Вычислительные технологии, 2021, том 26, № 2, с. 72–87. © ФИЦ ИВТ, 2021 ISSN 1560-7534
Computational Technologies, 2021, vol. 26, no. 2, pp. 72–87. © FRC ICT, 2021 eISSN 2313-691X

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

DOI:10.25743/ICT.2021.26.2.006

О расщеплении для кубических сплайн-вейвлетов с четырьмя нулевыми моментами на отрезке

Б. М. Шумилов
Томский государственный архитектурно-строительный университет, 634003, Томск, Россия
Контактный автор: Шумилов Борис Михайлович, e-mail: sbm@tsuab.ru
Поступила 8 февраля 2021 г., доработана 9 марта 2021 г., принята в печать 16 марта 2021 г.

В пространстве кубических сплайнов построены вейвлеты, удовлетворяющие однородным граничным условиям Дирихле и обнулению первых четырех моментов. Получены неявные соотношения, связывающие сплайн-коэффициенты разложения на начальном уровне со сплайн-коэффициентами и вейвлет-коэффициентами на вложенном уровне ленточной системой линейных алгебраических уравнений с невырожденной матрицей. После расщепления на четные и нечетные уравнения матрица преобразования имеет пять (вместо трех в случае двух нулевых моментов) диагоналей. Доказано наличие строгого диагонального доминирования по столбцам. Для сравнения использованы вейвлеты с двумя нулевыми моментами и интерполяционные кубические сплайновые вейвлеты. Результаты численных экспериментов показывают, что схема с четырьмя нулевыми моментами точнее при аппроксимации функций, но грубее при аппроксимации второй производной.
Ключевые слова: B-сплайны, вейвлеты, неявные соотношения декомпозиции.

Цитирование: Шумилов Б.М. О расщеплении для кубических сплайн-вейвлетов с четырьмя нулевыми моментами на отрезке. Вычислительные технологии. 2021; 26(2):72–87. DOI:10.25743/ICT.2021.26.2.006.

Введение

Вейвлетом называется короткая или быстро затухающая волновая функция (всплеск), множество сжатий и смещений которой порождает пространство измеримых функций на всей числовой оси [1, 2]. Благодаря сжатию вейвлеты выявляют с разной степенью подробности различие в характеристиках измеренного сигнала, а за счет сдвига способны проанализировать свойства сигнала в разных точках на всем изучаемом интервале. При анализе нестационарных сигналов свойство локальности вейвлетов обеспечивает им преимущество перед преобразованием Фурье, которое дает только глобальные сведения о свойствах исследуемого сигнала, поскольку используемые при этом базисные функции (синусы и косинусы) имеют бесконечный носитель. При решении задач численного анализа, поскольку вейвлеты преобразуют систему базисных функций с распределенными параметрами в систему с сосредоточенными параметрами, такой базис оказывается более эффективным с точки зрения обусловленности и сходимости [3].

Основой для построения вейвлетов является наличие набора вложенных аппроксимирующих пространств $\ldots V_{L-1} \subset V_L \subset V_{L+1} \ldots$ таких, что каждая базисная функция в V_L может быть выражена в виде линейной комбинации базисных функций в V_{L+1}. В частности, таким свойством обладают сплайны — гладкие функции, склеенные из кусков многочленов степени m, на вложенной последовательности сеток.

Суть вейвлет-преобразования можно сформулировать следующим образом: оно позволяет разложить заданную функцию V_{L+1} на грубое приближенное представление V_L и локальные уточняющие подробности $W_L = V_{L+1} - V_L$. Процедура разделения на грубую версию и уточняющие детали может быть применена рекурсивно к самой этой части V_L. Следовательно, исходная функция может быть представлена в виде иерархии грубых версий V_L, V_{L-1}, ... и уточнений W_L, W_{L-1}, ... Подобный рекурсивный процесс называется прямым вейвлет-преобразованием (декомпозицией или анализом) [1, с. 46]. И обратно, функцию V_{L+1} можно восстановить из самого компактного представления (реконструкция). Более того, по значениям коэффициентов вейвлет-разложения можно судить о значимости соответствующих деталей уточнения. Незначимые детали удаляются с целью сжатия информации. Главное — найти удобный базис пространства W_L и обеспечить быстрые взаимно-однозначные формулы для выполнения прямого и обратного вейвлет-преобразований.

Существуют различные возможности построения базисных функций в пространстве W_L. Например, в качестве базисных функций в пространстве W_L можно использовать ортогональные вейвлеты [2, с. 103] — элементы пространства V_{L+1}, ортогональные как всем элементам пространства V_L, так и между собой, либо полуортогональные вейвлеты [2, с. 107] — элементы пространства V_{L+1}, ортогональные всем элементам пространства V_L, но не ортогональные между собой. В обоих случаях вейвлет-разложение обеспечивает наилучшее среднеквадратическое приближение сплайнов на густой сетке посредством сплайнов на прореженной сетке [4]. Разница между ортогональными и полуортогональными вейвлетами состоит в наличии либо отсутствии явных конечных формул разложения и, наоборот, в отсутствии либо наличии явных аналитических формул для вычисления вейвлетов. Единственный вейвлет, который в полной мере удовлетворяет всем перечисленным свойствам, — это вейвлет Хаара, недостатком которого является то, что он имеет разрывы в узлах, представляя собой элемент пространства сплайнов нулевой степени. Существуют и другие вейвлеты, для которых имеются явные конечные формулы разложения, это “ленивые” вейвлеты [2] и их обобщения в виде биортогональных вейвлетов [5]. Недостатком данных вейвлетов является то, что коэффициенты разложения равны значениям функции в некоторых узлах густой сетки либо вычисляются по локальным усредняющим формулам, т. е. информация для расчета каждого коэффициента используется не полностью. В свою очередь, интерполяционные сплайн-вейвлеты [6] вычисляются через решение интерполяционных задач на последовательности вложенных сеток, обеспечивая наилучшее среднеквадратическое приближение производной порядка $(m+1)/2$, однако значения функции при этом не подвергаются никакой фильтрации, представляя род прореживания данных. В отличие от этого, коэффициенты полуортогональных [2, с. 115] и неортогональных [7, с. 157] вейвлетов связаны системами линейных алгебраических уравнений, однако хорошая обусловленность систем не гарантирована.

