

# ОБ АСИМПТОТИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ УЕДИНЕННЫХ ВНУТРЕННИХ ВОЛН В ДВУХСЛОЙНОЙ ЖИДКОСТИ\*

Ж. Л. МАЛЬЦЕВА

*Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН*

*Новосибирск, Россия*

e-mail: maltseva@hydro.nsc.ru

A stationary internal wave problem in a two-layer inviscid incompressible fluid is considered. The algorithm of the uniform asymptotic construction for the solution of Euler equations as a solitary wave with a flat top, in limiting case transformed to a bore, has been developed. The theorem on the existence of the exact solution of motion equations in the class of analytic functions is given.

Внутренние волны по своим свойствам качественно отличаются от поверхностных. В зависимости от различных значений параметров существуют предельные режимы течений, которые не имеют места в случае поверхностных волн.

Рассмотренное в данной работе семейство уединенных внутренних волн интересно тем, что при фиксированной амплитуде не возникает ограничений на эффективную длину волны, равную расстоянию между точками перегиба на фронтах волны. Как следствие, такие волны могут переносить сколь угодно большое количество энергии.

## 1. Постановка задачи

Рассматривается плоское безвихревое установившееся течение двухслойной идеальной несжимаемой жидкости в однородном поле силы тяжести. Область, занимаемая жидкостью, — полоса шириной  $H = H_1 + H_2$ , разделенная линией контактного разрыва  $\gamma_1$  на две криволинейных полосы  $\Omega_i$ . Снизу жидкость ограничена плоским дном ( $\gamma_0 : y = 0$ ), сверху — плоской крышкой ( $\gamma_2 : y = H$ ) (рис. 1). Предполагается, что на бесконечности скорости слоев жидкости равны  $U_i, i = 1, 2$  (индекс 1 относится к нижнему слою, индекс 2 — к верхнему).

Характерными безразмерными параметрами задачи являются числа Фруда

$$F_i^2 = \frac{U_i^2}{gH} \frac{\rho_i}{\rho_1 - \rho_2}$$

---

\*Работа выполнена в рамках интеграционного проекта №43 СО РАН “Исследование поверхностных и внутренних гравитационных волн в жидкости” при поддержке программы “Ведущие научные школы”, грант №96–15–96283.

© Ж. Л. Мальцева, 2000.

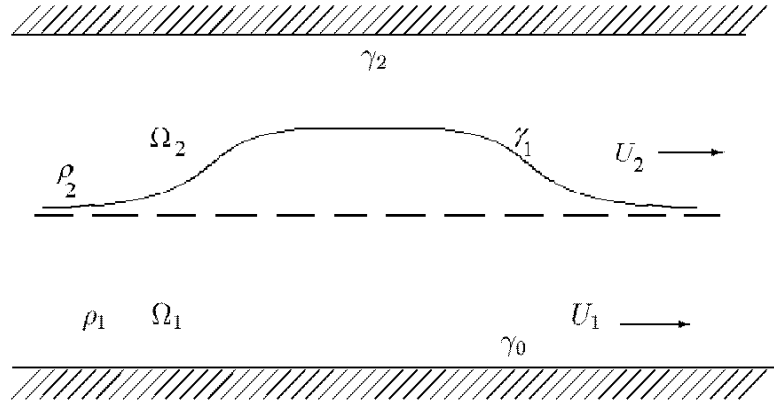


Рис. 1.

( $g$  — ускорение свободного падения). При переходе к переменным Мизеса  $(x, y) \mapsto (x, \psi)$ , где  $\psi$  — функция тока, с введением безразмерных переменных области течения соответствует двойная полоса

$$\Pi = \Pi_1 \cup \Pi_2, \quad \Pi_1 = (-\infty, \infty) \times (0, 1), \quad \Pi_2 = (-\infty, \infty) \times (1, 1 + r),$$

где  $r$  — отношение невозмущенных глубин слоев. Искомой является форма линий тока

$$y = \psi + \varepsilon w(\tilde{x}, \psi), \quad \tilde{x} = \varepsilon x. \quad (1)$$

