функций u и $f(u)$ в узле сетке с номером i , от выбора которых зависит конкретный вид конечно-разностной схемы.

Следуя [7], будем называть (1.8) TVD-схемой, если

$$\text{TV}^h(u^{n+1}) \leq \text{TV}^h(u^n),$$

где

$$\text{TV}^h(u^m) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} |\Delta_i u^m|, \quad \Delta_i u^m = u_{i+1/2}^m - u_{i-1/2}^m.$$

2. Построение конечно-разностной схемы

Перейдем к получению конкретных конечно-разностных схем. Вначале построим схему с направленными разностями, имеющую первый порядок аппроксимации. Пусть в (1.8) используются аппроксимации вида

$$J_{i+1/2}^m = \frac{x_{i+1}^m - x_i^m}{\Delta q}, \quad \hat{u}_i = \frac{1}{2}(u_{i-1/2}^n + u_{i+1/2}^n), \quad (2.1)$$

и

$$\hat{f}_i = \frac{1}{2} \left(f(u_{i-1/2}^n) + f(u_{i+1/2}^n) - \frac{1}{\lambda} |\nu_i| \Delta_i u^n \right), \quad (2.2)$$

где $\lambda = \Delta t / \Delta q$, $\nu_i = \lambda(a_i - (x_t)_i)$, $\Delta_i u^n = u_{i+1/2}^n - u_{i-1/2}^n$,

$$a_i = \begin{cases} (f(u_{i+1/2}^n) - f(u_{i-1/2}^n)) / \Delta_i u^n, & \text{если } \Delta_i u^n \neq 0, \\ a(u_{i-1/2}^n), & \text{если } \Delta_i u^n = 0. \end{cases}$$

Заметим, что использование аппроксимации (2.1) влечет выполнение равенства

$$\begin{aligned} & -\hat{u}_{j+1}(x_{j+1}^{n+1} - x_{j+1}^n) + \hat{u}_j(x_j^{n+1} - x_j^n) = \\ & = -\frac{1}{2} \left((x_{j+1}^{n+1} - x_{j+1}^n) \Delta_{j+1} u^n + (x_j^{n+1} - x_j^n) \Delta_j u^n \right) - u_{j+1/2}^n \Delta_{j+1/2} x^{n+1} + u_{j+1/2}^n \Delta_{j+1/2} x^n. \end{aligned} \quad (2.3)$$

С учетом этого мы можем преобразовать (1.8) к виду

$$u_{j+1/2}^{n+1} = u_{j+1/2}^n - \frac{1}{2J_{j+1/2}^{n+1}} (|\nu_j| + \nu_j) \Delta_j u^n + \frac{1}{2J_{j+1/2}^{n+1}} (|\nu_{j+1}| - \nu_{j+1}) \Delta_{j+1} u^n$$

или

$$u_{j+1/2}^{n+1} = u_{j+1/2}^n - C_{-,j} \Delta_j u^n + C_{+,j+1} \Delta_{j+1} u^n, \quad (2.4)$$

где

$$C_{\pm,j} = \frac{1}{2J_{j\pm 1/2}^{n+1}} (|\nu_j| \mp \nu_j).$$

Как показано в [7], условием, достаточным для того, чтобы схема вида (2.4) была TVD-схемой, является выполнение неравенств

$$C_{-,j} \geq 0, \quad C_{+,j} \geq 0, \quad C_{-,j} + C_{+,j} \leq 1. \quad (2.5)$$

Введя обозначение

$$d_i^m = \min(J_{i-1/2}^m, J_{i+1/2}^m),$$

получим, что условия (2.5) выполняются, если

$$|\nu_j| \leq d_j^{n+1}. \quad (2.6)$$

Таким образом, при выполнении неравенства (2.6) схема (1.8), (2.1), (2.2) является TVD-схемой.

