

ОБ ОДНОМ АЛЬТЕРНИРУЮЩЕМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ В ОБЛАСТЯХ СЛОЖНОЙ ФОРМЫ*

М. Н. БАГАНОВА, А. И. ИБРАГИМОВ

Институт проблем нефти и газа РАН, Москва, Россия

Рассматривается течение слабосжимаемой жидкости в пласте, ограниченном кровлей, подошвой и контуром питания. Этот процесс сводится к исследованию смешанной задачи для уравнения параболического типа в дивергентной форме. Предлагается конструктивный метод построения решения смешанной задачи в форме теплового потенциала. В основе метода построения решения начально-краевых задач в областях сложной формы лежит параболический аналог альтернирующего алгоритма Шварца.

1. Постановка задачи

Рассматривается течение слабосжимаемой жидкости в области, на одной части границы которой задано условие непротекания, а на другой известна функция распределения давления. Течение в области подчинено закону Дарси [1]:

$$\vec{v} = -\frac{k}{\mu} \nabla P.$$

Здесь k — проницаемость пласта, а μ — вязкость флюида. Уравнение состояния флюида $\rho = \rho_0 e^{\beta(P-P_0)}$. $P(x, t)$ — функция распределения давления, ρ_0 — плотность, β — коэффициент объемного сжатия; $\beta(P - P_0)$ — мало [2]. В этом случае для $P(x, t)$ получаем начально-краевую задачу со смешанными граничными условиями для параболического уравнения в дивергентной форме. В начальный момент $t = 0$ давление в пласте равно пластовому давлению. Граница Ω состоит из поверхности скважины ∂W , контура питания Γ_0 , кровли Γ_1 и подошвы Γ_2 (рис. 1). Предполагается, что давление на скважине задано и равно P_c , на контуре питания Γ_0 задано контурное давление P_0 , нормальная составляющая скорости фильтрации равна нулю на кровле Γ_1 и подошве Γ_2 .

Всюду в дальнейшем будем считать, что пласт изотропен. Для давления $P(x, t)$ мы получаем начально-краевую задачу

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \kappa \Delta P \quad \text{в } \Omega \times [0, T],$$

*© М. Н. Баганова, А. И. Ибрагимов, 1996.

$$\begin{aligned}
P \Big|_{t=0} &= P_{\text{пл}}, \\
P &= P_c \quad \text{при } x \in W, \quad 0 < t \leq T \\
\frac{\partial P}{\partial n} &= 0 \quad \text{на } \Gamma_1 \cup \Gamma_2, \quad 0 < t \leq T, \\
P &= P_0 \quad \text{на } \Gamma_0, \quad 0 < t \leq T,
\end{aligned}$$

$P_{\text{пл}}$ ограничено и

$$\lim_{x \rightarrow \infty} P_{\text{пл}} = P_{\infty}.$$

В этом случае в любой момент времени t $P(x, t) \rightarrow P_{\infty}$ при $x \rightarrow \infty$ [3].

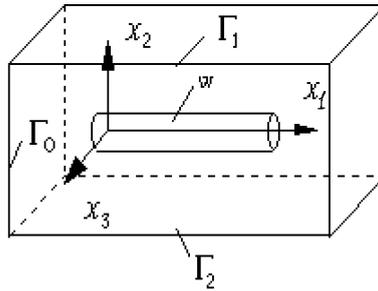


Рис. 1.

2. Описание метода решения задачи в общем виде

В основе метода решения задачи лежит идея суперпозиции функций источников для смешанной задачи [1]:

$$\frac{\partial G}{\partial t} = \kappa \Delta_x G(x - \xi; t - \tau) \quad \text{при } x \neq \xi, \quad t > \tau \quad \Omega \times [0, T],$$

$$\begin{aligned}
G \Big|_{t \leq \tau} &= 0 \quad \text{при } t \leq \tau, \\
\frac{\partial G}{\partial n_x} \Big|_{\Gamma_1} &= 0, \\
\frac{\partial G}{\partial n_x} \Big|_{\Gamma_2} &= 0.
\end{aligned}$$

Пусть источники $\{\xi_i\}_{i=1}^N$ расположены на оси скважины W , $\xi_{i+1} - \xi_i = \Delta$, а сама скважина представляет собой цилиндр радиуса $r = r_c$, длины L и осью, совпадающей с осью x_1 . Далее разбиваем временной отрезок $[0; T]$ точками $\{\tau_k\}_{k=1}^M$, $\tau_{k+1} > \tau_k$, $\tau_0 = 0$, $\tau_{k+1} - \tau_k = h$, а $\tau_{M+1} = T$. Решение задачи в момент времени t_k ищем в виде

$$P = \sum_{k=0}^{k_1} \sum_{i=1}^N \beta_i^k \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} G(x - \xi_i, t - \tau) d\tau,$$