Граница раздела слоев при этом получается из (1) при  $\psi = 1$ :

$$y = 1 + \varepsilon w(\tilde{x}, 1).$$

Здесь  $\varepsilon$  — длинноволновой параметр, который будет определен ниже. При этом исходная система уравнений Эйлера и граничных условий преобразуется к следующей системе уравнений и граничных условий для  $w$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon^2 w_{xx} + w_{\psi\psi} = f, \quad 0 < \psi < 1, \quad 1 < \psi < 1 + r, \\ w = 0, \quad \psi = 0, \quad \psi = h, \\ [w] = 0, \\ [F^2 w_\psi] + h^{-1} w = \varphi, \\ w, \quad \nabla w \rightarrow 0, \quad |x| \rightarrow \infty, \end{array} \right\} \quad \psi = 1, \quad (2)$$

где правые части  $f$  и  $\varphi$  — рациональные функции, зависящие от  $\nabla w$ .  $F = F_i$  в  $\Pi_i$ .

## 2. Спектр линейной задачи

Задача (2), линеаризованная на кусочно-постоянном потоке с заданными величинами  $F_i$  и  $r$ , имеет решения в виде элементарных волновых пакетов

$$w(x, \psi) = W(\psi) e^{-i\kappa x}, \quad (3)$$

если волновое число  $\kappa$  связано с параметрами основного течения дисперсионным соотношением

$$\Delta \equiv F_1^2 \kappa \operatorname{cth} \kappa + F_2^2 \kappa \operatorname{cth} r\kappa - (r + 1)^{-1} = 0. \quad (4)$$

Вещественные корни этого уравнения существуют только при условии, что точка  $(F_1, F_2)$  находится внутри эллипса:

$$F_1^2 + r^{-1}F_2^2 = (1 + r)^{-1}. \quad (5)$$

Множество точек эллипса представляет собой спектр линейных волн. Граница эллипса состоит из точек бифуркации для решений задачи — в них происходит ответвление уединенных длинных волн от кусочно-постоянного течения. В частности, в [1, 3] было показано, что при

$$|F_1| + |F_2| = 1 \quad (6)$$

существует однопараметрическое семейство решений нелинейной задачи в виде бора. Будем изучать семейство решений для пар чисел Фруда  $(F_1, F_2)$ , лежащих в сверхкритической области (вне эллипса (5)) в окрестности точки касания эллипса и квадрата:

$$(F_1, F_2) = (1/(1 + r), r/(1 + r)). \quad (7)$$

В этой точке границы непрерывного спектра от равномерного потока происходит ответвление как решения типа бора, так и типа уединенной волны.

В работе [2] было показано, что в окрестности точки общего положения уединенные волны имеют асимптотику в виде волны Кортевега — де Фриза, но в этом случае асимптотика не является равномерной при стремлении точки на эллипсе к точке  $(F_1, F_2)$ . Это связано с тем, что амплитуда волны Кортевега — де Фриза имеет второй порядок малости относительно длинноволнового параметра, а в окрестности точки  $(F_1, F_2)$  амплитуда имеет одинаковый порядок с  $\varepsilon$ .

В связи с этим введем параметризацию  $(F_1, F_2) \mapsto (\varepsilon, k)$  следующим образом. Для точек  $(F_1, F_2)$ , лежащих вне эллипса (5), дисперсионная функция  $\Delta$  имеет только чисто мнимые комплексно-сопряженные корни. Пусть  $\varepsilon$  — минимальный положительный корень уравнения

$$F_1^2 \varepsilon \operatorname{ctg} \varepsilon + F_2^2 \varepsilon \operatorname{ctg} r\varepsilon - (r + 1)^{-1} = 0. \quad (8)$$

Тогда из (3) следует, что параметр  $\varepsilon$  является показателем экспоненциального убывания решения на бесконечности. Линиями уровня  $\varepsilon$  служит семейство соосных эллипсов, вырождающихся при  $\varepsilon \rightarrow 0$  в эллипс (5). Соотношение (8) является аналогом формулы Стокса для уединенных поверхностных волн:  $F^2 = (\operatorname{tg} \varepsilon)/\varepsilon$ .