Рассмотрим построение для уравнения (1.6) разностной схемы второго порядка типа одношаговой схемы Лакса — Вендроффа (см., например, [9]). Разложим функцию uJ в ряд Тейлора по t на $n + 1$ -м слое относительно n -го слоя:

$$(uJ)_{j+1/2}^{n+1} = (uJ)_{j+1/2}^n + \Delta t ((uJ)_t)_{j+1/2}^n + \frac{\Delta t^2}{2} ((uJ)_{tt})_{j+1/2}^n + O(\Delta t^3). \quad (2.7)$$

Используя дифференциальные следствия уравнений (1.6) и (1.7), получим, что

$$(uJ)_t = -(f(u) - x_t u)_q = -(f(u))_q + (x_t u)_q$$

и

$$\begin{aligned} (uJ)_{tt} &= -((f(u) - x_t u)_t)_q = -((f(u))_u u_t - x_t u_t - x_{tt} u)_q = \\ &= \left((a(u) - x_t) \frac{1}{J} (f_q - x_t u_q) \right)_q + (x_{tt} u)_q. \end{aligned}$$

С учетом равенства

$$\left(x_t + \frac{\Delta t}{2} x_{tt} \right)_i^n = \frac{x_i^{n+1} - x_i^n}{\Delta t} + O(\Delta t^2)$$

имеем

$$\left(\Delta t x_t u + \frac{\Delta t^2}{2} x_{tt} u \right)_i^n = (x_i^{n+1} - x_i^n) \frac{u_{i-1/2}^n + u_{i+1/2}^n}{2} + O(\Delta t^3 + \Delta t \Delta q^2).$$

Тогда

$$\begin{aligned} & \Delta t ((uJ)_t)_{j+1/2}^n + \frac{\Delta t^2}{2} ((uJ)_{tt})_{j+1/2}^n = \\ & = -\Delta t \frac{f(u_{j+3/2}^n) - f(u_{j-1/2}^n)}{2\Delta q} + \frac{\Delta t}{\Delta q} \left((x_t)_{j+1} \frac{u_{j+3/2}^n + u_{j+1/2}^n}{2} - (x_t)_j \frac{u_{j+1/2}^n + u_{j-1/2}^n}{2} \right) + \\ & + \frac{\Delta t^2}{2\Delta q} \left[\frac{a_{j+1} - (x_t)_{j+1}}{J_{j+1}^n} \left(\frac{f(u_{j+3/2}^n) - f(u_{j+1/2}^n)}{\Delta q} - (x_t)_{j+1} \frac{u_{j+3/2}^n - u_{j+1/2}^n}{\Delta q} \right) - \right. \\ & \left. - \frac{a_j - (x_t)_j}{J_j^n} \left(\frac{f(u_{j+1/2}^n) - f(u_{j-1/2}^n)}{\Delta q} - (x_t)_j \frac{u_{j+1/2}^n - u_{j-1/2}^n}{\Delta q} \right) \right] + O(\Delta t^3 + \Delta q^3) \end{aligned}$$

(здесь и далее полагается $J_i^m = \frac{J_{i-1/2}^m + J_{i+1/2}^m}{2}$, $\Delta t = O(\Delta q)$). Отбрасывая члены порядка $O(\Delta t^3 + \Delta q^3)$, из разложения (2.7) получим одношаговую схему Лакса — Вендроффа для подвижных адаптивных сеток в форме (1.8), где $J_{i+1/2}^m$ и \hat{u}_i аппроксимируются согласно (2.1), а

$$\hat{f}_i = \frac{1}{2} \left(f(u_{i-1/2}^n) + f(u_{i+1/2}^n) - \frac{1}{\lambda J_i^n} (\nu_i)^2 \Delta_i u^n \right). \quad (2.8)$$

Очевидно, данная схема не удовлетворяет условию TVD.

