

## Плановая модель волновой гидродинамики с дисперсионным соотношением повышенной точности

Г. С. ХАКИМЗЯНОВ<sup>1,2,\*</sup>, З. И. ФЕДОТОВА<sup>1</sup>, Д. ДУТЫХ<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Федеральный исследовательский центр информационных и вычислительных технологий, Новосибирск, Россия

<sup>2</sup>Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия

<sup>3</sup>Университет Гренобль Альпы; Университет Савоя Монблан; Лаборатория прикладного анализа и математики Национального исследовательского центра, Шамбери, Франция

\*Контактный автор: Хахимзянов Гаяз Салимович, e-mail: khak@ict.nsc.ru

Поступила 27 мая 2020 г., доработана 28 августа 2020 г., принята в печать 4 сентября 2020 г.

Полностью нелинейная слабо дисперсионная модель волновой гидродинамики, учитывающая подвижность дна, модифицирована с целью повышения точности дисперсионного соотношения. Проведено сравнение с известными аналогичными моделями и выявлено различие в асимптотическом поведении их фазовых скоростей.

*Ключевые слова:* длинные поверхностные волны, нелинейно-дисперсионные уравнения, дисперсионное соотношение, фазовая скорость.

*Цитирование:* Хахимзянов Г.С., Федотова З.И., Дутых Д. Плановая модель волновой гидродинамики с дисперсионным соотношением повышенной точности. Вычислительные технологии. 2020; 25(5):17–41. DOI:10.25743/ICT.2020.25.5.003.

### Введение

Начиная с 70-х годов прошлого столетия нелинейно-дисперсионные (НЛД-) модели волновой гидродинамики постоянно совершенствуются. В частности, расширяется их область применимости и повышается точность воспроизведения характеристик моделируемых процессов. Заметные успехи достигнуты в построении полностью нелинейных слабо дисперсионных моделей, учитывающих подвижность донной поверхности произвольной формы. В ряде случаев удалось построить модели, обладающие балансowymi соотношениями массы, импульса, полной энергии [1, 2], а также допускающие преобразование Галилея. Большое количество публикаций, посвященных изучению НЛД-моделей гидродинамики (см., например, обзоры [3–5]), говорит как о востребованности этих моделей на практике, так и о растущем интересе исследователей к возникающим здесь теоретическим задачам.

До 90-х годов прошлого века рассматривались НЛД-модели преимущественно второго длинноволнового приближения уравнений Эйлера (с формальной точностью  $O(\mu^2)$ ,  $\mu = d/\lambda$  — параметр дисперсии,  $d$  и  $\lambda$  — характерные значения глубины акватории и длины волны), причем согласно способу получения дифференциальных уравнений этих моделей дисперсионные соотношения соответствующих линейных аналогов с такой

же точностью  $O(\mu^2)$  аппроксимировали дисперсионное соотношение исходной трехмерной модели потенциальных течений. В статье [6] высказана идея о том, как повысить точность дисперсионного соотношения, не меняя порядок длинноволновой аппроксимации модели. К сожалению, полученные автором [6] модели с дисперсией имеют специальный вид и не распространяются на 2DH-уравнения (двумерные в горизонтальной плоскости, или плановые) и на случай дна переменной формы. Эта работа инициировала поиск возможностей для уточнения дисперсионных характеристик НЛД-моделей.

Повышение порядка длинноволнового приближения НЛД-модели позволяет точнее описывать дисперсионное соотношение [7–9]. Однако в этом случае неизбежно повышается порядок производных по пространственным переменным, что приводит к существенным трудностям при численной реализации таких моделей. Другое предложение состоит в построении многослойных НЛД-моделей [10], дифференциальные уравнения которых содержат производные не выше третьего порядка. К сожалению, при переходе к многослойности эти уравнения сильно усложняются. Перечисленные подходы продолжают развиваться, но наиболее продуктивным оказался путь непосредственного повышения порядка аппроксимации дисперсионного соотношения, при котором сохраняется порядок длинноволновой аппроксимации исходной модели. Впервые этот подход был описан в работах [11, 12] для слабо нелинейных НЛД-уравнений [13, 14], к которым добавлялась специальная комбинация пространственных и временных производных третьего порядка, обеспечивающая аппроксимацию Padé (2,2) дисперсионного соотношения трехмерной модели потенциальных течений. Позже для полученной слабо нелинейной (MS-) модели Мадсена — Соренсена [12] был сделан ряд усовершенствований (см., например, [15–19]).

