О ЧИСЛЕННЫХ АЛГОРИТМАХ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНО-ДИСПЕРСИОННЫХ МОДЕЛЕЙ МЕЛКОЙ ВОДЫ В ДВУМЕРНОМ СЛУЧАЕ*

Л. А. Компаниец
Вычислительный центр СО РАН, Красноярск, Россия

Рассматриваются разностные схемы для двумерных вариантов нелинейно–дисперсионных моделей мелкой воды. Анализируются диссипативные и дисперсионные свойства разностных схем, приводятся результаты численных расчетов.

1. Описание нелинейно-дисперсионных моделей в двумерном случае

Следуя [1], проанализируем дисперсионные соотношения нелинейно-дисперсионных моделей (н.-д.м.) в двумерном случае. Этот анализ позволяет выделить по крайней мере три класса.

Один класс составляют н.-д.м. Грина — Нагди [2], Пелиновского — Железняка [4], Базденкова — Морозова — Погуцце [5], первая модель Перегрина [6], третья модель Дорфмана — Яговдика [7], имеющие дисперсионное соотношение

$$\omega^2 = \frac{Hg(K_1^2 + K_2^2)}{1 + \frac{H^2}{3}(K_1^2 + K_2^2)},$$

в котором частота есть вещественная функция волновых чисел K_1, K_2 и возможно построение устойчивых разностных алгоритмов.

Уравнения модели Грина — Нагди [2, 3], имеют вид

$$h_t + \nabla(hV) = 0,$$

$$DV + g\nabla\eta = -1/6(-D^2H\nabla(2\eta - H) + D^2\eta\nabla(4\eta + H) + h\nabla(2D^2\eta - D^2H)),$$

где x, y — пространственные переменные, $V = (u, v)$ — вектор скорости, η — возвышение свободной поверхности, h — полная глубина, $h = \eta + H(x, y, t)$, H — глубина бассейна, $D = \partial/\partial t + V\nabla$, $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y)$.

При построении устойчивых численных алгоритмов необходимо встречающиеся в уравнении движения производные η_t, η_{tx}, η_{ty} и т. д. заменить на производные от u, v по пространственным переменным [3] ($H = H(x, y)$)

$$\eta_t + \nabla(hV) = 0,$$

$$\begin{gathered} V_t + (V\nabla)V + g\nabla\eta = 1/6\nabla[2\eta - H][(V\nabla)H]_t + \\ +1/6\nabla[2\eta - H](V\nabla)(V\nabla)H - 1/6\nabla[4\eta + H][-\nabla(hV) + (V\nabla)\eta]_t - \\ -1/6\nabla[4\eta + H](V\nabla)[-\nabla(hV) + (V\nabla)\eta] - 1/3h[\nabla(-\nabla(hV) + (V\nabla)\eta]_t - \\ -1/3h\nabla[(V\nabla)(-\nabla(hV + (V\nabla)\eta))] + 1/6h\nabla[(V\nabla)(V\nabla)H] + 1/6h[\nabla(V\nabla)H]_t. \end{gathered} \tag{1}$$

В численных расчетах применяется следующая форма записи:

$$\eta_t + \nabla(hV) = 0,$$

$$\begin{gathered} u - 1/6\partial/\partial x[2\eta - H](V\nabla)H + 1/6\partial/\partial x(4\eta + H)[-\nabla(hV) + (V\nabla)\eta] + \\ +1/3h\partial/\partial x[-\nabla(hV) + (V\nabla\eta)] - 1/6h\partial/\partial x((V\nabla)H) = B1, \\ v - 1/6\partial/\partial y[2\eta - H](V\nabla)H + 1/6\partial/\partial y(4\eta + H)[-\nabla(hV) + (V\nabla)\eta] + \\ +1/3h\partial/\partial y[-\nabla(hV) + (V\nabla\eta)] - 1/6h\partial/\partial y((V\nabla)H) = B2, \\ B_t = \Phi(\eta, u, v, H), \end{gathered} \tag{2}$$

где $B = (B1, B2)$,

$$\begin{gathered} \Phi(\eta, u, v, H) = 1/6\nabla[2\eta - H](V\nabla)(V\nabla)H - 1/6\nabla[4\eta + H](V\nabla)[-\nabla(hV) + \\ +(V\nabla)\eta] - 1/3h\nabla[(V\nabla(-\nabla(hV)) + (V\nabla)\eta] + \\ +1/6\nabla[(V\nabla)(V\nabla)H] - 1/6(V\nabla)H\nabla(-\nabla(hV)) + \\ +2/3(-\nabla(hV) + (V\nabla)\eta)\nabla(-\nabla(hV)) + 1/3\nabla(-\nabla(hV) + \\ +(V\nabla)\eta)(-\nabla(hV))) - 1/6(V\nabla)H(-\nabla(hV) - g\nabla\eta - (V\nabla)V. \end{gathered}$$

Несложные выкладки показывают, что уравнения (1) совпадают с уравнениями модели Пелиновского — Железняка

$$\eta_t + \nabla(hV) = 0,$$

$$V_t + (V\nabla)V + g\nabla\eta = E,$$

где

$$\begin{gathered} E = \frac{1}{h}\nabla(\frac{h^3}{3}R + \frac{h^2}{2}Q) - \nabla H(\frac{h}{2}R + Q), \\ R = \frac{\partial(\nabla V)}{\partial t} + (V\nabla)\nabla V - (\nabla V)^2, \\ Q = V_t\nabla H + (V\nabla)(V\nabla H) \end{gathered} \tag{3}$$