Проведем монотонизацию полученной схемы. Как и выше, запишем \hat{u}_i согласно (2.1), а \hat{f}_i аппроксимируем следующим образом:

$$\hat{f}_i = \frac{1}{2} \left(f(u_{i-1/2}^n) + f(u_{i+1/2}^n) + \frac{1}{\lambda} (g_{i-1/2} + g_{i+1/2} - |\nu_i + \gamma_i| \Delta_i u^n) \right). \quad (2.9)$$

Здесь

$$\begin{aligned} g_{i+1/2} &= \begin{cases} s_{i+1} \min(|\tilde{g}_i|, |\tilde{g}_{i+1}|), & \text{если } \tilde{g}_i \tilde{g}_{i+1} \geq 0, \\ 0, & \text{если } \tilde{g}_i \tilde{g}_{i+1} \leq 0, \end{cases} \\ \tilde{g}_i &= \frac{1}{2} \left(|\nu_i| - \frac{1}{J_i^n} (\nu_i)^2 \right) \Delta_i u^n, \quad s_i = \text{sgn}(\tilde{g}_i), \quad \gamma_i = \frac{g_{i+1/2} - g_{i-1/2}}{\Delta_i u^n}. \end{aligned}$$

Докажем второй порядок аппроксимации полученной схемы. Для этого достаточно установить (см. [7]), что разность правых частей выражений (2.8) и (2.9) есть величина порядка $O(\Delta q^2)$, т. е.

$$g_{i-1/2} + g_{i+1/2} - \left(|\nu_i + \gamma_i| - \frac{1}{J_i^n} (\nu_i)^2 \right) \Delta_i u^n = O(\Delta q^2).$$

Последнее равенство можно переписать как

$$g_{i-1/2} + g_{i+1/2} + (|\nu_i| - |\nu_i + \gamma_i|) \Delta_i u^n = \left(|\nu_i| - \frac{1}{J_i^n} (\nu_i)^2 \right) \Delta_i u^n + O(\Delta q^2). \quad (2.10)$$

Используя методику работы [7], из определения $g_{i+1/2}$ легко получить, что

$$g_{i-1/2} = \tilde{g}_i + O(\Delta q^2), \quad g_{i+1/2} = \tilde{g}_i + O(\Delta q^2).$$

Отсюда сразу следует (2.10), поскольку

$$(|\nu_i| - |\nu_i + \gamma_i|)\Delta_i u^n \leq |\gamma_i \Delta_i u^n| = |g_{i+1/2} - g_{i-1/2}| = O(\Delta q^2).$$

Итак, мы показали, что схема (1.8), (2.1), (2.9) имеет второй порядок аппроксимации. Кроме того, так как числа $g_{i-1/2}$ и $g_{i+1/2}$ не могут иметь разные знаки, то

$$|g_{i+1/2} - g_{i-1/2}| \leq \max(|g_{i-1/2}|, |g_{i+1/2}|) \leq |\tilde{g}_i|$$

и

$$|\gamma_i| \leq |\tilde{g}_i|/|\Delta_i u^n| \leq \frac{1}{2} \left| |\nu_i| - \frac{1}{J_i^n} (\nu_i)^2 \right| \leq \frac{1}{2} |\nu_i| \left| 1 - \frac{1}{J_i^n} |\nu_i| \right|. \quad (2.11)$$

Используя тождество (2.3), запишем рассматриваемую схему в виде

$$\begin{aligned} u_{j+1/2}^{n+1} &= u_{j+1/2}^n - \frac{1}{2J_{j+1/2}^{n+1}} \left(|\nu_j + \gamma_j| + \nu_j + \frac{g_{j+1/2} - g_{j-1/2}}{\Delta_j u^n} \right) \Delta_j u^n + \\ &+ \frac{1}{2J_{j+1/2}^{n+1}} \left(|\nu_{j+1} + \gamma_{j+1}| - \nu_{j+1} - \frac{g_{j+3/2} - g_{j+1/2}}{\Delta_{j+1} u^n} \right) \Delta_{j+1} u^n, \end{aligned}$$

то есть

$$u_{j+1/2}^{n+1} = u_{j+1/2}^n - \frac{1}{2J_{j+1/2}^{n+1}} (|\nu_j^M| + \nu_j^M) \Delta_j u^n + \frac{1}{2J_{j+1/2}^{n+1}} (|\nu_{j+1}^M| - \nu_{j+1}^M) \Delta_{j+1} u^n,$$