Для полностью нелинейных уравнений с дисперсией в случае одномерных течений над горизонтальным дном в работе [20] предложена модифицированная модель Серре — Грина — Нагди (SGN-модель) с дисперсионным соотношением той же высокой точности, что и в работах [11, 12, 16], а также указано на важность сохранения при модификации исходной НЛД-модели всех ее положительных свойств (консервативность, инвариантность относительно преобразования Галилея и др.). Повышенное внимание к этим свойствам обусловлено тем, что модели с улучшенными дисперсионными характеристиками положены в основу многих компьютерных систем (например, GloBouss [21], Celeris [22], FUNWAVE [23]), применяемых для решения практических задач.

Следует отметить, что про “улучшение” дисперсионных характеристик обычно говорят, когда для дисперсионного выражения НЛД-модели достигнуто повышение порядка аппроксимации “эталонного” дисперсионного соотношения линеаризованной задачи Коши — Пуассона для потенциальных течений (см. [11, 12, 16, 20, 22] и др.). В предлагаемом исследовании вопрос поставлен шире, а именно дополнительно рассмотрен ряд качественных (асимптотика) и количественных (выбор оптимального параметра) оценок, связанных с дисперсионными свойствами НЛД-модели.

Настоящая работа является продолжением исследований [20] полностью нелинейных SGN-уравнений с целью улучшить их дисперсионные свойства. В отличие от [20], здесь рассматривается двумерная SGN-модель [24], в которой учитывается подвижность дна. Для получения улучшенной аппроксимации дисперсионного соотношения изменению подвергаются формулы для негидростатической части давления, при этом для модифицированной SGN-модели (mSGN-модели) точность  $O(\mu^2)$  длинноволновой аппроксимации сохраняется. Показывается, что в некоторых частных случаях полученная полностью нелинейная mSGN-модель близка к известной MS-модели [12] для слабо

изменяющегося дна, а также к слабо дисперсионной модели из работы [16], выведенной без ограничений на форму дна. После линеаризации эти модели записываются в виде одной и той же однопараметрической системы линейных уравнений, которая используется для анализа дисперсионных свойств mSGN-модели. В частности, изучено поведение фазовой скорости распространения длинных и коротких волн. Кроме того, исследуется вопрос о том, не приводит ли процедура модификации SGN-модели к потере таких ее свойств, как инвариантность относительно преобразования Галилея и наличие балансовых соотношений для массы, полного импульса и полной энергии.

## 1. Модель Мадсена — Соренсена

При выводе MS-уравнений слабо нелинейной слабо дисперсионной модели [12] отправной точкой служит модифицированная модель Перегринна, в которой вместо усредненной скорости [14] рассматривается вектор потока  $\mathbf{Q} = (Q_1, Q_2)^\top$  [13]:

$$H_t + \nabla \cdot \mathbf{Q} = 0, \quad (1)$$

$$\mathbf{Q}_t + \nabla \cdot \frac{\mathbf{Q} \otimes \mathbf{Q}}{H} + gH\nabla\eta = \mathcal{F}. \quad (2)$$

Здесь

$$\mathbf{Q}(\mathbf{x}, t) = \int_{-h(\mathbf{x}, t)}^{\eta(\mathbf{x}, t)} \mathbf{U}(\mathbf{x}, y, t) dy, \quad \mathcal{F} = \mathcal{F}_{\text{Per}} \equiv -\frac{h^3}{6} \nabla \left( \nabla \cdot \frac{\mathbf{Q}_t}{h} \right) + \frac{h^2}{2} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{Q}_t),$$

$\mathbf{U}$  — горизонтальная составляющая вектора скорости 3D-течения;  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^\top$  — вектор горизонтальных координат;  $y$  — вертикальная координата;  $t$  — время;  $g$  — ускорение свободного падения;  $H = \eta + h$  — полная глубина;  $\eta = \eta(\mathbf{x}, t)$  — возвышение свободной поверхности; функция  $h = h(\mathbf{x}, t)$  описывает донную поверхность (для модели Перегринна дно стационарно:  $h = h(\mathbf{x})$ ),

$$\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2} \right), \quad \nabla \cdot \mathbf{f} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \quad \forall \mathbf{f} = (f_1, f_2)^\top;$$

$\otimes$  — обозначение для тензорного произведения векторов, при этом для произвольных гладких векторных полей  $\mathbf{a}, \mathbf{b} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\mathbf{a} = (a_1, a_2)^\top$ ,  $\mathbf{b} = (b_1, b_2)^\top$ , имеют место равенства

$$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 \end{pmatrix}, \quad \nabla \cdot (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \nabla \cdot (a_1 \mathbf{b}) \\ \nabla \cdot (a_2 \mathbf{b}) \end{pmatrix}.$$

Для сокращения записи в уравнениях (1), (2), а также во всех последующих формулах полагается, что  $\rho \equiv 1$ .