так, чтобы $P \Big|_{t=t_1} = P_c$ при $x = \xi_i^M \in \partial W$, где функция источника, которую мы в дальнейшем будем называть функцией Грина, удовлетворяет соответствующим начально-краевым условиям. Неизвестные коэффициенты $\{\beta_i^k\}$ находятся из условия

$$P \Big|_{t=t_k} = P_c \quad \text{при } x = x_i^M \in \partial T, \quad i = 1, N. \quad (1)$$

Здесь x_i^M — последовательность точек на границе скважины, которая фиксирована в каждый данный момент времени $t = t_k$. При этом процедура по времени устроена таким образом, что все $\{\beta_i^k\}$ для $k \leq k_0$ вычисляются для момента времени $t = \tau_k$ из соотношения (7) и не меняются при нахождении последовательности $\{\beta_i^l\}$ для $l > k_0$. Предлагается численно-аналитический метод построения решения задачи Зарембы на основе альтернирующего алгоритма типа алгоритма Шварца. Область течения при этом рассматривается как суперпозиция цилиндрических по времени областей, пересекающиеся по пространственным переменным.

Решение внутри одного временного слоя ищется в виде теплового потенциала простого слоя с неизвестной функцией распределения. Влияние предыдущих временных слоев учитывается как заданное возмущение задачи на данном временном слое.

Далее с помощью альтернирующего алгоритма решение сшивается по непрерывности в двух пересекающихся областях.

Рассмотрим задачу А:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \varkappa \Delta u \quad \Omega \setminus (H_1 \cup H_2), \\ u \Big|_{t=0} &= \phi(x) \quad \phi(x) \rightarrow 0 \quad \text{при } x \rightarrow \infty, \\ u(x, t) \Big|_{H_1} &= f_1(x, t), \\ u(x, t) \Big|_{H_2} &= f_2(x, t), \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= 0 \quad \text{на } \Gamma_1 \times (0; T] \cup \Gamma_2 \times (0; T], \end{aligned}$$

здесь D — слой, лежащий между гиперплоскостями Γ_1 и Γ_2 :

$$\overline{D_1} \cap \overline{D_2} = \emptyset, \quad D_1 \text{ и } D_2 \text{ — компакты, } D_1 \text{ и } D_2 \in D,$$

$$\Omega = D \times [0; T], \quad H_1 = D_1 \times (0, T] \quad H_2 = D_2 \times (0, T].$$

Алгоритм Шварца в общей постановке для задачи А на данном временном интервале для уравнения теплопроводности выглядит следующим образом (ср. [4], [5]).

1-й шаг: последовательно решаются две задачи для нахождения функций u_0 и v_0

$$\frac{\partial u_0}{\partial t} = \varkappa \Delta u_0 \quad \text{в } \Omega \setminus H_1,$$

$$u_0(x, t) \Big|_{H_1} = f_1(x, t),$$

$$\begin{aligned}
u_0 \Big|_{t=0} &= \phi(x), \\
\frac{\partial u_0}{\partial n} &= 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_1 \times (0, T] \cup \Gamma_2 \times (0, T], \\
\frac{\partial v_0}{\partial t} &= \varkappa \Delta v_0 \quad \text{в} \quad \Omega \setminus H_2, \\
v_0(x, t) \Big|_{H_2} &= f_2(x, t) - u_0 \Big|_{H_2}, \\
v_0 \Big|_{t=0} &= 0, \\
\frac{\partial v_0}{\partial n} &= 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_1 \times (0, T] \cup \Gamma_2 \times (0, T];
\end{aligned}$$

Ж-й шаг:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_j}{\partial t} &= \varkappa \Delta u_j \quad \text{в} \quad \Omega \setminus H_1, \\
u_j(x, t) \Big|_{H_1} &= -v_{j-1}(x, t) \Big|_{H_1}, \\
u_j \Big|_{t=0} &= 0, \\
\frac{\partial u_j}{\partial n} &= 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_2 \times (0, T], \\
\frac{\partial v_j}{\partial t} &= \varkappa \Delta v_j \quad \text{в} \quad \Omega \setminus H_2, \\
v_j(x, t) \Big|_{H_2} &= -u_j(x, t) \Big|_{H_2}, \\
v_j \Big|_{t=0} &= 0, \\
\frac{\partial v_j}{\partial n} &= 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_1 \times (0, T] \cup \Gamma_1 \times (0, T].
\end{aligned}$$