где $\nu_i^M = \nu_i + \gamma_i$. Таким образом, рассматриваемая схема приведена к форме (2.4), причем в определении коэффициентов $C_{\pm, j}$ величины ν_j заменяются величинами ν_j^M . Ввиду этого схема (1.8), (2.1), (2.9) является TVD-схемой, если

$$|\nu_j^M| \leq d_j^{n+1}. \quad (2.12)$$

Используя неравенство (2.11), получим оценку

$$|\nu_j^M| \leq |\nu_j| + |\gamma_j| \leq |\nu_j| \left(1 + \frac{1}{2} \left| 1 - \frac{1}{J_j^n} |\nu_j| \right| \right).$$

Пусть

$$|\nu_j| \leq d_j^n$$

(на неподвижной сетке это условие эквивалентно условию (2.6) для базовой схемы (1.8), (2.1), (2.2)). Тогда имеет место неравенство

$$|\nu_j^M| \leq \frac{3}{2} |\nu_j|,$$

то есть (2.12) выполняется, если

$$|\nu_j| \leq \frac{2}{3} \min(d_j^n, d_j^{n+1}). \quad (2.13)$$

Неравенство (2.13) является достаточным условием того, чтобы схема (1.8), (2.1), (2.9) была TVD-схемой.

Замечание 1. Условие (2.13) можно переписать в виде

$$\frac{\Delta t}{(\Delta x)_j^{n+1/2}} |a_j - (x_t)_j| \leq \frac{2}{3}, \quad (2.14)$$

где $(\Delta x)_j^{n+1/2} = \min(x_j^n - x_{j-1}^n, x_{j+1}^n - x_j^n, x_j^{n+1} - x_{j-1}^{n+1}, x_{j+1}^{n+1} - x_j^{n+1})$.

Замечание 2. Для того, чтобы построенная схема была ϵ -схемой (т. е. удовлетворяла энтропийному неравенству), возможна ее регуляризация заменой в формуле (2.9) $|\nu_i + \gamma_i|$ на $Q(\nu_i + \gamma_i)$; а в определении \tilde{g}_i заменой $|\nu_i|$ на $Q(\nu_i)$, где

$$Q(z) = \begin{cases} \frac{z^2 + \epsilon^2}{2\epsilon}, & \text{если } |z| \leq \epsilon, \\ |z|, & \text{если } |z| > \epsilon, \end{cases}$$

ϵ — малый положительный параметр (см. [7]). При этом условие (2.13) остается в силе.

3. Тестирование алгоритма

Опишем численные эксперименты, демонстрирующие преимущества построенной схемы. В этих экспериментах для построения подвижных адаптивных сеток нами использовался модифицированный метод эквираспределения (см., например, [1, 6]). Сетка строилась путем решения конечно-разностного аналога уравнения

$$\frac{d}{dq}(w(x^n, t_n)x_q^{n+1}) = \beta\left(\frac{x^{n+1} - x^n}{\Delta t} - u^n\right). \quad (3.1)$$

Здесь

$$w = 1 + \alpha_0|u| + \alpha_1|u_x| - \quad (3.2)$$

управляющая функция, $\alpha_0, \alpha_1, \beta$ — неотрицательные параметры.

Несколько слов о практическом выборе величины Δt . Проблема состоит в том, что в оценку (2.14) входят значения $x_j^{n+1} - x_{j-1}^{n+1}$ и $x_{j+1}^{n+1} - x_j^{n+1}$, определяемые после выбора Δt . Поэтому, если первоначальный выбор Δt не привел к выполнению условия (2.14), то указанную величину следует уменьшить (например, в два раза), построить новую сетку $\{x_i^{n+1}\}$, вновь проверить выполнение условия (2.14) и т. д. При достаточно малых значениях Δt условие (2.14) будет выполнено, так как в расчетной области, являющейся компактом в пространстве (q, t) , функции $a(u)$ и x_t ограничены сверху, а значения $(\Delta x)^{n+1/2}$ при заданном числе узлов сетки N отделены от нуля снизу в силу невырожденности преобразования координат.