Далее рассмотрим случай “слабо изменяющегося” дна и упростим правую часть уравнения движения (2), используя предположения, сделанные в работе [12], а именно в  $\mathcal{F}_{\text{Per}}$  оставим только первые производные от функции  $h$ , пренебрегая произведениями этих производных и производными от  $h$  второго порядка и выше, а также учтем неподвижность дна. Тогда, обозначив через  $\Rightarrow$  переход к упрощенному выражению, имеем

$$\mathcal{F}_{\text{Per}} \Rightarrow \frac{h^2}{3} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{Q}_t) + \frac{h}{6} (\nabla \cdot \mathbf{Q}_t) \nabla h + \frac{h}{6} \nabla (\mathbf{Q}_t \cdot \nabla h).$$

В последнем слагаемом еще содержатся производные второго порядка от функции  $h(\mathbf{x})$ , поэтому продолжим упрощение. Для этого используем аналог для плоского случая одной из формул векторного анализа:

$$\nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = (\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{b} + (\mathbf{b} \cdot \nabla)\mathbf{a} + \mathbf{a} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{b}) + \mathbf{b} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{a}),$$

где

$$\nabla \wedge \mathbf{a} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial a_2}{\partial x_1} - \frac{\partial a_1}{\partial x_2}, \quad \mathbf{a} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{b}) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} a_2 \nabla \wedge \mathbf{b} \\ -a_1 \nabla \wedge \mathbf{b} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{a}) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} b_2 \nabla \wedge \mathbf{a} \\ -b_1 \nabla \wedge \mathbf{a} \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$\nabla(\mathbf{Q}_t \cdot \nabla h) \Rightarrow (\nabla h \cdot \nabla)\mathbf{Q}_t + \nabla h \wedge (\nabla \wedge \mathbf{Q}_t),$$

поэтому

$$\mathcal{F}_{\text{Per}} \Rightarrow \tilde{\mathcal{F}}_{\text{Per}} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{h^2}{3} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{Q}_t) + \frac{h}{6} ((\nabla \cdot \mathbf{Q}_t)\nabla h + (\nabla h \cdot \nabla)\mathbf{Q}_t + \nabla h \wedge (\nabla \wedge \mathbf{Q}_t)). \quad (3)$$

Система уравнений (1), (2) с  $\mathcal{F} = \tilde{\mathcal{F}}_{\text{Per}}$  называется моделью Перегринна для описания течения над слабо изменяющимся дном.

С целью повышения точности дисперсионного соотношения полученная система модифицируется исходя из того, что на решениях слабо нелинейной слабо дисперсионной системы уравнений (1), (2) выражение  $\mathbf{Q}_t + gh\nabla\eta$  имеет порядок  $O(\alpha, \mu^2)$ , где параметр нелинейности  $\alpha$  (отношение характерной амплитуды к средней глубине) и определенный выше параметр дисперсии  $\mu$  малы. Поэтому в работе [12] к правой части  $\tilde{\mathcal{F}}_{\text{Per}}$  добавлена малая величина

$$Bh^2 \nabla(\nabla \cdot (\mathbf{Q}_t + gh\nabla\eta)),$$

которая с учетом слабой изменчивости дна принимает вид

$$Bh^2 \nabla(\nabla \cdot \mathbf{Q}_t) + Bgh^3 \nabla(\Delta\eta) + Bgh^2 ((\Delta\eta)\nabla h + (\nabla h \cdot \nabla)\nabla\eta),$$

где  $B$  — параметр модели [12];  $\Delta$  — двумерный в горизонтальной плоскости оператор Лапласа. В результате имеем MS-модель вида (1), (2), в которой используется вектор

$$\begin{aligned} \mathcal{F} = \mathcal{F}_{\text{MS}} = (\mathcal{F}_{\text{MS},1}, \mathcal{F}_{\text{MS},2})^\top &\equiv \left( B + \frac{1}{3} \right) h^2 \nabla(\nabla \cdot \mathbf{Q}_t) + Bgh^3 \nabla(\Delta\eta) + \\ &+ \frac{h}{6} ((\nabla \cdot \mathbf{Q}_t)\nabla h + (\nabla h \cdot \nabla)\mathbf{Q}_t + \nabla h \wedge (\nabla \wedge \mathbf{Q}_t)) + Bgh^2 ((\Delta\eta)\nabla h + (\nabla h \cdot \nabla)\nabla\eta) \end{aligned} \quad (4)$$