В работах автора были рассмотрены неортогональные вейвлеты первой [8] и третьей [9] степени с двумя первыми нулевыми моментами, т. е. ортогональные многочленам первой степени, доказано существование конечных неявных соотношений разложения и обоснованы эффективные алгоритмы вейвлет-анализа на их основе. В настоящей работе изучается случай кубических неортогональных вейвлетов с четырьмя первыми нулевыми моментами, доказывается наличие строгого диагонального преобладания в расщепленной системе, представлены результаты численных экспериментов по сжатию данных и вычислению производных дискретно заданной функции.

1. Построение кубических сплайн-вейвлетов с нулевыми моментами на конечном отрезке

Пусть V_L — пространство кубических сплайнов гладкости C^2 на равномерной сетке узлов $\Delta^L : x_i = a + h \cdot i,\ i = 0, 1, \ldots, 2^L,\ h = (b-a)/2^L$, а функции $\varphi_3(v-i) \forall i$, где $v = (x-a)/h$, порождены сжатиями и сдвигами функции вида [10, с. 23]

$$\varphi_3(t) = \frac{1}{6} \sum_{j=0}^{4} \binom{4}{j} (-1)^j (t-j)_+^3, \quad 0 \le t \le 4,$$

где $t_+^n = (\max\{t, 0\})^n$. Известно, что эти функции порождают базис пространства сплайнов на бесконечно продолженной в обе стороны сетке и они удовлетворяют калибровочному соотношению [1, с. 154]:

$$\varphi_3(t) = \frac{1}{8} \sum_{k=0}^{4} \binom{4}{k} \varphi_3(2t-k). \tag{1}$$

К сожалению, для того чтобы построить базис пространства сплайнов на конечном отрезке $[a, b]$, функции $\varphi_3(v-i)$ не могут быть просто усечены при выходе за концы отрезка. Имеются два подхода к устранению возникшего затруднения: это введение дополнительных узлов справа и слева от концов отрезка [11] либо использование кратных узлов в точках a, b. В теории вейвлетов более популярен второй подход. Дополнительно будем накладывать на функции однородное условие Дирихле $f(a) = f(b) = 0$. Тогда левые краевые базисные функции имеют вид [12]

$$\varphi_{b1}(t) = \frac{7}{4} t_+^3 - \frac{9}{2} t_+^2 + 3 t_+^1 - 2(t-1)_+^3, \quad 0 \le t \le 2,$$

$$\varphi_{b2}(t) = \frac{3}{2} t_+^2 - \frac{11}{12} t_+^3 + \frac{3}{2}(t-1)_+^3 - \frac{3}{4}(t-2)_+^3, \quad 0 \le t \le 3,$$

и при этом удовлетворяются калибровочные соотношения

$$\varphi_{b1}(t) = \frac{1}{2}\varphi_{b1}(2t) + \frac{3}{4}\varphi_{b2}(2t) + \frac{3}{16}\varphi_3(2t), \tag{2}$$

$$\varphi_{b2}(t) = \frac{1}{4}\varphi_{b2}(2t) + \frac{11}{16}\varphi_3(2t) + \frac{1}{2}\varphi_3(2t-1) + \frac{1}{8}\varphi_3(2t-2). \tag{3}$$

На правом конце отрезка базисные функции зеркально отражают функции $\varphi_{b1}(t)$, $\varphi_{b2}(t)$. В результате для любой сетки Δ^L, $L \ge 2$, сплайн третьей степени с нулевыми краевыми условиями может быть представлен как

$$s^L(v) = c_{-2}^L \varphi_{b1}(v) + c_{-1}^L \varphi_{b2}(v) + \sum_{i=0}^{2^L-4} c_i^L \varphi_3(v-i) + c_{2^L-3}^L \varphi_{b2}(2^L - v) + \\ + c_{2^L-2}^L \varphi_{b1}(2^L - v),\ 0 \le v \le 2^L, \quad \mathrm{Dim}(V_L) = 2^L + 1, \tag{4}$$

где коэффициенты c_i^L $\forall i$ являются решением, например, интерполяционной задачи:

$$s^L(i) = f(x_i), \quad i = 1, 2, \ldots, 2^L - 1,$$

$$\left(s^L\right)'(i) = h \cdot f'(x_i), \quad i = 1, 2^L - 1.$$

Если сетка Δ^{L-1}, $L \geq 3$, получена из Δ^L посредством удаления каждого второго узла, то соответствующее пространство V_{L-1} с базисными функциями $\varphi_3(v/2 - i)$ $\forall i$, у которых носители в два раза больше по ширине и центры в четных узлах сетки Δ^L, вложено в V_L. Разность пространств V_L и V_{L-1} составляет пространство вейвлетов $W_{L-1} = V_L - V_{L-1}$. В случае однородных краевых условий в качестве базисных функций в пространстве W_{L-1} можно использовать кубические вейвлеты, ортогональные всем многочленам третьей степени [7, 12]:

$$\begin{aligned} w_3(t) &= \frac{1}{8}\sum_{k=0}^{4}(-1)^k \binom{4}{k} \varphi_3(2t - k), && (5) \\ w_{b1}(t) &= 6\varphi_{b1}(2t) - \frac{57}{5}\varphi_{b2}(2t) + \frac{919}{100}\varphi_3(2t) - \frac{116}{25}\varphi_3(2t-1) + \\ &\quad + \varphi_3(2t-2), && (6) \\ w_{b2}(t) &= \frac{7}{3}\varphi_{b2}(2t) - \frac{319}{60}\varphi_3(2t) + \frac{101}{15}\varphi_3(2t-1) - \\ &\quad - \frac{25}{6}\varphi_3(2t-2) + \varphi_3(2t-3). && (7) \end{aligned}$$

Они имеют носители

$$\operatorname{supp} w_3 = [0, 4], \quad \operatorname{supp} w_{b1} = [0, 3], \quad \operatorname{supp} w_{b2} = [0, 3.5],$$

и, соответственно, по четыре нулевых момента

$$\int_0^4 x^k w_3(x)dx = \int_0^3 x^k w_{b1}(x)dx = \int_0^{3.5} x^k w_{b2}(x)dx = 0,$$

для $k = 0, 1, 2, 3$.