Семейство линий уровня второго параметра  $k$  состоит из эллипсов

$$\left(kF_1 + \frac{1 - k}{r + 1}\right)^2 + \frac{1}{r} \left(kF_2 + \frac{r(1 - k)}{r + 1}\right)^2 - \frac{1}{r + 1} = 0, \quad (9)$$

каждый из которых касается квадрата (6) в точке (7) (рис. 2). При изменении  $k$  от 0 до 1 эти эллипсы заполняют криволинейные секторы между прямой  $F_1 + F_2 = 1$  и эллипсом (5).

Параметризация (8), (9) имеет особенность в точке  $(F_1, F_2)$ , что отражает специфику поведения решения в ее окрестности. При фиксированном значении параметра  $k$  для чисел Фруда справедливо асимптотическое разложение

$$F_i = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n F_i^n(k),$$

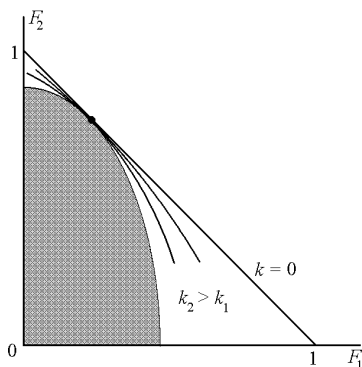


Рис. 2.

где коэффициенты рядов выражаются по формулам

$$F_1^1 = \frac{1}{\theta(1+r)\sqrt{1-k}}, \quad F_2^1 = -F_1^1, \quad (10)$$

$$F_1^2 = \frac{1}{6} \frac{(2r^2 + kr^2 - 2r - kr + k)}{(k-1)(r+1)},$$

$$F_2^2 = \frac{1}{6} \frac{r(r^2k - 2r - kr + k + 2)}{(k-1)(r+1)}.$$

Здесь

$$\theta = \sqrt{\frac{3(r+1)}{r(r^3+1)}}.$$

### 3. Асимптотический ряд

Попытка отыскать решение (2) в виде ряда по степеням  $\varepsilon$

$$w = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n w_n,$$

приводит к рекуррентной последовательности краевых задач для коэффициентов  $w_n$ :

$$w_{n\psi\psi} = g_n \quad \text{в } \Pi_i, \quad (11)$$

$$w_0 = 0 \quad \text{при } \psi = 0, h, \quad (12)$$

$$[w_n] = 0 \quad \text{при } \psi = 1, \quad (13)$$

$$\Lambda w_n = \phi_n, \quad \text{при } \psi = 1, \quad (14)$$

где дифференциальный оператор  $\Lambda$  имеет вид

$$\Lambda w = F_2^2 w_\psi(x, 1+0) - F_1^2 w_\psi(x, 1-0) + h^{-1} w(x, 1),$$

правые части уравнений (11)

$$g_0 = 0, \quad \phi_0 = 0.$$

При  $n \geq 1$   $g_n$ ,  $\phi_n$  — функции от  $\nabla w_0, \nabla w_{n-1}$ .

Решения уравнений (11)–(14) для  $n = 1$  и  $n = 2$  имеют вид

$$w_0(x, \psi) = {}_0(x)W(\psi), \quad w_1(x, \psi) = {}_1(x)W(\psi),$$

где  $W$  — кусочно-линейная функция,

$$W = \begin{cases} \psi, & 0 < \psi < 1, \\ (\psi - h)/(1 - h), & 1 < \psi < h, \end{cases} \quad (15)$$

$h = 1 + r$ , а функции  ${}_0(x)$  и  ${}_1(x)$  остаются неопределенными и находятся из условия совместности уравнений последующих приближений. Так, уравнение для функции  ${}_0(x)$  следует из (14) для  $n = 2$ :

$$C_0'' = \frac{6h}{r(r^3 + 1)}C_0^3 - \frac{3h^2}{r(r^3 + 1)}F_1^1 C_0^2 + C_0. \quad (16)$$