с компонентами

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\text{MS},1} &= \left( B + \frac{1}{3} \right) h^2 (\nabla \cdot \mathbf{Q}_t)_{x_1} + Bgh^3 (\Delta\eta)_{x_1} + \\ &+ hh_{x_1} \left[ \frac{1}{3} \left( (Q_1)_{x_1 t} + \frac{1}{2} (Q_2)_{x_2 t} \right) + 2Bgh \left( \eta_{x_1 x_1} + \frac{1}{2} \eta_{x_2 x_2} \right) \right] + hh_{x_2} \left[ \frac{1}{6} (Q_2)_{x_1 t} + Bgh \eta_{x_1 x_2} \right], \\ \mathcal{F}_{\text{MS},2} &= \left( B + \frac{1}{3} \right) h^2 (\nabla \cdot \mathbf{Q}_t)_{x_2} + Bgh^3 (\Delta\eta)_{x_2} + \\ &+ hh_{x_2} \left[ \frac{1}{3} \left( (Q_2)_{x_2 t} + \frac{1}{2} (Q_1)_{x_1 t} \right) + 2Bgh \left( \eta_{x_2 x_2} + \frac{1}{2} \eta_{x_1 x_1} \right) \right] + hh_{x_1} \left[ \frac{1}{6} (Q_1)_{x_2 t} + Bgh \eta_{x_1 x_2} \right]. \end{aligned}$$

В работах [11, 12] показано, что при подходящем выборе параметра  $B$  слабо дисперсионная MS-модель имеет улучшенное по сравнению с исходной моделью (1), (2) дисперсионное соотношение.

## 2. SGN-модель с улучшенным дисперсионным соотношением

Здесь рассмотрена модификация известной полностью нелинейной слабо дисперсионной SGN-модели, уравнения которой записываются в компактном виде [24–26]

$$H_t + \nabla \cdot (H\mathbf{u}) = 0, \quad (5)$$

$$(H\mathbf{u})_t + \nabla \cdot (H\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla p = \check{p}\nabla h, \quad (6)$$

где

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{H(\mathbf{x}, t)} \int_{-h(\mathbf{x}, t)}^{\eta(\mathbf{x}, t)} \mathbf{U}(\mathbf{x}, y, t) dy; \quad (7)$$

$p$  — проинтегрированная по толщине слоя жидкости главная часть давления трехмерной модели, удерживаемая в длинноволновом приближении (далее называем эту величину давлением НЛД-модели или просто давлением),

$$p = g\frac{H^2}{2} - \left( \frac{H^3}{3}R_1 + \frac{H^2}{2}R_2 \right), \quad (8)$$

$$R_1 = D(\nabla \cdot \mathbf{u}) - (\nabla \cdot \mathbf{u})^2, \quad R_2 = D^2h.$$

Давление НЛД-модели на дне

$$\check{p} = gH - \left( \frac{H^2}{2}R_1 + HR_2 \right). \quad (9)$$

Оператор полной производной

$$D = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla. \quad (10)$$

Остальные обозначения описаны в предыдущем разделе.

Аббревиатура SGN связана с именами авторов публикаций, в которых при выводе НЛД-модели не сделано предположение о малости амплитуды волны, и тем самым она является полностью нелинейной моделью со слабой дисперсией (в отличие от классических слабо нелинейных моделей типа Буссинеска). Отметим, что в работах Serre [27, 28] и Green & Naghdi [29] при выводе НЛД-уравнений, алгебраически эквивалентных на решениях уравнениям (5), (6), предполагалось, что горизонтальная составляющая вектора скорости трехмерного течения  $\mathbf{U}$  не зависит от вертикальной координаты  $y$ , т. е.  $\mathbf{U} = \mathbf{U}(\mathbf{x}, t)$ . В более поздних работах это жесткое ограничение было снято и в качестве скорости НЛД-модели использовалась усредненная скорость (7), при этом предполагалась потенциальность трехмерного течения (например, в [30]). Однако последнее требование оказалось избыточным и позже уравнения (5), (6) получены без этого требования как в плоском [24], так и в сферическом [31] приближениях для случая подвижного дна. Возможность записи в виде (5), (6) полностью нелинейных НЛД-уравнений, выведенных при разных исходных предположениях о характере трехмерного течения, связана с тем, что эти предположения приводят к одному и тому же замыканию базовой модели из [24]. Исходя из хронологии получения моделей система уравнений (5), (6) называется SGN-уравнениями (SGN-моделью), как это уже делалось ранее (см., например, [20, 32]).