Если центры носителей $w_3(v - i)$ располагаются в нечетных узлах $j = 5, 7, \ldots, 2^L - 5$, то $\mathrm{Dim}(W_{L-1}) = 2^{L-1}$. Тогда выполняется условие дополнения размерностей рассматриваемых пространств, т. е.

$$\mathrm{Dim}(V_L) = \mathrm{Dim}(V_{L-1}) + \mathrm{Dim}(W_{L-1}).$$

Построение определяющей системы уравнений. Запишем базисные сплайн-функции в виде однострочной матрицы:

$$\varphi^L(\cdot) = \left[\varphi_{b1}(\cdot), \varphi_{b2}(\cdot), \varphi_3(\cdot), \varphi_3(\cdot - 1), \ldots, \varphi_3(\cdot - 2^L + 4), \varphi_{b2}(2^L - \cdot), \varphi_{b1}(2^L - \cdot)\right].$$

Введя обозначение для вектора, состоящего из коэффициентов сплайна $\mathbf{c}^L = \left[c_{-2}^L, c_{-1}^L, c_0^L, \ldots, c_{2^L-3}^L, c_{2^L-2}^L\right]^T$, запишем формулу (4) в векторном виде

$$s^L(\cdot) = \varphi^L(\cdot)\mathbf{c}^L.$$

Точно так же можем записать базисные вейвлет-функции в виде матрицы-строки

$$\psi^{L-1}(\cdot) = \left[w_{b1}(\cdot), w_{b2}(\cdot), w_3(\cdot - 1), w_3(\cdot - 3), \ldots, w_3(\cdot - 2^L + 5), w_{b2}(2^L - \cdot), w_{b1}(2^L - \cdot)\right].$$

Соответствующие вейвлет-коэффициенты аппроксимации на уровне разложения L обозначим через

$$d_i^{L-1}, \quad i = -1, 0, \ldots, 2^{L-1} - 2,$$

и введем вектор-столбец

$$\mathbf{d}^{L-1} = \left[d_{-1}^{L-1}, d_0^{L-1}, \ldots, d_{2^{L-1}-2}^{L-1}\right]^T.$$

Поскольку пространства V_{L-1} и W_{L-1} по определению являются подпространствами V_L, можно представить функции $\varphi^{L-1}(\cdot)$ и $\psi^{L-1}(\cdot)$ в виде линейных комбинаций функций $\varphi^L(\cdot)$:

$$\varphi^{L-1}(\cdot) = \varphi^L(\cdot)P^L \text{ и } \psi^{L-1}(\cdot) = \varphi^L(\cdot)Q^L,$$

где столбцы матрицы P^L составлены из коэффициентов соотношений (1) и (2), (3), поскольку каждая широкая базисная функция в интервале аппроксимации может быть построена из пяти узких базисных функций, а каждая широкая базисная функция на концах интервала может быть построена из трех либо четырех узких базисных функций; элементы столбцов матрицы Q^L составлены из коэффициентов соотношений (5) и (6), (7).

Следовательно, имеет место цепочка равенств

$$\varphi^L(\cdot)\mathbf{c}^L = \varphi^{L-1}(\cdot)\mathbf{c}^{L-1} + \psi^{L-1}(\cdot)\mathbf{d}^{L-1} = \varphi^L(\cdot)P^L\mathbf{c}^{L-1} + \varphi^L(\cdot)Q^L\mathbf{d}^{L-1}. \tag{8}$$

Пусть известны коэффициенты $\mathbf{c}^{L-1}$ и $\mathbf{d}^{L-1}$. Тогда коэффициенты $\mathbf{c}^L$ могут быть получены из $\mathbf{c}^{L-1}$ и $\mathbf{d}^{L-1}$ как

$$\mathbf{c}^L = P^L\mathbf{c}^{L-1} + Q^L\mathbf{d}^{L-1}$$

или с использованием обозначений для блочных матриц:

$$\mathbf{c}^L = \left[P^L \mid Q^L\right] \left[\frac{\mathbf{c}^{L-1}}{\mathbf{d}^{L-1}}\right]. \tag{9}$$

В следующем примере показано, какой вид имеет блочная матрица $\left[P^L \mid Q^L\right]$ при $L = 3$ (случай пяти базисных сплайн-функций из V_2, четырех базовых вейвлетов из W_2 и девяти базисных функций из V_3 (см. (10)).

Обратный процесс разбиения коэффициентов $\mathbf{c}^L$ на более грубую версию $\mathbf{c}^{L-1}$ и уточняющие коэффициенты $\mathbf{d}^{L-1}$ состоит в решении системы линейных уравнений (9). Разрешимость полученной системы гарантирована линейной независимостью базисных функций. Для облегчения численного решения системы линейных уравнений (9), следуя [2], матрицу $\left[P^L \mid Q^L\right]$ можно сделать ленточной, изменив порядок неизвестных так, чтобы столбцы матриц P^L и Q^L перемежались. Однако, как видно из приведенного выше примера, полученная система уравнений не имеет диагонального преобладания, что может затруднить вейвлет-анализ данных большого размера.

$$
\left[P^3 \mid Q^3\right] = \left[\begin{array}{ccccc|cccc}
\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & -\frac{57}{5} & \frac{7}{3} & 0 & 0 \\
\frac{3}{16} & \frac{11}{16} & \frac{1}{8} & 0 & 0 & \frac{919}{100} & -\frac{319}{60} & 0 & 0 \\
0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{116}{25} & \frac{101}{15} & 1 & 0 \\
0 & \frac{1}{8} & \frac{3}{4} & \frac{1}{8} & 0 & 1 & -\frac{25}{6} & -\frac{25}{6} & 1 \\
0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 & \frac{101}{15} & -\frac{116}{25} \\
0 & 0 & \frac{1}{8} & \frac{11}{16} & \frac{3}{16} & 0 & 0 & -\frac{319}{60} & \frac{919}{100} \\
0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 & 0 & \frac{7}{3} & \frac{-57}{5} \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 6
\end{array}\right]. \tag{10}
$$

Ранее в [12], для того чтобы доказать выполнение условия базиса Рисса и тем самым обосновать устойчивость вычислений, с базисными граничными вейвлетами приходилось проводить некоторые дополнительные искусственные преобразования. В отличие от этого, в нашем подходе устойчивость вычислений гарантируется в исходном базисе за счет приведения системы уравнений к матрице, имеющей строгое диагональное преобладание по столбцам, при условии расщепления системы на четные и нечетные строки.