и модели Базденкова — Морозова — Погуцце

$$\eta_t + \nabla(hV) = 0,$$

$$V_t + (V\nabla)V + g\nabla\eta = \frac{1}{h}\nabla A - \frac{S}{h}\nabla H,$$

где

$$A = h^2 D[\frac{h}{3}\nabla V + \frac{1}{2}(V\nabla H)],$$

$$S = hD[\frac{h}{2}\nabla V + (V\nabla H)],$$

если в последней сделать такую же замену производных η_t, η_{tx}, η_{ty}, как при преобразовании модели Грина — Нагди.

Для построения численных алгоритмов используется как форма (2), так и форма (3).

Модель Пелиновского — Железняка может быть записана в обезразмеренном виде с явным выделением малых параметров нелинейности α и дисперсии β [8]. Так же, как в одномерном случае [1], полагая $\alpha = O(\beta)$ и отбрасывая в модели Пелиновского — Железняка члены порядка $O(\alpha\beta)$, получим н.-д.м.

$$\eta_t + \nabla(hV) = 0,$$

$$V_t + (V\nabla)V + g\nabla\eta = [\frac{1}{2}H\nabla(\nabla HV) - \frac{1}{6}H^2\nabla(\nabla V)]_t \tag{4}$$

(первую модель Перегрина), оставляя члены $O(\alpha)$, получим модель нелинейной мелкой воды

$$\eta_t + \nabla(hV) = 0,$$

$$V_t + (V\nabla)V + g\nabla\eta = 0, \tag{5}$$

и оставляя только члены порядка $O(1)$, получим модель линейной мелкой воды

$$\eta_t + \nabla(HV) = 0,$$

$$V_t + g\nabla\eta = 0. \tag{6}$$

Третья модель Дорфмана — Яговдика

$$V_t + V(V\nabla) + g\nabla\eta + 1/2\nabla(\tilde{H}hp_{tt}) = \nabla(1/3\tilde{H}^2\frac{\partial}{\partial t}\nabla V + 1/2H\nabla\tilde{H}V_t),$$

$$h_t + \nabla[(\tilde{H} + \eta - hp)V] + 1/2\nabla(\tilde{H}\nabla hp_t) = \nabla[3\tilde{H}(\nabla hp)^2V + \tilde{H}^2\nabla\tilde{H}\nabla V]$$

позволяет учесть зависимость изменения положения дна от времени. Здесь функция, задающая дно $H(x, y, t)$, представлена как разность функции $\tilde{H}(x, y)$, не зависящей от времени, и функции $hp(x, y, t)$, учитывающей зависимость этой функции от времени $H(x, y, t) = \tilde{H}(x, y) - hp(x, y, t)$.

Второй класс моделей составляют вторая модель Перегрина

$$V_t + V(V\nabla) + g\nabla\eta = 0,$$

$$h_t + \nabla(hV) + 1/2\nabla(-1/3H^3\nabla(\nabla V) + H^2\nabla(\nabla HV)) = 0,$$

$$H = H(x, y)$$

и ее обобщение на случай, когда глубина бассейна зависит от времени — вторая модель Дорфмана — Яговдика.

Они имеют дисперсионное соотношение с частотой, которая является мнимой функцией волновых чисел, и построение устойчивых разностных схем невозможно.

В третий класс входят первая модель Дорфмана — Яговдика

$$V_t + V(V\nabla) + g\nabla\eta + \nabla(\tilde{H}hp_{tt}) = 1/2\nabla^2(\tilde{H}^2 V_t),$$

$$h_t + \nabla[V(\tilde{H} + \eta - hp)] + 1/2\nabla^2(\tilde{H}^2 hp_t) = 1/6\nabla^3(\tilde{H}^3 V)$$

с теми же обозначениями, что и в третьей модели Дорфмана — Яговдика $H(x, y, t) = \tilde{H}(x, y) - hp(x, y, t)$ и Алешкова [9]

$$h_t + \nabla(hV) = \nabla[h\nabla H(V\nabla H) + (\nabla H(\nabla V) + \nabla(V\nabla H))h^2/2 + \nabla(\nabla V)h^3/6],$$

$$V_t + \nabla(g(h-H) + 1/2|V|^2) = \nabla[1/2(V\nabla H)^2 + [V_t\nabla H + V\nabla(V\nabla H)]h + [\nabla V_t + V\nabla V - (\nabla V)^2]h^2/2],$$

$$H = H(x, y)$$

с дисперсионным соотношением

$$\omega^2 = Hg(K_1^2 + K_2^2)\frac{1 + \frac{H^2}{6}(K_1^2 + K_2^2)}{1 + \frac{H^2}{2}(K_1^2 + K_2^2)},$$

в котором частота является вещественной функцией волновых чисел.