SGN-модель (5), (6) обладает рядом полезных свойств. Видно, что ее уравнения записаны в квазиконсервативной форме, позволяющей для численной реализации этой

модели использовать метод конечных объемов. Кроме того, SGN-модель допускает согласованное с трехмерным течением уравнение баланса полной энергии [1], уравнения этой модели являются инвариантными относительно преобразования Галилея [24] и для SGN-модели выполняется закон сохранения потенциального вихря [33, 34].

### 2.1. Модифицированная SGN-модель

В безразмерных переменных, введенных в [24], уравнение (6) сохранит свой вид, а выражения (8), (9) для давления запишутся следующим образом:

$$p = \frac{H^2}{2} - \mu^2 \left( \frac{H^3}{3} R_1 + \frac{H^2}{2} R_2 \right), \quad \check{p} = H - \mu^2 \left( \frac{H^2}{2} R_1 + H R_2 \right). \quad (11)$$

Следовательно, для решения системы уравнений (5), (6) справедливо соотношение

$$\mathbf{I}_0 \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{u}_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla(H - h) = O(\mu^2),$$

которое вместе с некоторым весовым параметром  $\beta$  используется для модификации выражений  $R_1$  и  $R_2$ , входящих в формулы для давления:

$$\begin{aligned} R_1 &= D(\nabla \cdot \mathbf{u}) - (\nabla \cdot \mathbf{u})^2 = \nabla \cdot \mathbf{u}_t + \mathbf{u} \cdot \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - (\nabla \cdot \mathbf{u})^2 = \\ &= (1 - \beta) \nabla \cdot \mathbf{u}_t + \beta \nabla \cdot \mathbf{u}_t + \mathbf{u} \cdot \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - (\nabla \cdot \mathbf{u})^2 = R_{1,m} + O(\mu^2), \\ R_2 &= D^2 h = h_{tt} + (1 - \beta) \mathbf{u}_t \cdot \nabla h + \beta \mathbf{u}_t \cdot \nabla h + \mathbf{u} \cdot \nabla(2h_t + \mathbf{u} \cdot \nabla h) = R_{2,m} + O(\mu^2), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} R_{1,m} &= (1 - \beta) \nabla \cdot \mathbf{u}_t - \beta \nabla \cdot [(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla(H - h)] + \\ &\quad + \mathbf{u} \cdot \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - (\nabla \cdot \mathbf{u})^2 = R_1 - \beta \nabla \cdot \mathbf{I}_0, \\ R_{2,m} &= h_{tt} + (1 - \beta) \mathbf{u}_t \cdot \nabla h - \beta [(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla(H - h)] \cdot \nabla h + \\ &\quad + \mathbf{u} \cdot \nabla(2h_t + \mathbf{u} \cdot \nabla h) = R_2 - \beta \mathbf{I}_0 \cdot \nabla h. \end{aligned}$$

Заменив в выражениях для давления (11)  $R_1$  на  $R_{1,m}$ ,  $R_2$  на  $R_{2,m}$ , получим

$$\begin{aligned} p_m &= p + \mu^2 \beta \left( \frac{H^3}{3} \nabla \cdot \mathbf{I}_0 + \frac{H^2}{2} \mathbf{I}_0 \cdot \nabla h \right) + O(\mu^4), \\ \check{p}_m &= \check{p} + \mu^2 \beta \left( \frac{H^2}{2} \nabla \cdot \mathbf{I}_0 + H \mathbf{I}_0 \cdot \nabla h \right) + O(\mu^4). \end{aligned}$$

Следовательно, с учетом новых выражений для давления уравнение движения (6) примет вид

$$(H\mathbf{u})_t + \nabla \cdot (H\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla p_m = \check{p}_m \nabla h + O(\mu^4).$$

Отбрасывая остаточный член, получаем окончательный вид модифицированного уравнения движения:

$$(H\mathbf{u})_t + \nabla \cdot (H\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla p_m = \check{p}_m \nabla h. \quad (12)$$

Поскольку  $\mathbf{I}_0$  есть величина порядка  $O(\mu^2)$ , то выполненная модификация фактически означает, что в исходной SGN-модели к уравнению движения (6) добавлено новое слагаемое, имеющее порядок  $O(\mu^4)$  и не изменяющее порядок длинноволновой аппроксимации.