2. Алгоритм с применением расщепления

Пусть для уровней разложения $L \geq 4$ матрица G^L размера $\left(2^L+1\right) \times \left(2^L+1\right)$ имеет вид

$$
\left[\begin{array}{ccccccc|cc|c|cccccc}
1888 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & & & & \\
5312 & 2560 & 160 & 3200 & 64 & 128 & 0 & 0 & 0 & & & & & & & \\
0 & 0 & 264 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & & & & \\
378 & 1161 & 351 & 10\,287 & 159 & 1317 & 1 & 1 & 0 & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & -48 & 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-30 & 9 & 15 & 3699 & 15 & 3081 & 23 & 28 & 1 & \ddots & 44 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 132 & 0 & 1232 & 23 & 70 & 23 & \ddots & 1232 & 0 & 132 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 44 & 1 & 28 & 23 & \ddots & 3081 & 15 & 3699 & 15 & 9 & -30 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & -48 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 1 & 1 & \ddots & 1317 & 159 & 10\,287 & 351 & 1161 & 378 \\
 & & & & & & & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 264 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & \vdots & \vdots & \ddots & 128 & 64 & 3200 & 160 & 2560 & 5312 \\
 & & & & & & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1888
\end{array}\right],
$$

тогда как матрица R^L составлена из двух блоков согласно $2^{L-1}+1$ базисным сплайн-функциям из V_{L-1} и 2^{L-1} базовым вейвлетам из W_{L-1}:

$$
\left[\begin{array}{ccccccc|cc|c|cccccc}
5276 & 1320 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & & & & \\
0 & 1180 & 500 & 5380 & 116 & 92 & 0 & 0 & 0 & & & & & & & \\
0 & 0 & 0 & 4224 & 0 & 1408 & 0 & 0 & 0 & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1408 & 32 & 32 & 0 & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 32 & 32 & \ddots & 1408 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 0 & \ddots & 1408 & 0 & 4224 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & \vdots & \vdots & \ddots & 92 & 116 & 5380 & 500 & 1180 & 0 \\
 & & & & & & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 1320 & 5276 \\
\hline
-125 & -110 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & & & & \\
-30 & 9 & 15 & 795 & 15 & 45 & 0 & 0 & 0 & & & & & & & \\
0 & 0 & 0 & 1056 & 0 & 2112 & 8 & 8 & 0 & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 352 & 8 & 48 & 8 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 8 & \ddots & 352 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 0 & \ddots & 2112 & 0 & 1056 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & \vdots & \vdots & \ddots & 45 & 15 & 795 & 15 & 9 & -30 \\
 & & & & & & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & -110 & -125
\end{array}\right].
$$

Здесь последние шесть столбцов матриц G^L и R^L зеркально отражают первые шесть столбцов, диагональные точки означают, что предыдущие два столбца повторяются соответствующее количество раз, каждый раз перемещаясь на две позиции вниз; пустые позиции строк матриц равны нулю.

Теорема 1. *Определитель матрицы* $\det G^L \neq 0$.

Доказательство. Воспользовавшись тем, что в каждой нечетной строке матрицы G^L содержится лишь один ненулевой элемент, будем выполнять процедуру вычисления определителя $\det G^L$ методом последовательных разложений на алгебраические дополнения по элементам данных строк. В результате получаем, что

$$\det G^L = 1888^2 \cdot 264^2 \cdot 48^2 \cdot (16^{2^{L-1}-6}) \cdot \det G'.$$

Здесь G' — матрица, полученная из матрицы G^L вычеркиванием строк и столбцов, содержащих единственный ненулевой элемент в каждой нечетной строке. Но G' — это ленточная матрица, у которой выполняется свойство строгого диагонального преобладания по столбцам. А такие матрицы, как хорошо известно [13, с. 80], не вырождены и, значит, имеют неравный нулю определитель. □

Опираясь на существование обратной матрицы $(G^L)^{-1}$, предлагаем выполнять вычисления на основе разработанной нами ранее процедуры [14] четно-нечетного расщепления вейвлет-разложения вида (8). Для случая кубических сплайн-вейвлетов с четырьмя нулевыми моментами справедливы аналогичные результаты, которые с использованием введенных выше обозначений могут быть представлены в следующей форме.

Теорема 2. *Для любого уровня разложения $L \geq 4$ матрица вейвлет-разложения кубических сплайнов удовлетворяет равенству*

$$\left[P^L \mid Q^L\right] R^L = G^L. \tag{11}$$

Доказательство. Из записи матричного уравнения (11) видно, что для каждого столбца матрицы G_j^L соответствующий столбец матрицы R_j^L представляет собой не что иное, как решение системы линейных уравнений вида

$$\left[P^L \mid Q^L\right] R_j^L = G_j^L. \tag{12}$$

Теперь хорошо видно, что относительно элементов столбцов матрицы R^L система уравнений (12) имеет лишь шесть зеркально отраженных вариантов решения для правого и левого концов отрезка $[a,b]$ и два варианта решения в вариабельной части системы, зависящей от количества внутренних узлов сетки Δ^L. Все остальные варианты отличаются лишь размещением этих элементов по столбцам. Поскольку каждая строка матрицы $\left[P^L \mid Q^L\right]$ содержит лишь несколько ненулевых элементов, эти системы сами по себе имеют небольшую размерность. Для каждого варианта полученные системы оказываются совместными, но их ранги меньше количества неизвестных, так что каждая система обеспечивает некоторую свободу в выборе наиболее компактного в смысле наименьшего количества ненулевых значений и регулярного в смысле обнуления четных правых частей решения. Таким образом, нетрудно получить эти решения или, по крайней мере, проверить имеющиеся в наличии решения с помощью ручного счета. Найдем их явное представление.