Очевидно, что функция

$$w_k = \sum_{j=0}^k u_j + \sum_{j=0}^{k-1} v_j$$

является решением задачи А:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w_k}{\partial t} &= \varkappa \Delta w_k \quad \text{в} \quad \Omega \setminus (H_1 \cup H_2), \\
w_k(x, t) \Big|_{H_1} &= f_1(x, t), \\
w_k(x, t) &= f_2(x, t) + u_k(x, t) \quad \text{на} \quad H_2, \\
w_k \Big|_{t=0} &= \phi(x),
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial w_k}{\partial n} = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_1 \times (0, T] \cup \Gamma_2 \times (0, T].$$

Так как

$$\max |u_k| \leq Cq^{2k}, \quad \text{где} \quad q = q(\text{dist}(H_1, H_2); T) < 1, \quad (2)$$

то из априорных оценок [3] следует, что $\lim_{k \rightarrow \infty} w_k = w$ существует и является решением задачи.

Оценка (2) является следствием следующего утверждения [6].

Лемма. Пусть $u(x, t)$ — классическое решение задачи

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \varkappa \Delta u \quad \Omega \setminus H_1, \\ u \Big|_{t=0} &= 0, \\ u(x, t) \Big|_{H_1} &= 1, \\ u(x, t) &= 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_1 \times (0, T], \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_2 \times (0, T]. \end{aligned}$$

Тогда $u(z, t) \leq q < 1$ для всех $t \in (0, \tau)$, где $\tau \leq a^2$, $a = \min(\text{dist}(z, H), \text{dist}(\Gamma_1, \Gamma_2))$. При этом константа q зависит только от размерности пространства и константы \varkappa .

3. Сравнение с аналитическим решением

Проведено сравнение построенного приближенного решения, полученного описанным методом, с аналитическим решением уравнения теплопроводности вне шара с условиями Дирихле. Сравнение показало высокую точность такого подхода и слабую зависимость от выбора шага по времени (изменение шага по времени в десять раз увеличивает погрешность менее чем на 1%).

Пусть Ω — шар, R — радиус шара,

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} > R, \\ \frac{\partial U}{\partial t} &= \varkappa \Delta U \quad \text{в} \quad \Omega \times [0, T], \\ U \Big|_{r=R} &= U_0, \\ G(x, t) &= \frac{2\sqrt{\pi}}{r} \left[1 - \text{erf} \left(\frac{r}{2\sqrt{t}} \right) \right] - \end{aligned}$$

функция источника

$$\begin{aligned} U &= \sum_{k=0}^{k_0} \beta^k G(r, t - t_k), \\ Q &= -\frac{km}{\mu} 8\pi \sum_{k=0}^{k_0} \beta \left[\sqrt{\pi} \left(\text{erf} \left(\frac{R}{2\pi} \right) - 1 \right) - \frac{R}{\sqrt{t - t_k}} \exp \left(-\frac{R^2}{4(t - t_k)} \right) \right], \end{aligned}$$

Параметры счета

$$\tau_{k+1} - \tau_k = 0.1, \quad k_0 = 50,$$

$$R = 0.0001 \quad \frac{km}{\mu} = 1.0E-12.$$

Время	0.1	1.0	2.5	4.0	5.0
Q	1.256861e-15	1.256708e-15	1.256682e-15	1.256673e-15	1.256669e-15
Q	1.230839e-15	1.230692e-15	1.230667e-15	1.230658e-15	1.230655e-15

r	2.0e-04	2.0e-03	5.0e-03	7.0e-03	9.8e-03
U	4.999927e-01	4.998616e-02	1.998572e-02	1.427136e-02	1.018966e-02
U	4.896425e-01	4.895141e-02	1.957201e-02	1.397593e-02	9.978731e-03

4. Анализ результатов численных экспериментов

Целью численных экспериментов является определение влияния расстояния скважины до контура питания, мощности пласта и длины скважины на скорость стабилизации расхода при упругом режиме фильтрации. Как видно из рис. 2 – 4, в начальный момент времени

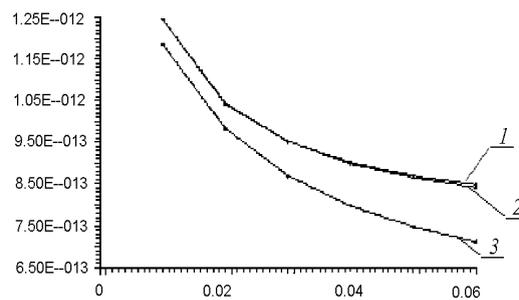


Рис. 2. Зависимость расхода от времени при различных мощностях пласта.