При численных расчетах используется запись модели Алешкова в виде

$$h_t + \nabla(hV) = \nabla Q, \quad Q = (Q1, Q2),$$

$$Q1 = \partial/\partial x[h\nabla H(V\nabla H) + (\nabla H(\nabla V) + \nabla(V\nabla H))h^2/2 + \nabla(\nabla V)h^3/6],$$

$$Q2 = \partial/\partial y[h\nabla H(V\nabla H) + (\nabla H(\nabla V) + \nabla(V\nabla H))h^2/2 + \nabla(\nabla V)h^3/6],$$

$$V - \nabla[(hV\nabla H) + 1/2h^2\nabla V] = \nabla C, \quad C_t = \Psi(\eta, u, v, H),$$

$$\Psi(\eta, u, v, H) = -h_t V\nabla H - hh_t\nabla V - g(h - H) - 1/2|V|^2 +$$
$$+1/2(V\nabla H)^2 + \nabla(V\nabla H) + h^2(V\nabla\nabla V + (\nabla V)^2). \tag{7}$$

Отметим, что модели Грина — Нагди и Базденкова — Морозова — Погуцце выведены без предположения о потенциальности течения, остальные из перечисленных выше — при этом предположении.

2. Описание численных алгоритмов в двумерном случае

Выпишем формулы двупараметрического семейства схем для нелинейно-дисперсионной модели Грина — Нагди в форме (2), аналогичного рассмотренному в [1] для одномерного случая:

$$\frac{\tilde{\eta}_{i,j} - \eta^n_{i,j}}{\Delta t} + \Delta_x(h^n_{i,j}u^n_{i,j}) + \Delta_y(h^n_{i,j}v^n_{i,j}) = 0,$$

$$\frac{B^{n+1}_{i,j} - B^n_{i,j}}{\Delta t} = \Phi(\eta_{ci,j}, u^n_{i,j}, v^n_{i,j}, H^n_{i,j}),$$

$$u^{n+1}_{i,j} - 1/6\Delta_x[2\tilde{\eta}_{i,j} - H^n_{i,j}](u^{n+1}_{i,j}\Delta_x H^n_{i,j} + v^{n+1}_{i,j}\Delta_y H^n_{i,j}) + 1/6\Delta_x(4\tilde{\eta}_{i,j} + H^n_{i,j})\times$$

$$\times\{-\Delta_x(\tilde{h}u_{i,j}^{n+1})-\Delta_y(\tilde{h}v_{i,j}^{n+1})+u_{i,j}^{n+1}\Delta_x\tilde{\eta}_{i,j}+v_{i,j}^{n+1}\Delta_y\tilde{\eta}_{i,j}\}+1/3\tilde{h}_{i,j}[-\Delta_{xx}(\tilde{h}u_{i,j}^{n+1})-$$

$$-\Delta_x\Delta_y(\tilde{h}v_{i,j}^{n+1})+\Delta_x(u_{i,j}^{n+1}\Delta_x\eta_{i,j}^n+v_{i,j}^{n+1}\Delta_y\eta_{i,j}^n)]-1/6\tilde{h}_{i,j}\Delta_x(u_{i,j}^{n+1}\Delta_xH_{i,j}^n+v_{i,j}^{n+1}\Delta_yH_{i,j}^n)=B1_{i,j}^{n+1},$$

$$v_{i,j}^{n+1}-1/6\Delta_y[2\tilde{\eta}_{i,j}-H_{i,j}^n](u_{i,j}^{n+1}\Delta_xH_{i,j}^n+v_{i,j}^{n+1}\Delta_yH_{i,j}^n)+1/6\Delta_y(4\tilde{\eta}_{i,j}+H_{i,j}^n)\times$$

$$\times\{-\Delta_x(\tilde{h}u_{i,j}^{n+1})-\Delta_y(\tilde{h}v_{i,j}^{n+1})+u_{i,j}^{n+1}\Delta_x\tilde{\eta}_{i,j}+v_{i,j}^{n+1}\Delta_y\tilde{\eta}_{i,j}\}+1/3\tilde{h}_{i,j}[-\Delta_x\Delta_y(\tilde{h}u_{i,j}^{n+1})-$$

$$-\Delta_{yy}(\tilde{h}v_{i,j}^{n+1})+\Delta_y(u_{i,j}^{n+1}\Delta_x\eta_{i,j}^n+v_{i,j}^{n+1}\Delta_y\eta_{i,j}^n)]-1/6\tilde{h}_{i,j}\Delta_y(u_{i,j}^{n+1}\Delta_xH_{i,j}^n+v_{i,j}^{n+1}\Delta_yH_{i,j}^n)=B2_{i,j}^{n+1},$$

$$\frac{\eta_{i,j}^{n+1}-\eta_{i,j}^n}{\Delta t}+\Delta_x(h_{ci,j}^nu_{ci,j}^n)+\Delta_y(h_{ci,j}^nv_{ci,j}^n)=0, \tag{8}$$