$$\left[P^L \mid Q^L\right]' = \left[\begin{array}{ccccc|cc|c|cccc}
\frac{1}{2} & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & & \\
\frac{3}{4} & -\frac{57}{5} & \frac{1}{4} & \frac{7}{3} & 0 & 0 & 0 & & & & & \\
\frac{3}{16} & \frac{919}{100} & \frac{11}{16} & -\frac{319}{60} & \frac{1}{8} & 0 & 0 & & & & & \\
0 & -\frac{116}{25} & \frac{1}{2} & \frac{101}{15} & \frac{1}{2} & \frac{1}{8} & 0 & & & & & \\
0 & 1 & \frac{1}{8} & -\frac{25}{6} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{8} & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{8} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} & \ddots & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{2} & \ddots & -\frac{25}{6} & \frac{1}{8} & 1 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \frac{1}{8} & \ddots & \frac{101}{15} & \frac{1}{2} & -\frac{116}{25} & 0 \\
 & & & & & 0 & 0 & \ddots & -\frac{319}{60} & \frac{11}{16} & \frac{919}{100} & \frac{3}{16} \\
 & & & & & \vdots & \vdots & & \frac{7}{3} & \frac{1}{4} & \frac{-57}{5} & \frac{3}{4} \\
 & & & & & & & & 0 & 0 & 6 & \frac{1}{2}
\end{array}\right] \tag{13}$$

Для матрицы $\left[P^L \mid Q^L\right]$ почти пятидиагональная матрица (13) получается перестановкой столбцов матрицы $\left[P^L \mid Q^L\right]$ в соответствии с подстановкой

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & 2^L & 2^L+1 & 2^L+2 & \cdots & 2^{L+1} \\ 0 & 2 & 4 & \cdots & 2^{L+1} & 1 & 3 & \cdots & 2^{L+1}-1 \end{pmatrix}. \tag{14}$$

Матрицу, соответствующую перестановке столбцов (14), обозначим через T. Тогда верно представление [15]

$$\left[P^L \mid Q^L\right]' = \left[P^L \mid Q^L\right] T. \tag{15}$$

Из представления (15) находим

$$\left[P^L \mid Q^L\right]^{-1} \cdot G^L = T \cdot \left[P^L \mid Q^L\right]'^{-1} \cdot G^L. \tag{16}$$

Таким образом, проблема свелась к отысканию решения системы матричных равенств

$$\left[P^L \mid Q^L\right]'_j R'^L_j = G^L_j, \quad j = 0, 1, \ldots, 2^L, \tag{17}$$

которая согласно предполагаемой ступенчатой структуре матриц R'^L и G^L распадается на блоки с матрицами следующего вида:

$$\left[P^L \mid Q^L\right]'_{0,1,\ldots,6} = \left[\begin{array}{ccccc|cc|cc|cc}
\frac{1}{2} & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & \\
\frac{3}{4} & -\frac{57}{5} & \frac{1}{4} & \frac{7}{3} & 0 & 0 & 0 & & & & \\
\frac{3}{16} & \frac{919}{100} & \frac{11}{16} & -\frac{319}{60} & \frac{1}{8} & 0 & 0 & & & & \\
0 & -\frac{116}{25} & \frac{1}{2} & \frac{101}{15} & \frac{1}{2} & \frac{1}{8} & 0 & & & & \\
0 & 1 & \frac{1}{8} & -\frac{25}{6} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{8} & & & & \\
0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{8} & 0 & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{8} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{8} & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{8} & 0 \\
 & & & & & 0 & \frac{1}{8} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{8} \\
 & & & & & 0 & 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & \frac{1}{2}
\end{array}\right],$$

$$\left[P^L \mid Q^L\right]'_{7,8} = \left[\begin{array}{c|cc|cc|cc|cc}
\frac{1}{2} & \frac{1}{8} & 0 & & & & & & \\
\frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{8} & & & & & & \\
\frac{1}{2} & \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{8} & 0 & & & & \\
\frac{1}{8} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{8} & & & & \\
0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{8} & 0 & & \\
0 & 0 & \frac{1}{8} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{8} & & \\
0 & 0 & 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{8} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{8} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{8} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & \frac{1}{2}
\end{array}\right],$$

$$\ldots$$

$$\left[P^L \mid Q^L\right]'_{2^L-5,\ldots,2^L} = \left[\begin{array}{cc|cc|cccc}
\frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{1}{2} & \frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{1}{2} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{1}{8} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{1}{8} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} & -\frac{25}{6} & \frac{1}{8} & 1 & 0 \\
0 & 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{2} & \frac{101}{15} & \frac{1}{2} & -\frac{116}{25} & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{1}{8} & -\frac{319}{60} & \frac{11}{16} & \frac{919}{100} & \frac{3}{16} \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{7}{3} & \frac{1}{4} & \frac{-57}{5} & \frac{3}{4} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & \frac{1}{2}
\end{array}\right].$$

При этом нижние индексы в обозначениях левых матриц указывают на то, для вычисления элементов каких столбцов матрицы R'^L предназначена соответствующая система (17) при условии, что уравнения, отвечающие нулевым строкам матриц G_j^L, удалены из системы. В результате произведение матриц $\left[P^L \mid Q^L\right]'^{-1} \cdot G^L$ также оказывается почти пятидиагональной матрицей и имеет следующий вид:

$$
\left[\begin{array}{ccccccc|cc|c|cccccc}
5276 & 1320 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & & & & \\
-125 & -110 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & & & & \\
0 & 1180 & 500 & 5380 & 116 & 92 & 0 & 0 & 0 & & & & & & & \\
-30 & 9 & 15 & 795 & 15 & 45 & 0 & 0 & 0 & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 4224 & 0 & 1408 & 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1056 & 0 & 2112 & 8 & 8 & 0 & & 352 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1408 & 32 & 32 & 0 & & 1408 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 352 & 8 & 48 & 8 & \ddots & 2112 & 0 & 1056 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 32 & 32 & \ddots & 1408 & 0 & 4224 & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 8 & 8 & \ddots & 45 & 15 & 795 & 15 & 9 & -30 \\
 & & & & & & & 0 & 0 & \ddots & 92 & 116 & 5380 & 500 & 1180 & 0 \\
 & & & & & & & \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 & -110 & -125 \\
 & & & & & & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 1320 & 5276
\end{array}\right].
$$