При исследовании свойств mSGN-модели потребуется выражение для ее полной энергии  $\mathcal{E}_m$ . В исходной SGN-модели (5), (6) полная энергия  $\mathcal{E}$  определяется по следующей формуле [1]:

$$\mathcal{E} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}{2} + \mu^2 \left( \frac{H^2}{6} (\nabla \cdot \mathbf{u})^2 + \frac{H}{2} (\nabla \cdot \mathbf{u}) Dh + \frac{(Dh)^2}{2} \right) + \frac{H - 2h}{2}.$$

Так же, как для давлений  $p_m$ ,  $\check{p}_m$ , будем предполагать, что  $\mathcal{E}_m$  получается из  $\mathcal{E}$  добавлением некоторого слагаемого четвертого порядка:

$$\mathcal{E}_m = \mathcal{E} + \mu^4 \beta \mathbf{e},$$

при этом пока мы не будем выписывать конкретный вид выражения для  $\mathbf{e}$ .

В размерных переменных уравнение движения имеет тот же вид (12), что и в безразмерных, при этом

$$\mathbf{I}_0 = \mathbf{u}_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + g \nabla \eta, \quad (13)$$

давление определяется по формулам

$$p_m = g \frac{H^2}{2} - \left( \frac{H^3}{3} R_{1,m} + \frac{H^2}{2} R_{2,m} \right), \quad \check{p}_m = gH - \left( \frac{H^2}{2} R_{1,m} + HR_{2,m} \right), \quad (14)$$

где

$$R_{1,m} = D(\nabla \cdot \mathbf{u}) - (\nabla \cdot \mathbf{u})^2 - \beta \nabla \cdot \mathbf{I}_0, \quad R_{2,m} = D^2 h - \beta \mathbf{I}_0 \cdot \nabla h, \quad (15)$$

выражение для полной энергии имеет следующий вид:

$$\mathcal{E}_m = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}{2} + \frac{H^2}{6} (\nabla \cdot \mathbf{u})^2 + \frac{H}{2} (\nabla \cdot \mathbf{u}) Dh + \frac{(Dh)^2}{2} + g \frac{H - 2h}{2} + \beta \mathbf{e}.$$

Далее модифицированную полностью нелинейную модель (5), (12)–(15), в которой учитывается подвижность дна, будем называть для краткости mSGN-моделью, что согласуется с использованным ранее [20] обозначением для модифицированной одномерной SGN-модели в случае неподвижного горизонтального дна. При  $\beta = 0$  mSGN-модель совпадает с исходной SGN-моделью (5), (6). Но при  $\beta \neq 0$  эти модели различаются и будут обладать различными свойствами.

## 2.2. Слабо нелинейные слабо дисперсионные аналоги mSGN-модели

В этом разделе представлены результаты сопоставления полученной mSGN-модели с некоторыми известными слабо нелинейными моделями в случае неподвижного дна. Для этого запишем уравнения mSGN-модели в переменных полная глубина  $H$  — поток  $\mathbf{Q}$ :

$$H_t + \nabla \cdot \mathbf{Q} = 0, \quad (16)$$

$$\mathbf{Q}_t + \nabla \cdot \frac{\mathbf{Q} \otimes \mathbf{Q}}{H} + \nabla p_m = \check{p}_m \nabla h, \quad (17)$$

где

$$\mathbf{Q}(\mathbf{x}, t) = \int_{-h(\mathbf{x}, t)}^{\eta(\mathbf{x}, t)} \mathbf{U}(\mathbf{x}, y, t) dy, \quad \mathbf{I}_0 = \frac{1}{H} \left( \mathbf{Q}_t + \nabla \cdot \frac{\mathbf{Q} \otimes \mathbf{Q}}{H} \right) + g \nabla \eta.$$

Переходя в (16), (17) к безразмерным переменным [24], отбросив нелинейные слагаемые в дисперсионных членах, применив условие Буссинеска  $\alpha = O(\mu^2)$  и вновь вернувшись к размерным переменным, получаем модель типа Перегринна (1), (2), в которой уравнение движения имеет следующую правую часть:

$$\mathcal{F} = (1 - \beta)\mathcal{F}_{\text{Per}} + \beta g \left[ \frac{h^3}{6} \nabla(\Delta\eta) - \frac{h^2}{2} \nabla(\nabla \cdot (h\nabla\eta)) \right]. \quad (18)$$

Можно показать, что если уравнение (2) записать в недивергентной форме, поделить обе его части на  $H$  и использовать в безразмерной форме условие Буссинеска, а в его правой части (18) заменить вектор потока  $\mathbf{Q}$  на  $h\mathbf{u}$ , то получается уравнение движения, полностью совпадающее с уравнением из работы [16] с тем лишь отличием, что в этой работе вместо  $\beta$  использовался параметр  $-\beta$ . Таким образом, слабо нелинейная модель из [16], для которой получено дисперсионное соотношение в виде полинома Padé (2,2), обеспечивающего аппроксимацию дисперсионного соотношения трехмерной модели с порядком  $O(\mu^4)$ , является точным следствием полученной здесь полностью нелинейной mSGN-модели.