Длина трубы 50 м, расстояние до контура питания 20 м, радиус трубы 0.1 м, высота пласта: $H=10$ м (кривая 1), 20 м (кривая 2), 40 м (кривая 3)

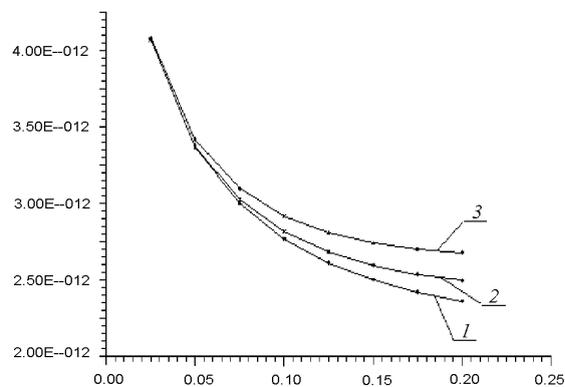


Рис. 3. Зависимость расхода от времени при разных расстояниях до контура питания.

Длина трубы 200 м, радиус трубы 0.1 м, высота пласта 10 м; расстояние до контура питания 80 (кривая 1), 40 (кривая 2) и 20 м (кривая 3).

влияние контура питания и толщины пласта на расход незначительно. Это соответствует интуитивному представлению о том, что возмущение от скважины не дошло до границ пласта. В дальнейшем влияние границы на величину расхода возрастает, при этом в случае, когда мощность пласта сравнима с длиной скважины, влияние кровли и подошвы практически отсутствует. Это видно из сравнения кривых 1, 2, 3 на рис. 2. Аналогичная картина наблюдается и при изменении расстояния до контура питания: с увеличением расстояния до контура питания влияние на величину расхода существенно уменьшается.

Влияние длины на кривые зависимости расхода от времени (рис. 4) так же, как и в случае стационарного притока к горизонтальной скважине во всем пространстве, а именно зависимость расхода от длины линейна в начальный момент времени. В то же время асимптотически величины расходов приближаются к значениям расходов в случае стационарной фильтрации при наличии контура питания.

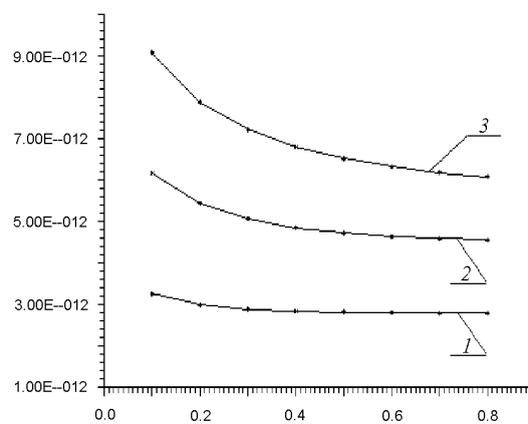


Рис. 4. Зависимость расхода от времени при различных длинах трубы.

Расстояние до контура питания 10 м, радиус трубы 0.1 м, высота пласта 10 м; длина трубы 200 (кривая 1), 300 (кривая 2) и 100 м (кривая 3).

5. Выводы

1. Несмотря на свойство бесконечной скорости распространения возмущений, параболические уравнения хорошо описывают влияние границы пласта на интегральные характеристики скважины.

2. Влияние непроницаемой кровли и подошвы на характер течения вблизи скважины в тонких пластах больше, чем влияние контура питания.

3. Влияние контура питания на показатели разработки скважины длиной меньше мощности пласта практически отсутствует.

4. Зависимость продуктивности скважины от ее длины при упругом режиме фильтрации в начале разработки линейна и не зависит от расстояния до контура питания.

Список литературы

- [1] МАСКЕТ М. *Течение однофазных жидкостей в пористой среде*. Гостехиздат, М.-Л., 1949.

- [2] ЩЕЛКАЧЕВ В. Н. *Основы и приложения теории неустановившейся фильтрации*. Ч. 1-2, Нефть и газ, М., 1995.
- [3] ЛАНДИС Е. М. *Уравнения второго порядка эллиптического и параболического типов*. Наука, М., 1971.
- [4] КУРАНТ Р. *Уравнения с частными производными*, Мир, М., 1964.
- [5] САМАРСКИЙ А. А., ВАБИЩЕВИЧ П. Н. Параллельные алгоритмы декомпозиции области для задач гидродинамики. В *“Матем. модели и числ. методы мех. сплошной среды”*, Новосибирск, 1996.
- [6] ИБРАГИМОВ А. И. О некоторых качественных свойствах решений уравнений параболического типа второго порядка с непрерывными коэффициентами. *Дифференц. уравнения*, **18**, №2, 1982, 306–309.

Поступила в редакцию 15 июля 1996 г.