Отсюда

$$C_0 = a \frac{1 - \text{th}^2 x/2}{\theta(a^2 - \text{th}^2 x/2)},$$

где  $a + 1/a = 2/\sqrt{1 - k}$ . Для  $n > 2$

$$w_n = C_n W(\psi) + P(\psi),$$

где  $P(\psi)$  — полиномы от  $\psi$  с коэффициентами, зависящими от  $C_0, \dots, C_{n-1}, C_n$ , вычисляются из рекуррентной последовательности уравнений

$$C_n'' - P_3'(C_0)C_n = f_n(C_0, \dots, C_{n-1}), \quad (17)$$

где  $P_3(C_0)$  — кубический полином правой части (16). В работе [4] для бессдвигового течения было показано, что любое решение исходной задачи о внутренних волнах с симметричными условиями на бесконечности является симметричным относительно вертикальной оси. Четное решение уравнения (17) определяется единственным образом и имеет вид

$$C_n = -u_1 \int_0^x f_n u_2 dx - u_2 \int_x^{+\infty} f_n u_1 dx, \quad (18)$$

где  $u_{1,2}$  — базисные решения однородного уравнения,  $u_1 = C_0'$ , а  $u_2$  вычисляется через  $u_1$  по формуле Лиувилля.

Для  $n = 1$  получим  $f_1 = k_4 C_0^4 + k_3 C_0^3 + k_2 C_0^2$  с коэффициентами  $k_i = k_i(k, r)$ :

$$k_2 = \frac{(1 - r)(r^2 - kr + 2r + 1)}{2\theta^2 r^2 (r + 1)^2 (k - 1)},$$

$$k_3 = \frac{4}{\theta^3 r (r + 1) \sqrt{1 - k}} \frac{1 - r^3}{r^2 + r^5},$$

$$k_4 = \frac{5(r^3 - r^2 + r + 1)}{2r^3(1 + r^3)\theta^2(r + 1)}.$$

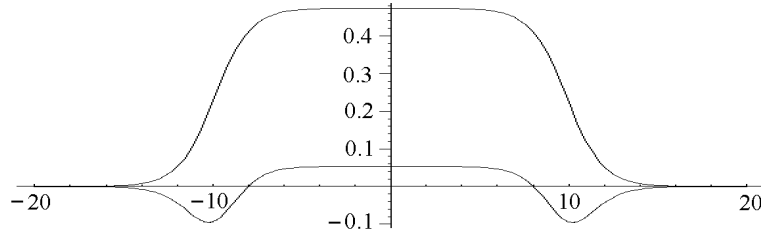


Рис. 3.

Отсюда для  $C_1$  получаем представление

$$C_1 = \frac{\alpha_1 \operatorname{ch} x + \alpha_2 \ln \frac{a - \operatorname{th}(x/2)}{a + \operatorname{th}(x/2)} \operatorname{sh} x + \alpha_3}{(a^2 - 1)\alpha_4(a^2 + 1 + (a^2 - 1)\operatorname{ch} x)^2},$$

где коэффициенты  $\alpha_i$  выражаются через  $k_i$  по формулам

$$\alpha_1 = k_2 \frac{20a^2}{\theta^4} (1 + a^2) + k_3 \frac{30a^3}{\theta^5} + k_4 \frac{12a^2(1 + a^2)}{\theta^6},$$

$$\alpha_2 = 6k_4 a(a^2 - 1)^2 / \theta^6, \quad \alpha_3 = 4a^2(a^2 - 1) \left( 5k_2 - 3k_4 \frac{1}{\theta^2} \right) / \theta^4, \quad \alpha_4 = 15r(r + 1).$$

График функций  $C_1$  для  $r = 1.2$ ,  $a = 1.0001$  показан на рис. 3.

Так как  $w = C_0 + \varepsilon C_1$ ,  $\varepsilon < 1$ , а амплитуда функции  $C_0$  существенно больше амплитуды функции  $C_1$ , граница раздела слоев с большой точностью описывается функцией  $C_0$ . В связи с этим поведение решения в зависимости от значений параметров с большой точностью определяется функцией  $C_0$ .