где

$$\eta_{ci,j}=\omega\tilde{\eta}_{i,j}+(1-\omega)\eta_{i,j}^n,\quad h_{ci,j}=\eta_{ci,j}+H_{i,j},\quad \tilde{h}_{i,j}=\tilde{\eta}_{i,j}+H_{i,j},$$

$$u_{ci,j}=\delta u_{i,j}^{n+1}+(1-\delta)u_{i,j}^n,\quad v_{ci,j}=\delta v_{i,j}^{n+1}+(1-\delta)v_{i,j}^n,$$

$$\Delta_xf_{i,j}^n=\frac{f_{i+1,j}^n-f_{i-1,j}^n}{2\Delta x},\quad \Delta_yf_{i,j}^n=\frac{f_{i,j+1}^n-f_{i,j-1}^n}{2\Delta y},$$

$$\Delta_{xx}f_{i,j}^n=\frac{f_{i+1,j}^n-2f_{i,j}^n+f_{i-1,j}^n}{\Delta x^2},\quad \Delta_{yy}f_{i,j}^n=\frac{f_{i,j+1}^n-2f_{i,j}n+f_{i,j-1}^n}{\Delta y^2}.$$

Отбрасывая здесь “лишние"члены, получим разностные схемы для н.-д. модели Перегрина, нелинейной и линейной мелкой воды.

Двупараметрическое семейство для н.-д. модели Грина — Нагди при предположении потенциальности течения отличается от (8) тем, что в них условие $u_y=v_x$ позволяет при вычислении $u_{i,j}^{n+1},v_{i,j}^{n+1}$ заменить в дисперсионных членах операторы

$$\Delta_{xx}u_{i,j}^{n+1}+\Delta_{xy}v_{i,j}^{n+1},\quad \Delta_y\Delta_xu_{i,j}^{n+1}+\Delta_{yy}v_{i,j}^{n+1}$$

на

$$\Delta_{xx}u_{i,j}^{n+1}+\Delta_{yy}u_{i,j}^{n+1},\quad \Delta_{xx}v_{i,j}^{n+1}+\Delta_{yy}v_{i,j}^{n+1} \tag{9}$$

соответственно.

Опуская “лишние"члены, получаем разностный алгоритм типа (9) для модели Перегрина, но для него замена $u_y=v_x$ в дисперсионных членах справедлива только для $H(x,y)=\mathrm{const}$.

Двупараметрическое семейство разностных схем для модели Алешкова (7) имеет вид

$$\frac{\tilde{\eta}_{i,j}-\eta_{i,j}^n}{\Delta t}+\Delta_x(h_{i,j}^nu_{i,j}^n)+\Delta_y(h_{i,j}^nv_{i,j}^n)=\Delta_xQ_1(h_{i,j}^n,u_{i,j}^n,v_{i,j}^n,H_{i,j})+\Delta_yQ_2(h_{i,j}^n,u_{i,j}^n,v_{i,j}^n,H_{i,j}),$$

$$\frac{C_{i,j}^{n+1}-C_{i,j}^n}{\Delta t}=\Psi(\eta_{ci,j},u_{i,j}^n,v_{i,j}^n,H_{i,j}),$$

$$u_{i,j}^{n+1}-\Delta_x\tilde{h}_{i,j}(u_{i,j}^{n+1}\Delta_xH_{i,j}+v_{i,j}^{n+1}\Delta_yH_{i,j})-1/2(\Delta_xu_{i,j}^{n+1}+\Delta_yv_{i,j}^{n+1})\Delta_x(\tilde{h}_{i,j})^2-$$

$$-1/2(\tilde{h}_{i,j})^2(\Delta_{xx}u_{i,j}^{n+1}+\Delta_{yy}u_{i,j}^{n+1})=\Delta_xC_{i,j}^{n+1},$$

$$v_{i,j}^{n+1}-\Delta_y\tilde{h}_{i,j}(u_{i,j}^{n+1}\Delta_xH_{i,j}+v_{i,j}^{n+1}\Delta_yH_{i,j})-1/2(\Delta_xu_{i,j}^{n+1}+\Delta_yv_{i,j}^{n+1})\Delta_y(\tilde{h}_{i,j})^2-$$

$$-1/2(\tilde{h}_{i,j})^2(\Delta_{xx}v_{i,j}^{n+1}+\Delta_{yy}v_{i,j}^{n+1})=\Delta_yC_{i,j}^{n+1},$$

$$\frac{\eta_{i,j}^{n+1}-\eta_{i,j}^{n}}{\Delta t}+\Delta_x(h_{ci,j}u_{ci,j})+\Delta_y(h_{ci,j}v_{ci,j})=\Delta_x Q_1(h_{ci,j},u_{ci,j},v_{ci,j},H_{i,j})+$$

$$+\Delta_y Q_2(h_{ci,j},u_{ci,j},v_{ci,j},H_{i,j}). \qquad (10)$$

При использовании условия (9) в схеме (8) и всегда в модели Алешкова при нахождении скоростей на следующем шаге по времени решается эллиптическая система уравнений и можно использовать известные методы их решения.

Четкое выделение в моделях Грина — Нагди и Алешкова гиперболической и эллиптической частей позволяет применять для гиперболической части различные известные аппроксимации. Так, разностные алгоритмы типа leap-frog для моделей Грина — Нагди и Алешкова получаются заменой в (8) и (10) разностных аппроксимаций для производных по времени на центральные разности, а алгоритм типа предиктора-корректора для модели Пелиновского — Железняка [10] легко обобщается на двумерный случай через схему вращения, предложенную в [11] для двумерного уравнения переноса.