В описываемых ниже расчетах мы использовали более простой прием выбора Δt . Поскольку применяемый нами метод построения сеток не приводит к резкому изменению сетки на очередном слое по времени, в формуле (2.14) мы полагали $(\Delta x)_j^{n+1/2} = \min(x_j^n - x_{j-1}^n, x_{j+1}^n - x_j^n)$, а функция $(x_t)_j$ аппроксимировалась разностью назад, при этом Δt бралось с коэффициентом запаса, примерно равным 0.5. На практике это обеспечивало выполнение условия (2.14).

В качестве тестовых уравнений рассматривались уравнение переноса, для которого $f(u) = au$, $a = \text{const}$, и уравнение Хопфа, иногда называемое уравнением Бюргерса. В этом уравнении $f(u) = u^2/2$.

Для расчетов по уравнению переноса с параметром $a = 1/2$ были взята начальная функция вида

$$u(x, 0) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \leq x \leq x_1, \\ A_1 \sin^2(\omega_1(x - x_1)), & \text{если } x_1 \leq x \leq x_2, \\ A_1 \cos(\omega_2(x - x_2)), & \text{если } x_2 \leq x \leq x_3, \\ A_2(x - x_3)/(x_4 - x_3), & \text{если } x_3 \leq x \leq x_4, \\ A_2(x_5 - x)/(x_5 - x_4), & \text{если } x_4 \leq x \leq x_5, \\ 0, & \text{если } x_5 \leq x \leq 21, \end{cases}$$

где $\omega_2 = A_2/(A_1(x_4 - x_3))$, $x_2 = x_3 - 3\pi/(2\omega_2)$, $x_1 = x_2 - \pi/(2\omega_1)$. Выполнение этих условий обеспечивает существование производной начальной функции в точках x_1 , x_2 , x_3 . В расчетах полагалось $A_1 = 3/4$, $A_2 = 3/2$, $\omega_1 = 1/2$, $x_3 = 9$, $x_4 = 11$, $x_5 = 13$.

На рис. 1, *а* приведены графики точного и численного решения рассматриваемой задачи в момент времени $t = 11$. Видно, что решение, полученное по схеме (1.8), (2.1), (2.9), не осциллирует. На рис. 1, *б* изображены траектории узлов использованной в расчете подвижной адаптивной сетки с числом узлов $N = 33$, построенной при $\alpha_0 = 2.1$, $\alpha_1 = 0.15$, $\beta = 25$.

Для уравнения Хопфа проводилось сравнение свойств построенной схемы со свойствами явной схемой предиктор — корректор с автоматически настраиваемой аппроксимационной вязкостью [1, 6]. Были рассмотрены гладкое и разрывное решения уравнения Хопфа, взятые из [3]. Начальные данные для гладкого решения следующие:

$$u(x, 0) = a_1 + (a_2 - a_1) \exp[-(32/x)^2], \quad 0 < x < 256.$$

Точное решение этой задачи непрерывно и имеет вид

$$u(x, t) = u(z, 0),$$

где z есть решение нелинейного уравнения

$$x = z + u(z, 0)t \equiv z + (a_1 + (a_2 - a_1) \exp[-(32/z)^2])t.$$

В расчетах полагалось $a_1 = 0.5$, $a_2 = 1.5$.

На рис. 2 приведены графики точного и численных решений рассматриваемой задачи в момент времени $t = 120$. Численное решение на рис. 2, *а* получено по схеме (1.8), (2.1), (2.9); на рис. 2, *б* — по схеме с автоматически настраиваемой аппроксимационной вязкостью. На рис. 2, *в* изображены траектории узлов использованной в расчете по схеме (1.8), (2.1), (2.9) подвижной адаптивной сетки с числом узлов $N = 33$, построенной при $\alpha_0 = 0$, $\alpha_1 = 0.2$, $\beta = 5$.