Из равенства (16) следует, что для нахождения матрицы $R^L = \left[P^L \mid Q^L\right]^{-1} \cdot G^L$ к строкам данной матрицы требуется применить перестановку, обратную к (14), т. е. перестановку, в которой записи образа и прообраза поменяны местами. Отсюда получаем искомое представление матрицы R^L. $\square$

После этого решение системы уравнений (9) можно записать в матричной форме:

$$
\left[\frac{\mathbf{c}^{L-1}}{\mathbf{d}^{L-1}}\right] = \left[P^L \mid Q^L\right]^{-1} \mathbf{c}^L = R^L \left(G^L\right)^{-1} \mathbf{c}^L.
$$

Таким образом, вместо того чтобы непосредственно решать систему вида (9), мы можем решить систему

$$
G^L \boldsymbol{\xi}^L = \mathbf{c}^L \tag{18}
$$

относительно некоторых значений $\boldsymbol{\xi}^L$ и после этого просто вычислить значения $\mathbf{c}^{L-1}$ и $\mathbf{d}^{L-1}$ с использованием линейного преобразования $\left[\frac{\mathbf{c}^{L-1}}{\mathbf{d}^{L-1}}\right] = R^L \boldsymbol{\xi}^L$.

Тем не менее для больших значений L еще нужно разделить систему (18) на четные и нечетные строки, чтобы свести алгоритм к решению пятидиагональной системы уравнений, обеспечив при этом строгое диагональное преобладание по столбцам, что предпочтительно для устойчивости вычислений. Мы достигнем этой цели, объединив метод пятидиагональной прогонки по столбцам [15] с методом неполной редукции, изученным в [13, гл. IV, § 3].

Следующее утверждение формально описывает последовательность вычисления сплайн-коэффициентов на прореженной сетке и вейвлет-коэффициентов на основе известных коэффициентов разложения сплайна на произвольной сетке Δ^L, $L \geq 5$.

Теорема 3. *Предположим, что значения* $\boldsymbol{\xi}^L = [\xi_{-2}, \ldots, \xi_{2^L-2}]^T$ *вычислены из выражений*

$$
\frac{c_i^L}{\xi_i} = \begin{cases}
1888, & i = \ -2, 2^L - 2, \\
264, & i = \ 0, 2^L - 4, \\
48, & i = \ 2, 2^L - 6, \\
16, & i = \ 4, 6, \ldots, 2^L - 8
\end{cases}
$$

и из решения уравнений

$$
\begin{aligned}
2560\xi_{-1}+3200\xi_1+128\xi_3 &= c_{-1}^L-5312\xi_{-2}-160\xi_0-64\xi_2,\\
1161\xi_{-1}+10287\xi_1+1317\xi_3+\xi_5 &= c_1^L-378\xi_{-2}-351\xi_0-159\xi_2-\xi_4,\\
9\xi_{-1}+3699\xi_1+3081\xi_3+28\xi_5+\xi_7 &= c_3^L+30\xi_{-2}-15\xi_0-15\xi_2-23\xi_4-\xi_6,\\
132\xi_{i-4}+1232\xi_{i-2}+70\xi_i+28\xi_{i+2}+\xi_{i+4} &= c_i^L-23\xi_{i-1}-23\xi_{i+1}-\xi_{i+3},\ i=5,\\
44\xi_{i-4}+28\xi_{i-2}+70\xi_i+28\xi_{i+2}+\xi_{i+4} &= c_i^L-23\xi_{i-1}-23\xi_{i+1}-\xi_{i-3}-\xi_{i+3},\\
&\quad i=7,\\
\xi_{i-4}+28\xi_{i-2}+70\xi_i+28\xi_{i+2}+\xi_{i+4} &= c_i^L-23\xi_{i-1}-23\xi_{i+1}-\xi_{i-3}-\xi_{i+3},\\
&\quad i=9,11,\ldots,2^L-13,\\
\xi_{i-4}+28\xi_{i-2}+70\xi_i+28\xi_{i+2}+44\xi_{i+4} &= c_i^L-23\xi_{i-1}-23\xi_{i+1}-\xi_{i-3}-\xi_{i+3},\\
&\quad i=2^L-11,\\
\xi_{i-4}+28\xi_{i-2}+70\xi_i+1232\xi_{i+2}+132\xi_{i+4} &= c_i^L-23\xi_{i-1}-23\xi_{i+1}-\xi_{i-3},\ i=2^L-9,\\
\xi_{i-4}+28\xi_{i-2}+3081\xi_i+3699\xi_{i+2}+9\xi_{i+4} &= c_i^L-23\xi_{i-1}-15\xi_{i+1}-\xi_{i-3}-15\xi_{i+3}+\\
&\quad +30\xi_{i+5},\ i=2^L-7,\\
\xi_{i-4}+1317\xi_{i-2}+10287\xi_i+1161\xi_{i+2} &= c_i^L-159\xi_{i-1}-351\xi_{i+1}-\xi_{i-3}-378\xi_{i+3},\\
&\quad i=2^L-5,\\
128\xi_{i-4}+3200\xi_{i-2}+2560\xi_i &= c_i^L-160\xi_{i-1}-5312\xi_{i+1}-64\xi_{i-3},\\
&\quad i=2^L-3.
\end{aligned}
$$

Тогда составной вектор сплайн-коэффициентов размера $\left(2^{L-1}+1\right)$ *на прореженной сетке* Δ^{L-1} *и вейвлет-коэффициентов размера* 2^{L-1} *является результатом умножения матрицы* R^L *размера* $\left(2^L+1\right)\times\left(2^L+1\right)$ *на вектор* $\boldsymbol{\xi}^L$ *размера* $\left(2^L+1\right)$.