Определяя значения $\eta_{i,j}^n$, $H_{i,j}^n$ в целых точках разностной сетки, а $u_{i+1/2,j}^n$, $v_{i,j+1/2}^n$ в полуцелых, получим разностную схему с разнесенными значениями возвышения свободной поверхности и скорости.

3. Анализ диссипативных и дисперсионных свойств численных алгоритмов в двумерном случае

В таблице выписаны собственные значения $\rho_i(\xi,\phi)$ матриц перехода линейных аналогов разностных схем для н.-д. моделей первого и третьего классов [12]. Здесь $\xi = K_1\Delta x$, $\phi = K_2\Delta x$, $\varkappa_1 = \Delta t/\Delta x$, $\varkappa_2 = \Delta t/\Delta y$. Анализ диссипативных свойств показывает, что для разностных схем leap-frog условия устойчивости схемы становятся более ограничительными, чем в (8) при условии (9) для н.-д.м. первого и в (10) для н.-д.м. третьего класса. Если $\delta+\omega=1$, то $|\rho_i|=1$ для любого i и всех двупараметрических семейств схем, что согласуется со свойствами гармонических решений для самих моделей.

На рис. 1 изображены фазовые скорости гармонических решений, определяемые из дисперсионного соотношения для моделей первого класса и дисперсионного соотношения для линейных аналогов разностных схемы (8) и схемы (8) при условии (9). На рис. 2 изображены фазовые скорости гармонических решений, определяемые из дисперсионного соотношения для моделей третьего класса и дисперсионного соотношения для линейных аналогов разностной схемы (10) и разностной схемы с разнесенными разностями для моделей третьего класса. Дисперсионные соотношения для разностных схем вычислялись при $\delta+\omega=1$, $\quad g=H_0=1$, $\quad \Delta x=\Delta y=0.065$, $\quad \Delta t=0.045$.

Анализ рис. 1, 2 показывает, что фазовые скорости для гармонических решений (8) и (8) при условии (9) отличаются только для больших значений волновых чисел K_1, K_2. Так же, как и в одномерном случае, для модели Алешкова фазовые скорости гармонических решений модели и разностной схемы (10) для больших значений модуля волнового числа K отличаются сильнее, чем чем для модели Грина — Нагди и аппроксимирующих ее уравнений (8) и (8) при условии (9). Применение разностной схемы с разнесенными значениями позволяет улучшить дисперсионные свойства разностной схемы для моделей третьего класса.

Таблица

Схема	ρ	Условие устойчивости
(8)	$\rho_{1,2} = 1 - \dfrac{E_1}{2}(\omega+\delta) \pm i\sqrt{E_1(1 - \dfrac{(\omega+\delta)^2}{4}E_1)},\ \rho_3 = 1,$ $E_1 = \dfrac{gH_0(\varkappa_1^2 \sin^2\xi C_y + \varkappa_2^2 \sin^2\phi C_x) - 2H_0 g\varkappa_1\varkappa_2 \sin\xi \sin\phi C_{xy}}{C_x C_y - C_{xy}^2},$ $C_x = 1 + 4/3H_0^2 \sin^2(\xi/2)/\Delta x^2,$ $C_y = 1 + 4/3H_0^2 \sin^2(\phi/2)/\Delta y^2,\ C_{xy} = \dfrac{H_0^2}{3}\dfrac{\sin\xi}{\Delta x}\dfrac{\sin\phi}{\Delta y}$	$\|\rho_{1,2}\| \le 1$ для $\varkappa_1 = \varkappa_2$ $\varkappa_1^2 \le \dfrac{2}{(\omega+\delta)^2 gH_0}$
(8) при условии (10)	$\rho_{1,2} = 1 - \dfrac{B_1}{2}(\omega+\delta) \pm i\sqrt{B_1(1 - \dfrac{(\omega+\delta)^2}{4}B_1)},\ \rho_3 = 1,$ $B_1 = gH_0(\varkappa_1^2 \sin^2\xi + \varkappa_2^2 \sin^2\phi)E_1,$ $E_1 = \dfrac{1}{1 + 4/3H_0^2(\sin^2(\xi/2)/\Delta x^2 + \sin^2(\phi/2)/\Delta y^2)}$	$\|\rho_{1,2}\| \le 1$ $\varkappa_1^2 + \varkappa_2^2 \le \dfrac{4}{(\omega+\delta)^2 gH_0}$
(11)	$\rho_{1,2} = 1 - \dfrac{B_2}{2}(\omega+\delta) \pm i\sqrt{B_2(1 - \dfrac{(\omega+\delta)^2}{4}B_2)},\ \rho_3 = 1,$ $B_2 = gH_0(\varkappa_1^2 \sin^2\xi + \varkappa_2^2 \sin^2\phi)E_2,$ $E_2 = \dfrac{1 + 2/3H_0^2(\sin^2(\xi/2)/\Delta x^2 + \sin^2(\phi/2)/\Delta y^2)}{1 + 2H_0^2(\sin^2(\xi/2)/\Delta x^2 + \sin^2(\phi/2)/\Delta y^2)}$	$\|\rho_{1,2}\| \le 1$ $\varkappa_1^2 + \varkappa_2^2 \le \dfrac{4}{(\omega+\delta)^2 gH_0}$
Leap-frog	$\rho_{1,2}^2 = 1 - 2B \pm i2\sqrt{B(1-B)},\ \rho_{3,4} = 1,$ $B = B_1$ для модели Грина — Нагди, $B = B_2$ для модели Алешкова	$\|\rho_{1,2}\| = 1$ $\varkappa_1^2 + \varkappa_2^2 \le \dfrac{1}{gH_0}$
Схемы с разнесенными разностями	$\rho_{1,2} = 1 - \dfrac{F}{2}(\omega+\delta) \pm i\sqrt{F(1 - \dfrac{(\omega+\delta)^2}{4}F)},\ \rho_3 = 1,$ $F = 4gH_0(\varkappa_1^2 \sin^2(\xi/2) + \varkappa_2^2 \sin^2(\phi/2))E_1$ для модели Грина — Нагди, $F = 4gH_0(\varkappa_1^2 \sin^2(\xi/2) + \varkappa_2^2 \sin^2(\phi/2))E_2$ для модели Алешкова	$\|\rho_3\| = 1$ $\varkappa_1^2 + \varkappa_2^2 \le \dfrac{1}{(\omega+\delta)^2 gH_0}$
Схема вращения для модели Грина — Нагди	$\rho_{1,2} = 1 - \dfrac{E_3}{A1} \pm i\sqrt{\dfrac{E_4}{A_1}},\ \rho_3 = 1,$ $E_3 = gH/2(\varkappa_1^2(1-\cos\xi)(1+\cos\phi)) + \varkappa_2^2(1+\cos\xi)(1-\cos\phi)$ $E_4 = 1/4(\varkappa_1^2 \sin^2\xi(1+\cos\phi)^2 + \varkappa_2^2 \sin^2\phi(1+\cos\xi)^2)$	$\|\rho_{1,2}\| \le 1$ $\max(\varkappa_1, \varkappa_2) \le 1$