## 4. Анализ решения

Рассмотрим предельные режимы течений в зависимости от параметра  $k$ . Граница раздела слоев в полученном приближении представляется формулой

$$y = 1 + \varepsilon a \frac{1 - \operatorname{th}^2(\varepsilon x/2)}{\theta(a^2 - \operatorname{th}^2(\varepsilon x/2))} + \varepsilon^2 C_1(x) + O(\varepsilon^3).$$

При фиксированном  $a$  или, что то же самое,  $k$ , амплитуда волны имеет одинаковый порядок с  $\varepsilon$ . В пределе  $a \rightarrow 1$ , когда точка  $(F_1, F_2)$  в плоскости чисел Фруда приближается к прямой  $F_1 + F_2 = 1$ , амплитуда остается ограниченной. Вершина уединенной волны при этом уплощается, а ее фронт, находящийся вблизи точки с абсциссой  $x = a \ln \left( \frac{a-1}{a+1} \right)$ , трансформируется в бор.

В другом предельном случае  $a^{-1} \sim \varepsilon \rightarrow 0$  получаем уединенную волну Кортевега—де Фриза

$$y = 1 + \varepsilon^2 \frac{1 - r^3 + 4\sqrt{3}\sqrt{r - r^2 + r^3}}{12} \operatorname{ch}^{-2} \frac{\varepsilon x}{2} + O(\varepsilon^2).$$

## 5. Теорема существования

Пространство  $E_\rho^\alpha(\Pi)$  — непрерывные в  $\bar{\Pi} = (-\infty, \infty) \times [a, b]$  функции  $u(x, \psi)$ , аналитические по  $x$  и имеющие в полосе  $|\eta| < \alpha$  аналитическое преобразование Фурье по переменной  $\zeta = \xi + i\eta$ . Норма в  $E_\rho^\alpha$  определяется по формуле

$$\|u\|_{E_\rho} = \sup_{|\eta| < \alpha} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\rho|\xi|} \sup_{\psi \in [a, b]} |\hat{u}(\xi + i\eta, \psi)| d\xi,$$

где  $\hat{u}$  — преобразование Фурье функции  $u(x)$ . Подпространствами  $E_\rho^\alpha$  являются пространства

$$E_\rho^{\alpha, \circ} = \{u \in E_\rho^\alpha(\Pi) \mid u = 0 \text{ при } \psi = a, \psi = b\},$$

$$E_{\rho, n}^\alpha = \{u \in E_\rho^\alpha(\Pi) \mid D_x^m D_\psi^k u \in E_\rho^\alpha(\Pi), 0 \leq m + k \leq n\},$$

$D$  — оператор дифференцирования. Решение данной задачи ищется в пространстве

$$H_\rho^\alpha(\Pi) = \{u \in E_\rho^{\alpha, \circ}(\Pi) \mid u \in E_{\rho, 2}^\alpha(\Pi_j), j = 1, 2\}$$

с нормой

$$\|u\|_{H_\rho^\alpha} = \|u\|_{E_\rho} + \max_{j=1,2} \sum_{1 \leq m+k \leq 2} \|D_x^m D_\psi^k u\|_{E_\rho^\alpha(\Pi_j)}.$$

Для доказательства теоремы существования строится решение задачи (2) в предположении, что правые части уравнения и граничных условий известны. Это решение может быть представлено в виде

$$w = \varepsilon^{-2} \frac{3W(\psi)}{F_1^2 + rF_2^2} (D_x^2 - I)^{-1} \left( \varphi + \int_0^h F^2(\psi) W(\psi) f d\psi \right) + L_\varepsilon \langle f, \varphi \rangle, \quad (19)$$

где функция  $W(\psi)$  определена формулой (15),  $D_x$  — оператор дифференцирования по  $x$ ,  $L_\varepsilon \langle f, \varphi \rangle$  — билинейный оператор, равномерно ограниченный по  $\varepsilon$ .