Продолжим упрощение правой части (18), чтобы проверить, является ли MS-модель для слабо изменяющегося дна точным следствием mSGN-модели. Используя предположения о слабом изменении профиля дна (см. разд. 1) и следствия (3), (4) этих предположений, а также заменив по формуле  $\beta = -3B$  параметр  $\beta$  на параметр  $B$  из [12], приходим к версии (1), (2) mSGN-модели для слабо изменяющегося дна, в уравнении движения которой вектор  $\mathcal{F}$  вычисляется по формуле

$$\begin{aligned} \mathcal{F} = \mathcal{F}_{\text{mSGN}} \equiv \mathcal{F}_{\text{MS}} + B \frac{h}{2} ((\nabla \cdot \mathbf{Q}_t) \nabla h + (\nabla h \cdot \nabla) \mathbf{Q}_t + \nabla h \wedge (\nabla \wedge \mathbf{Q}_t)) + \\ + Bg \frac{h^2}{2} ((\Delta\eta) \nabla h + (\nabla h \cdot \nabla) \nabla \eta). \end{aligned} \quad (19)$$

В компонентах вектора  $\mathcal{F}_{\text{mSGN}}$  эта формула записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\text{mSGN},1} &= \left( B + \frac{1}{3} \right) h^2 (\nabla \cdot \mathbf{Q}_t)_{x_1} + Bgh^3 (\Delta\eta)_{x_1} + \\ &+ hh_{x_1} \left[ \left( B + \frac{1}{3} \right) \left( (Q_1)_{x_1 t} + \frac{1}{2} (Q_2)_{x_2 t} \right) + 3Bgh \left( \eta_{x_1 x_1} + \frac{1}{2} \eta_{x_2 x_2} \right) \right] + \\ &+ hh_{x_2} \left[ \left( \frac{1}{2} B + \frac{1}{6} \right) (Q_2)_{x_1 t} + \frac{3}{2} Bgh \eta_{x_1 x_2} \right], \\ \mathcal{F}_{\text{mSGN},2} &= \left( B + \frac{1}{3} \right) h^2 (\nabla \cdot \mathbf{Q}_t)_{x_2} + Bgh^3 (\Delta\eta)_{x_2} + \\ &+ hh_{x_2} \left[ \left( B + \frac{1}{3} \right) \left( (Q_2)_{x_2 t} + \frac{1}{2} (Q_1)_{x_1 t} \right) + 3Bgh \left( \eta_{x_2 x_2} + \frac{1}{2} \eta_{x_1 x_1} \right) \right] + \\ &+ hh_{x_1} \left[ \left( \frac{1}{2} B + \frac{1}{6} \right) (Q_1)_{x_2 t} + \frac{3}{2} Bgh \eta_{x_1 x_2} \right]. \end{aligned}$$

Сравнивая компоненты векторов (19) и  $\mathcal{F}_{\text{MS}}$ , видим, что они различаются несколькими дополнительными членами, содержащими параметр  $B$ . В силу этого в случае слабо изменяющегося дна не совсем корректным становится приведенное в [35] утверждение “the formalism of the two approaches is completely equivalent” об эквивалентности подходов, изложенных в работах [11, 16], к улучшению дисперсионных свойств модели

Перегринна. Если на эти подходы смотреть как на формальное добавление к уравнению движения некоторых дополнительных слагаемых порядка  $O(\mu^4)$ , то действительно имеется большое сходство. Однако детальная реализация подходов приводит к различающимся уравнениям. Поэтому с точки зрения получения итоговых результатов подходы не являются идентичными.