Для разрывного решения начальные данные брались в виде

$$u(x, 0) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 \leq x \leq 2, \\ (8 - x)/6, & \text{если } 2 \leq x \leq 8, \\ 0, & \text{если } 8 \leq x \leq 16. \end{cases}$$

Точное решение при $0 < t < 6$ имеет вид

$$u(x, t) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 \leq x \leq 2 + t, \\ (8 - x)/(6 - t), & \text{если } 2 + t \leq x \leq 8, \\ 0, & \text{если } 8 \leq x \leq 16. \end{cases}$$

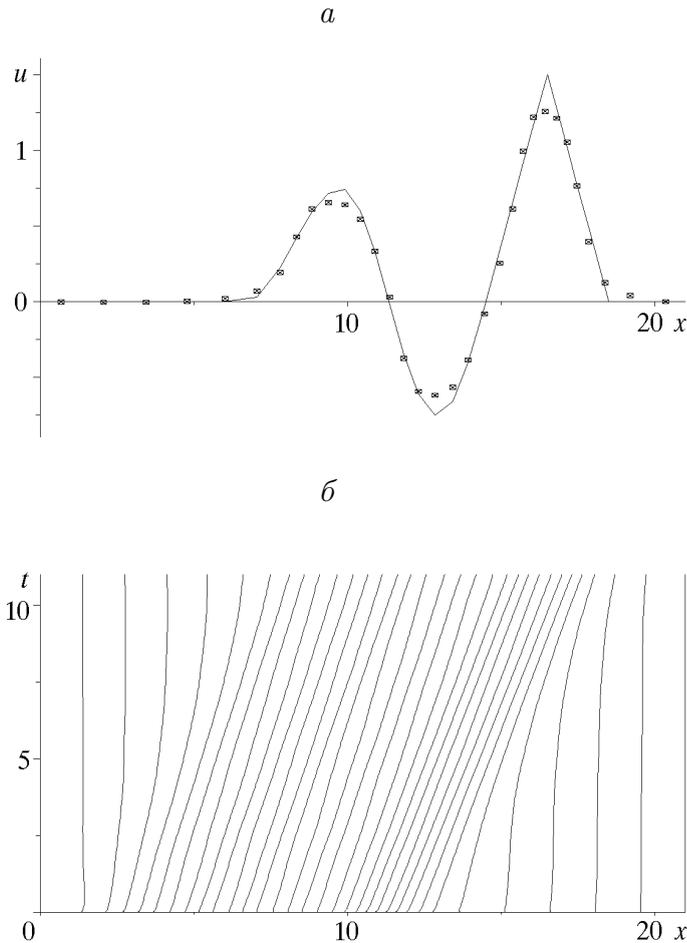


Рис. 1. Результаты расчетов для уравнения переноса.

В момент времени $t = 6$ происходит градиентная катастрофа. Если $t > 6$, то

$$u(x, t) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 \leq x < 5 + t/2, \\ 0, & \text{если } 5 + t/2 < x \leq 16, \end{cases}$$

т. е. при $t > 6$ решение разрывно.

На рис. 3 приведены графики точного и численных решений рассматриваемой задачи в момент времени $t = 12$. Численное решение на рис. 3, *a* получено по схеме (1.8), (2.1), (2.9); на рис. 3, *б* — по схеме с автоматически настраиваемой аппроксимационной вязкостью. На рис. 3, *в* изображены траектории узлов использованной в расчете по схеме (1.8), (2.1), (2.9) подвижной адаптивной сетки с числом узлов $N = 33$, построенной при $\alpha_0 = 0$, $\alpha_1 = 0.1$, $\beta = 5$.

4. Заключение

Таким образом, нами построена консервативная схема второго порядка аппроксимации для расчетов на подвижных адаптивных сетках. При выполнении неравенства (2.13) схема удовлетворяет условию TVD. Численные эксперименты показали, что построенная схема обеспечивает отсутствие осцилляций решения на разрыве и достаточно точно передает движущийся фронт волны.