Для вывода операторного уравнения возьмем  $f$  и  $\varphi$  как функции от  $w$ . Подставляя в (2)  $w = C_0 W(\psi) + \varepsilon v(x, \psi)$  и оставляя в левой части только слагаемые, линейные по  $v$ , получим представление  $f$  и  $\varphi$  в виде

$$\varphi = \varepsilon \varphi_1 + \varepsilon^2 \varphi_2 + \varepsilon^3 R_\varphi, \quad f = \varepsilon f_1 + \varepsilon^2 f_2 + \varepsilon^3 R_f, \quad (20)$$

где

$$\varphi_1 = \frac{C_0 F_1^2 (1+r)^2 - 3C_0(1+r) F_1^1 + 2C_0^2 + 2r(F_1^2 + F_2^2) - 3rv_y(x, 1)}{r(r+1)},$$

$$\varphi_2 = \left( -5(r-1)C_0^4 + 8 F_1^1 (r^2-1)C_0^3 - 3 F_1^1 (r-1)(r+1)^2 - 6rC_0^2(F_1^2 r - F_2^2) + \right. \\ \left. + 4r(F_1^3 + F_2^3)r + F_1^1 (r+1)(F_1^2 r - F_2^2)C_0 + (r-1)r^2(C_0^2 + 3v_y^2(x, 1)) \right) / (2r^3 + 2r^2),$$

$$f_1 = 3C_0 W' v_{yy} - W C_0'', \quad f_2 = W W' (2C_0'^2 + C_0 C_0'') + (3v_y - 6C_0^2 W'^2) v_{yy}.$$

Остатки  $R_f$  и  $R_\varphi$  — рациональные функции, числители которых — полиномы от  $C_0$  и  $D_x^k D_\psi^m v$  ( $0 \leq k + m \leq 2$ ), а знаменатели представимы в виде  $1 + \varepsilon F(C_0, v)$ . Таким образом, остатки  $R_f$  и  $R_\varphi$  равномерно ограничены по  $\varepsilon$  с константой, зависящей от  $\|C_0\|_{E_{\rho,2}}$ .

Подставляя в (19) разложение  $f$  и  $\varphi$  по формуле (20), получим асимптотическое представление для  $v$ :

$$v = W(\psi)(D_x^2 - I)^{-1} \left( f_1(C_0) - P_2(C_0)v(x, 1) - K\langle v, v \rangle \right) + \varepsilon \Phi(v, \varepsilon), \quad (21)$$

где

$$P_2(C_0) = \frac{18(1+r)^2}{1+r^3} \left( \frac{C_0^2}{r(1+r)} - \frac{C_0 F_1}{r} \right),$$

$$K\langle v, v \rangle = -\frac{3}{2(1+r)^2} \left( \int_0^1 v_y^2 dy - r \int_1^{1+r} v_y^2 dy \right),$$

величина  $\Phi_\varepsilon$  равномерно ограничена по  $\varepsilon$ . Оператор правой части уравнения (21) — сжимающий. Итак, справедлива

**Теорема.** *Для чисел Фруда*

$$F_1 = \frac{1}{1+r} + \varepsilon F_1 + \varepsilon^2 R_{F_1},$$

$$F_2 = \frac{r}{1+r} - \varepsilon F_1 + \varepsilon^2 R_{F_2},$$

где  $\varepsilon$  — минимальный положительный корень уравнения (8), существует решение задачи об уединенных волнах (11), которое представимо в виде

$$y = 1 + \varepsilon C_0(\varepsilon x) + \varepsilon v(\varepsilon x),$$

где функция  $v(x)$  ограничена при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

## Список литературы

- [1] Овсянников Л. В., Макаренко Н. И., Налимов В. И. и др. *Нелинейные проблемы теории поверхностных и внутренних волн*. Наука, Новосибирск, 1985.
- [2] ХАБАХПАШЕВА Т. И. Уединенные волны в двухслойной жидкости. В: *Динамика сплошной среды*. Ин-т гидродинамики СО АН СССР, Новосибирск. Вып. 69, 1985, 96–122.
- [3] МАКАРЕНКО N. I. Smooth bore in a two-layer fluid. In: *Intern. Series of Numerical Mathematics*. **106**. Birkhäuser Verlag, Basel, 1992.
- [4] CRAIG W., STERNBERG P. Symmetry of the free-surface flows. *Arch. Rat. Mech. Anal.* **118**, No. 1, 1992, 1–36.