Диссипативные свойства разностных алгоритмов иллюстрирует решение задачи о распаде начального возвышения при нулевой начальной скорости в квадратном бассейне, на сторонах которого ставятся условия отражения от твердой стенки. Рис. 3 дает начальное возвышение на сетке $m \times n$:

$$\eta(x, y) = A\sqrt{r^2 - (16.8 - x)^2 - (16.8 - y)^2}$$

$$n = 85, \quad m = 85, \quad r = 10, \quad \Delta x = 0.4, \quad \Delta y = 0.4, \quad A = 0.05$$

и решение этой задачи на момент времени $80\Delta t$, $160\Delta t$, $\Delta t = 0.1$ по разностной схеме для модели Перегрина (8) с $\omega + \delta = 2$.

Рис. 4, 5 дают волновые картины на момент времени $200\Delta t$, когда волна отразилась от стенок, для моделей Перегрина, нелинейной и линейной мелкой воды. Влияние сглаживающего параметра $\omega+\delta$ для моделей нелинейной и линейной мелкой воды более существенно, чем для нелинейно-дисперсионных моделей, так как в последних $|\rho_i|$ при малых Δx, Δy близки к 1 для всех $\omega+\delta$.

Список литературы

[1] Kompaniets L. A. Analysis of difference algoritms for nonlinear dispersive shallow water models. *Russ. J. Num. Anal. and Math. Model.*, **11**, №3, 1996, 205–222.

[2] Green A. E., Naghdi P. M. A derivation of propagation in water of variable depth. *J. Fluid Mech.*, **71**, 1976, 237–246.

[3] Ertekin R. C., Webster W. C., Wehausen J. V. Waves caused by a moving disturbance in a shallow channel of finite width. *J. Fluid Mech.*, **169**, 1986, 275–292.

[4] Вольцингер Н. Е., Клеванный К. А., Пелиновский Е. Н. *Длинноволновая динамика прибрежной зоны.* Гидрометеоиздат, Л., 1989.

[5] Базденков С. В., Морозов Н. И., Погуцце О. Р. Дисперсионные эффекты в двумерной гидродинамике. *Докл. АН СССР*, **293**, 1987, 819–822.

[6] Peregrine D. H. Long waves on a beach. *J. Fluid Mech.*, **27**, №4, 1967, 815–827.

[7] Дорфман А. А., Яговдик Г. И. Уравнения приближенной нелинейно-дисперсионной теории длинных гравитационных волн, возбуждаемых перемещениями дна и распространяющихся в бассейне переменной глубины. *Числ. методы мех. спл. среды*, **8**, №1, 1977, 36–48.

[8] Железняк М. И., Пелиновский Е. Н. Физико-математические модели наката цунами на берег. В *“Накат цунами на берег”*, (Под ред. Е. Н. Пелиновского), ИПФ АН СССР, Горький, 1985, 8–33.

[9] Алешков Ю. З. *Теория взаимодействия волн с преградами.* Изд-во Ленингр. ун-та, Л., 1990.

[10] Железняк М. И. Воздействие длинных волн на сплошные вертикальные преграды. В *“Накат цунами на берег”* (Под ред. Е. Н. Пелиновского), ИПФ АН СССР, Горький, 1985, 122–139.

[11] Gourlay A. R., Morris J. L. Finite-difference methods for nonlinear hyperbolic systems. *Math. Comput.*, **22**, №104, 1968, 28–39.