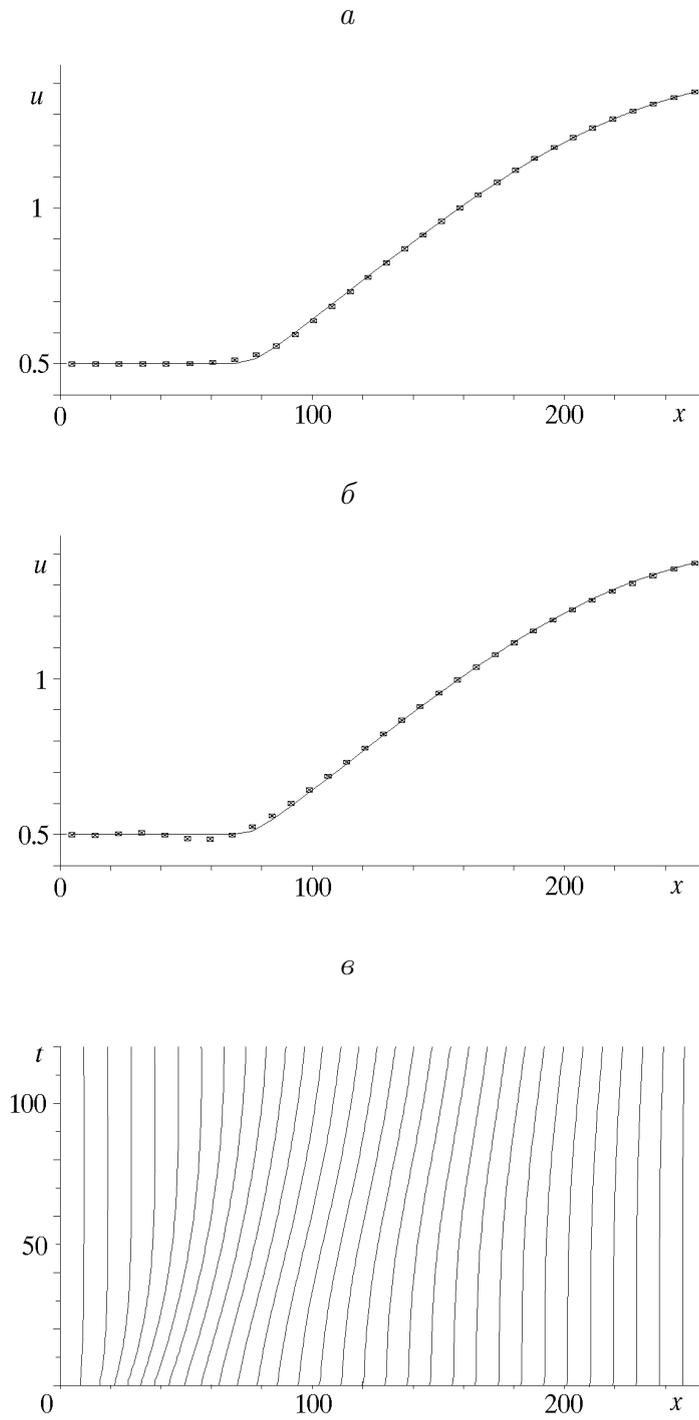


Рис. 2. Результаты расчетов для уравнения Хопфа (гладкое решение).