Доказательство. Теорема 3 доказывается прямой подстановкой в схему расщепления (11), (18). □

3. Пример

Для сравнения будем использовать результаты расчетов по ранее известным схемам дискретного вейвлет-преобразования, соответственно, с помощью вейвлетов, ортогональных многочленам первой степени [9, 16], и интерполяционных кубических сплайн-вейвлетов со свойством наилучшего среднеквадратического приближения второй производной аппроксимируемой функции [6, 17]. Отметим, что в этих двух случаях к однородным краевым условиям Дирихле добавляются однородные краевые условия первого порядка $f'(a)=f'(b)=0$ и сплайн-функции $\varphi_{b1}(v)$, $\varphi_{b1}(2^L-v)$ из базиса исключаются.

Пусть $L=4$ и дискретный сигнал представляется в виде значений аналитической функции $f(x)=(x^2-16)^2$, заданных в точках $\Delta^4: x=-4,-3.5,\ldots,4$. Поскольку в крайних точках ($x=\pm4$) выполнены необходимые для построения вейвлет-разложения однородные краевые условия, есть все для того, чтобы исследовать применение указанных выше вейвлетов к задаче вейвлет-анализа. После решения соответствующих интерполяционных задач и последовательного выполнения процедуры вейвлет-анализа на последнем этапе $L=2$ ограничимся отбраковкой всех полученных к этому моменту коэффициентов вейвлет-разложения.

Сравнительные характеристики алгоритмов вейвлет-обработки
Comparative characteristics for algorithms of wavelet processing

Схема расчета	Интерполяция	4 момента	2 момента	ИКВ
$x = -4$	127.5	118.1	121.7	120
$x = 0$	-64.4998	-72	-70.3	-72
СКО	0	0.332	0.551	0.66

Тогда восстановление аппроксимационного сплайна осуществляется применением аналитической формулы (4):

$$s^2(v) = c^2_{-2}\varphi_{b1}(v) + c^2_{-1}\varphi_{b2}(v) + c^2_0\varphi_3(v) + c^2_1\varphi_{b2}(4-v) + c^2_2\varphi_{b1}(4-v), \quad 0 \le v \le 4. \quad (19)$$

С учетом выражения (19) получаем как отфильтрованные величины $s^2(x/2+2)$, так и результирующие значения второй производной в концах интервала $(s^2)''(0) = (s^2)''(4)$ и в середине интервала $(s^2)''(2)$, которые нужно поделить на четыре для сопоставления с точными значениями $f''(-4) = f''(4) = 128$, $f''(0) = -64$. При этом среднеквадратическая ошибка (СКО) аппроксимации оценивается выражением

$$\text{СКО} = \left(\frac{1}{15} \sum_{i=1}^{15} \left(f(x_i) - s^2(x_i/2+2) \right)^2 \right)^{1/2}.$$

В таблице представлены четыре варианта расчета: 1) из решения интерполяционной задачи; 2) по схеме, представленной в данной статье (4 момента); 3) с использованием вейвлетов, ортогональных многочленам первой степени (2 момента); 4) с использованием интерполяционных кубических вейвлетов (ИКВ).

Таким образом, в данном примере аппроксимационная схема, основанная на использовании вейвлетов с двумя нулевыми моментами, дала значения, наиболее близкие к значениям аппроксимируемых производных. Использование более сложной аппроксимационной схемы с четырьмя нулевыми моментами приводит к повышению точности аппроксимации, но и к удалению от истинных значений второй производной. Алгоритм, построенный на основе интерполяционных кубических сплайн-вейвлетов со свойством наилучшего среднеквадратического приближения второй производной аппроксимируемой функции, в общем-то, уступает по всем показателям алгоритмам, у которых наличествуют нулевые моменты.

Заключение

В статье рассмотрено дальнейшее развитие авторской процедуры четно-нечетного разбиения определяющей системы вейвлет-разложения Эрмита для практически важного случая приближения функций, не требующего задания значений производных, на основе B-сплайнов третьей степени. Распространение предложенного подхода на сплайны более высокой степени и большего количества нулевых моментов может предоставить новые возможности для разработки алгоритмов построения и применения сплайн-вейвлетов.

Список литературы

[1] **Чуи Ч.** Введение в вейвлеты: Пер. с англ. М.: Мир; 2001: 412.

[2] **Столниц Э., ДеРоуз Т., Салезин Д.** Вейвлеты в компьютерной графике: Пер. с англ. Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”; 2002: 272.

[3] **Фрейзер М.** Введение в вэйвлеты в свете линейной алгебры: Пер. с англ. М.: Бином. ЛЗ; 2008: 488.

[4] **Lyche T., Mørken K., Quak E.** Theory and algorithms for non-uniform spline wavelets. Multivariate approximation and applications. Cambridge: Cambridge University Press; 2001: 152–187.

[5] **Cohen A., Daubechies I., Feauveau J.-C.** Biorthogonal bases of compactly supported wavelets. Communications on Pure and Applied Mathematics. 1992; (45):485–560.

[6] **Wang J.** Cubic spline wavelet bases of Sobolev spaces and multilevel interpolation. Applied and Computational Harmonic Analysis. 1996; 3(2):154–163.

[7] **Koro K., Abe K.** Non-orthogonal spline wavelets for boundary element analysis. Engineering Analysis with Boundary Elements. 2001; (25):149–164.

[8] **Шумилов Б.М.** Алгоритмы с расщеплением вейвлет-преобразования сплайнов первой степени на неравномерных сетках. Журнал вычислительной математики и математической физики. 2016; 56(7):39–50.

[9] **Шумилов Б.М.** Алгоритм с расщеплением для кубических сплайн-вейвлетов с двумя нулевыми моментами на отрезке. Сибирские электронные математические известия. 2020; (17):2105–2121.

[10] **Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л.** Методы сплайн-функций. М.: Наука; 1980: 352.

[11] **Бубнова Н.В.** Метод вейвлет-Галёркина численного моделирования тонкопроволочных антенн. Вычислительные технологии. 2008; 13.(спецвыпуск 4):12–19.