[12] Рихтмайер Р., Мортон К. *Разностные методы решения краевых задач.* Мир, М., 1972.

Поступила в редакцию 15 сентября 1995 г.

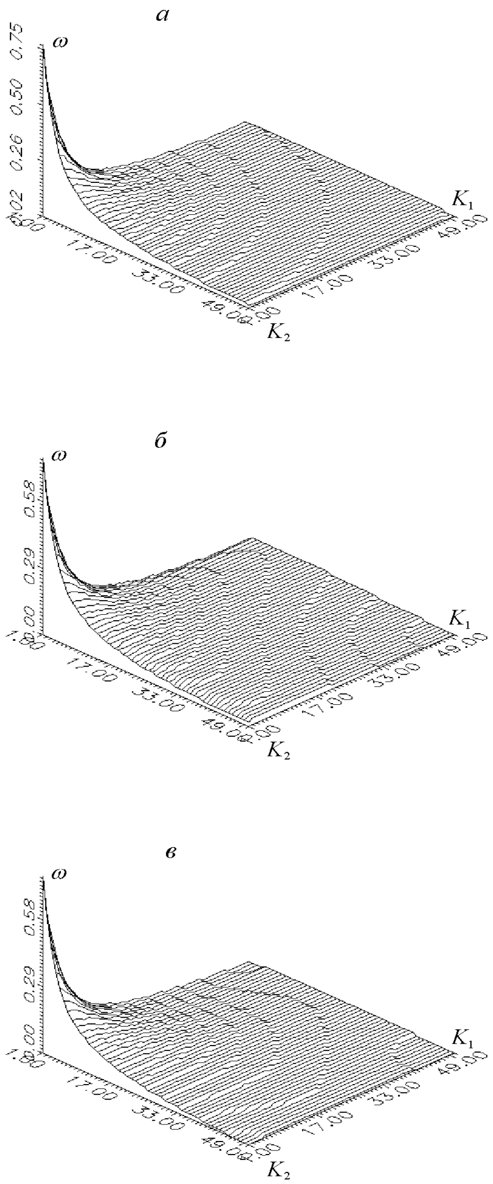


Рис. 1. Фазовые скорости, соответствующие: *а* — дисперсионному соотношению для моделей первого класса, *б* — линейному аналогу разностной схемы (8), *в* — линейному аналогу разностной схемы (8) при условии (10).

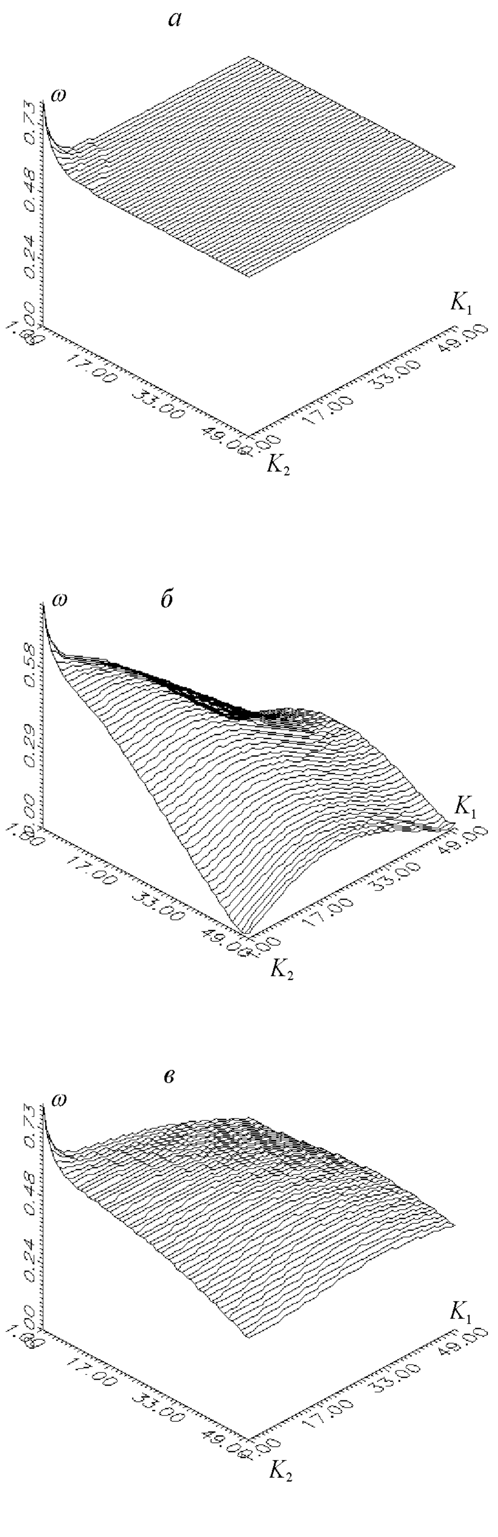
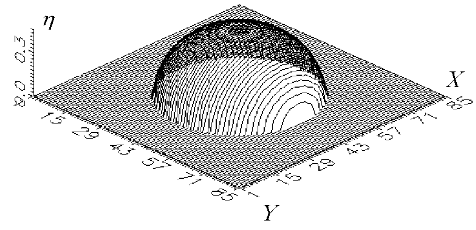
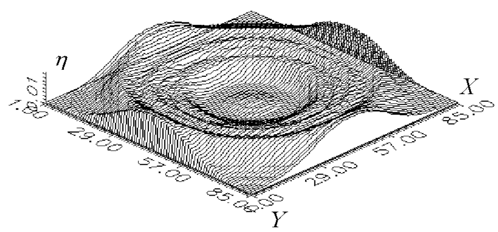


Рис. 2. Фазовые скорости, соответствующие дисперсионному соотношению для моделей третьего класса (*а*), линейному аналогу разностной схемы (11) (*б*), разностной схеме с разнесенными разностями (*в*).