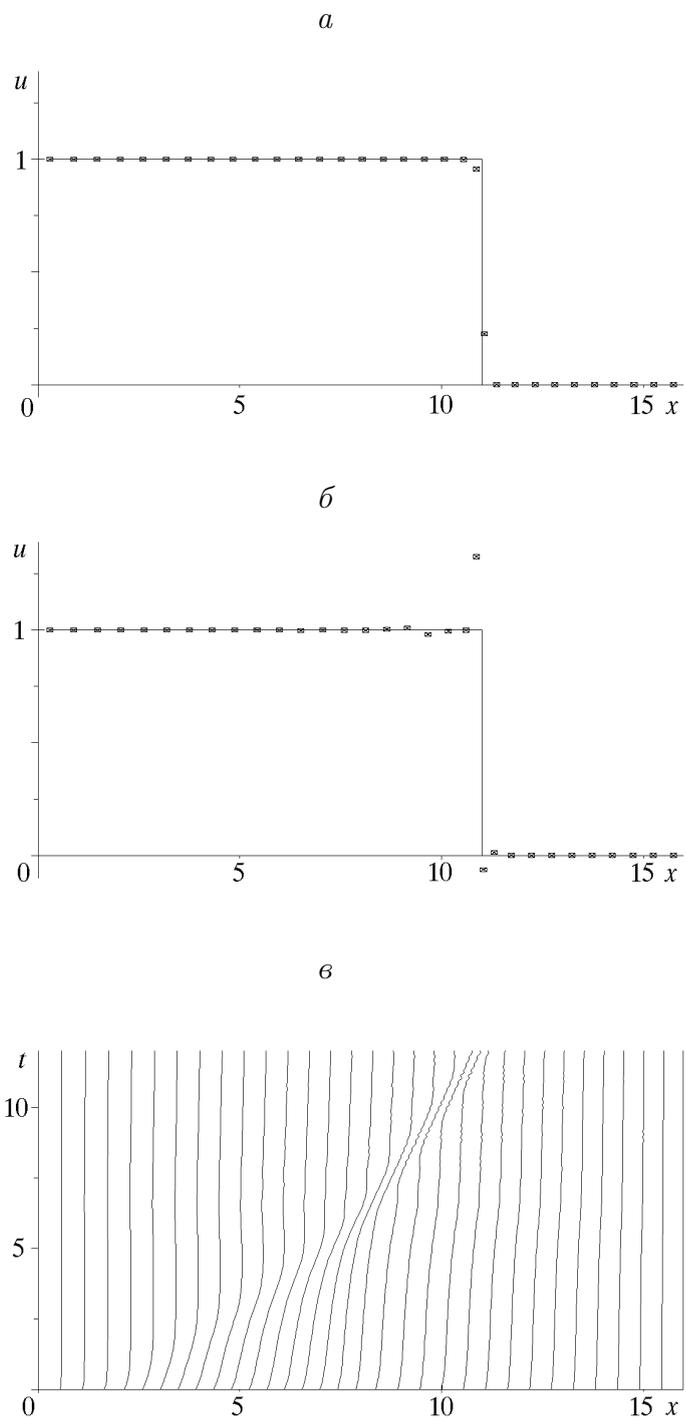


Рис. 3. Результаты расчетов для уравнения Хопфа (разрывное решение).

Авторы выражают глубокую признательность Г. С. Хакимзянову за ценные советы и замечания, позволившие улучшить статью.

Список литературы

- [1] БАРАХНИН В. Б. Конечно-разностные схемы для численного решения задач теории мелкой воды с использованием адаптивных сеток. В “*Вычислительные технологии*”. ИВТ СО РАН, Новосибирск, **4**, №11, 1995, 38–50.
- [2] ГИЛЬМАНОВ А. Н., КУЛАЧКОВА Н. А. Численное исследование двумерных течений газа со скачками методом TVD на физически адаптивных сетках. *Матем. моделирование*, **7**, №3, 1995, 97–107.
- [3] ГУЖЕВ Д. С., КАЛИТКИН Н. Н. Уравнение Бюргерса — тест для численных методов. *Там же*, **7**, №4, 1995, 99–127.
- [4] КАРАМЫШЕВ В. Б. *Монотонные схемы и их приложения в газовой динамике*. Новосибирский университет, Новосибирск, 1994.
- [5] РОЖДЕСТВЕНСКИЙ Б. Л., ЯНЕНКО Н. Н. *Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике*. Наука, М., 1978.
- [6] BARAKHNIN V. B., KHAKIMZYANOV G. S. On the application of adaptive grids to the numerical solution of one-dimensional problems in the shallow-water theory. *Russ. J. of Numer. Anal. and Math. Modelling*. **10**, No. 5, 1995, 373–391.
- [7] HARTEN A. High Resolution Schemes for Hyperbolic Conservation Laws. *J. of Comput. Phys.* **49**, No. 3, 1983, 357–393.
- [8] LAX P. D. Hyperbolic system of conservation laws and the mathematical theory of shock waves. *SIAM Regional Series on Appl. Math.*, No. 11, 1973.
- [9] LAX P. D., WENDROFF B. Difference schemes for hyperbolic equations with high order of accuracy. *Commun. Pure Appl. Math.* **17**, No. 3, 1964, 381–398.

Поступила в редакцию 23 декабря 1998 г.,
в переработанном виде 14 января 1999 г.