[12] **Ĉerná D.** Cubic spline wavelets with four vanishing moments on the interval and their applications to option pricing under Kou mode. International Journal of Wavelets, Multiresolution and Information Processing. 2019; 17(1):1850061.

[13] **Самарский А.А., Николаев Е.С.** Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука; 1978: 592.

[14] **Шумилов Б.М.** Кубические мультивейвлеты, ортогональные многочленам, и алгоритм с расщеплением. Сибирский журнал вычислительной математики. 2013; 16(3):283–297.

[15] **Писсанецки С.** Технология разреженных матриц: Пер. с англ. М.: Мир; 1988: 410.

[16] **Ĉerná D., Finêk V.** Cubic spline wavelets with short support for fourth-order problems. Applied Mathematics and Computation. 2014; (243):44–56.

[17] **Шумилов Б.М.** О сплайн-вейвлетах, полуортогональных с производными, и алгоритме с расщеплением. Сибирский журнал вычислительной математики. 2017; 20(1):107–120.

Вычислительные технологии, 2021, том 26, № 2, с. 72–87. © ФИЦ ИВТ, 2021 ISSN 1560-7534
Computational Technologies, 2021, vol. 26, no. 2, pp. 72–87. © FRC ICT, 2021 eISSN 2313-691X

COMPUTATIONAL TECHNOLOGIES

DOI:10.25743/ICT.2021.26.2.006

On splitting for cubic spline wavelets with four zero moments on an interval

Shumilov Boris M.

Tomsk State University of Architecture and Building, 634003, Tomsk, Russia
Corresponding author: Shumilov Boris M., e-mail: sbm@tsuab.ru
Received February 8, 2021, revised March 9, 2021, accepted March 16, 2021

Abstract

The article examines the problem of constructing a splitting algorithm for cubic spline wavelets. First, a cubic spline space is constructed for splines with homogeneous Dirichlet boundary conditions. Then, using the first four zero moments, the corresponding wavelet space is constructed. The resulting space consists of cubic spline wavelets that satisfy the orthogonality conditions for all third-degree polynomials. The originality of the research lies in obtaining implicit relations connecting the coefficients of the spline expansion at the initial level with the spline coefficients and wavelet coefficients at the embedded level by a band system of linear algebraic equations with a nondegenerate matrix. Excluding the even rows of the system, the resulting transformation algorithm is obtained as a solution to a sequence of band systems of linear algebraic equations with five (instead of three in the case of two zero moments) diagonals. The presence of strict diagonal dominance over the columns is proved, which confirms the stability of the computational process. For comparison, we adopt the results of calculations using wavelets orthogonal to first-degree polynomials and interpolating cubic spline wavelets with the property of the best mean-square approximation of the second derivative of the function being approximated. The results of numerical experiments show that the scheme with four zero moments is more accurate in the approximation of functions, but becomes inferior in accuracy to the approximation of the second derivative.

Keywords: B-splines, wavelets, implicit decomposition relations.

Citation: Shumilov B.M. On splitting for cubic spline wavelets with four zero moments on an interval. Computational Technologies. 2021; 26(2):72–87.DOI:10.25743/ICT.2021.26.2.006. (In Russ.)

References

1. **Chui C.K.** An introduction to wavelets. N.Y., London: Academic Press; 1992: 366.
2. **Stollnitz E.J., DeRose T.D., Salesin D.H.** Wavelets for computer graphics. San Francisco: Morgan Kaufmann Publishers; 1996: 290.
3. **Frazier M.W.** An introduction to wavelets through linear algebra. N.Y.: Springer Verlag; 1999: 596.
4. **Lyche T., Mørken K., Quak E.** Theory and algorithms for non-uniform spline wavelets. Multivariate approximation and applications. Cambridge: Cambridge University Press; 2001: 152–187.
5. **Cohen A., Daubechies I., Feauveau J.-C.** Biorthogonal bases of compactly supported wavelets. Communications on Pure and Applied Mathematics. 1992; (45):485–560.
6. **Wang J.** Cubic spline wavelet bases of Sobolev spaces and multilevel interpolation. Applied and Computational Harmonic Analysis. 1996; 3(2):154–163.
7. **Koro K., Abe K.** Non-orthogonal spline wavelets for boundary element analysis. Engineering Analysis with Boundary Elements. 2001; (25):149–164.
8. **Shumilov B.M.** Splitting algorithms for the wavelet transform of first-degree splines on nonuniform grids. Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2016; 56(7):1209–1219.
9. **Shumilov B.M.** Splitting algorithm for cubic spline-wavelets with two vanishing moments on the interval. Siberian Electronic Mathematical Reports. 2020; (17):2105–2121. DOI:10.33048/semi.2020.17.141. (In Russ.)

10. **Zav'yalov Yu.S., Kvasov B.I., Miroshnichenko V.L.** Metody splayn-funktsiy [Methods of spline-functions]. Moscow: Nauka; 1980: 352. (In Russ.)
11. **Bubnova N.V.** Wavelet-Galerkin method for numerical simulation of thin-wire antennas. Computational Technologies. 2008; 13(Spets.vypusk 4):12–19. (In Russ.)
12. **Černá D.** Cubic spline wavelets with four vanishing moments on the interval and their applications to option pricing under Kou mode. International Journal of Wavelets, Multiresolution and Information Processing. 2019; 17(1):1850061.
13. **Samarskii A.A., Nikolaev E.S.** Numerical methods for grid equations, vol. I: Direct methods. Basel: Birkhauser; 1989: 242.
14. **Shumilov B.M.** Cubic multiwavelets orthogonal to polynomials and a splitting algorithm. Numerical Analysis and Applications. 2013; 6(3):247–259.
15. **Pissanetzky S.** Sparse matrix technology. London: Academic Press; 1984: 321.
16. **Černá D., Finêk V.** Cubic spline wavelets with short support for fourth-order problems. Applied Mathematics and Computation. 2014; (243):44–56.
17. **Shumilov B.M.** Semi-orthogonal spline-wavelets with derivatives and the algorithm with splitting. Numerical Analysis and Applications. 2017; 10(1):90–100.