а



б



в

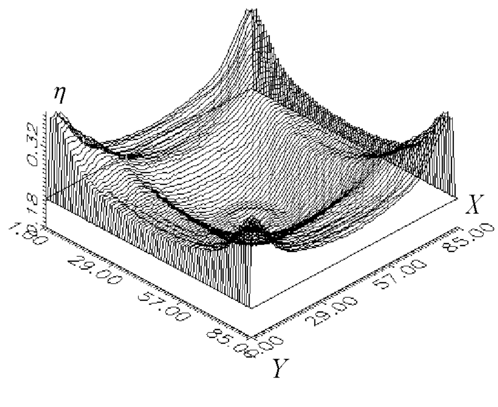
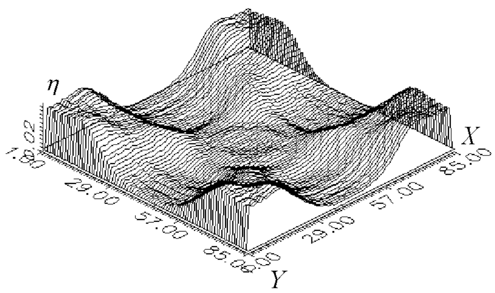
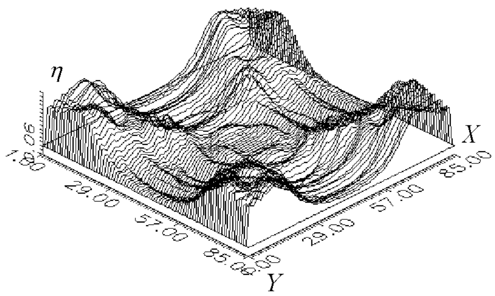


Рис. 3. Волновые картины задачи о распаде начального возвышения, модель Перегрина, $\omega+\delta=2$ при $t=0$ (*а*), $80\Delta t$ (*б*), $160\Delta t$ (*в*).

а



б



в

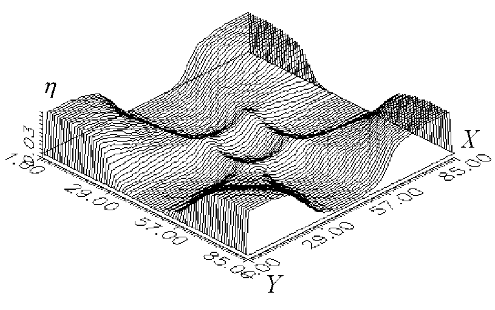
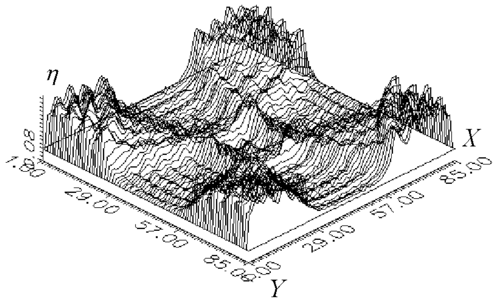
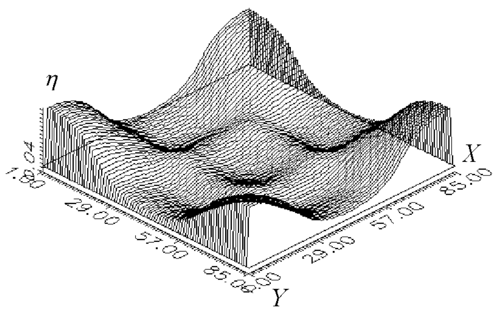


Рис. 4. Волновые картины на момент времени $200\Delta t$: *а* модель Перегрина, $\omega+\delta=2$ (*а*), $\omega+\delta=1$ (*б*), модель нелинейной мелкой воды, $\omega+\delta=2$ (*в*).

а



б



а

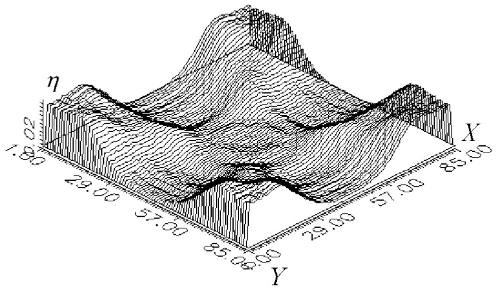


Рис. 5. Волновые картины на момент времени $200\Delta t$: модель нелинейной мелкой воды, $\omega + \delta = 1$ (*а*), модель линейной мелкой воды, $\omega + \delta = 2$ (*б*), $\omega + \delta = 1$ (*в*).