### 2.3. Дисперсионные свойства mSGN-модели

Надо отметить, что хотя в случае слабо изменяющегося дна MS-модель (1), (2), (4) и mSGN-модель (1), (2), (19) различаются, после линеаризации уравнений этих моделей в окрестности нулевой скорости и в предположении горизонтальности дна  $y \equiv -d = \text{const} < 0$  получается одна и та же система линейных уравнений, которую будем использовать для изучения дисперсионных свойств этих моделей:

$$\eta_t + \nabla \cdot \mathbf{Q} = 0, \quad \mathbf{Q}_t + gd\nabla\eta = d^2\nabla \left[ \left( B + \frac{1}{3} \right) \nabla \cdot \mathbf{Q}_t + Bgd\Delta\eta \right]. \quad (20)$$

Поэтому далее мы будем ссылаться на систему (20) как на линейную MS-модель. Для SGN-модели (5), (6) линеаризованная система

$$\eta_t + \nabla \cdot \mathbf{Q} = 0, \quad \mathbf{Q}_t + gd\nabla\eta = \frac{d^2}{3} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{Q}_t)$$

получается из (20) при  $B = 0$ .

Найдем дисперсионное соотношение, соответствующее системе (20). Для этого рассмотрим периодические решения этой системы в виде гармоник

$$\eta(\mathbf{x}, t) = a_0 e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})}, \quad \mathbf{Q} = \mathbf{Q}_0 e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})},$$

где  $a_0 \neq 0$  и  $\mathbf{Q}_0 \neq \mathbf{0}$  — амплитуды гармоник;  $\mathbf{k} = (k_1, k_2)$  — волновой вектор,  $\mathbf{k} \neq \mathbf{0}$ ;  $\omega > 0$  — волновая частота. Подставляя гармоники в систему (20), получаем кубическое уравнение, корни которого вычисляются по формулам

$$\omega_1(\mathbf{k}) = 0, \quad \omega_{2,3}(\mathbf{k}) = \pm c_0 |\mathbf{k}| \left( \frac{1 + B(d|\mathbf{k}|)^2}{1 + (B + \frac{1}{3})(d|\mathbf{k}|)^2} \right)^{1/2},$$

где  $c_0 = \sqrt{gd}$ . Смысл частоты  $\omega(\mathbf{k})$  имеет только корень  $\omega_3$  (со знаком “плюс”), при этом он будет вещественным числом для произвольного  $\mathbf{k}$  только при выполнении условия

$$B \geq 0.$$

Обозначим через  $c_p = \omega(\mathbf{k})/|\mathbf{k}|$  модуль вектора фазовой скорости  $\mathbf{c}_p = c_p \mathbf{k}/|\mathbf{k}|$ . Тогда для модуля  $c_{p,M}$  фазовой скорости линейной MS-модели получаем

$$c_{p,M}(\mathbf{k}) = c_0 \left( \frac{1 + B(d|\mathbf{k}|)^2}{1 + (B + \frac{1}{3})(d|\mathbf{k}|)^2} \right)^{1/2}. \quad (21)$$

Оценку дисперсионных свойств моделей мелкой воды обычно производят сравнением фазовых скоростей, соответствующих этим моделям, с “эталонными” значениями их

аналогов в линеаризованной задаче Коши — Пуассона для потенциальных течений. Эта задача формулируется следующим образом: в бесконечной в горизонтальных направлениях области, ограниченной снизу горизонтальным дном  $h(\mathbf{x}, t) \equiv d = \text{const}$ , а сверху плоскостью  $y = 0$ , необходимо найти решение  $\phi(\mathbf{x}, y, t)$  уравнения Лапласа

$$\Delta\phi + \phi_{yy} = 0, \quad -\infty < x_1, x_2 < +\infty, \quad -d < y < 0 \quad (22)$$

и функцию  $y = \eta(\mathbf{x}, t)$ , задающую свободную границу, такие, что на верхней границе области выполняются кинематическое и динамическое условия

$$(\eta_t - \phi_y)|_{y=0} = 0, \quad (\phi_t + g\eta)|_{y=0} = 0, \quad (23)$$

а на дне — условие непротекания

$$\phi_y|_{y=-d} = 0. \quad (24)$$

Для решения задачи Коши — Пуассона (22)–(24)

$$\begin{aligned} \eta(\mathbf{x}, t) &= a_0 \sin(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}), \\ \phi(\mathbf{x}, y, t) &= \frac{a_0 g}{\omega \cosh(d|\mathbf{k}|)} \cdot \cosh(|\mathbf{k}|(y + d)) \cdot \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}), \end{aligned} \quad (25)$$

волновая частота  $\omega(\mathbf{k})$  связана с волновым вектором  $\mathbf{k}$  дисперсионным соотношением

$$\omega(\mathbf{k}) = \sqrt{g|\mathbf{k}| \cdot \tanh(d|\mathbf{k}|)}.$$

Величина фазовой скорости определяется в этой модели по формуле

$$c_{p, Pot}(\mathbf{k}) = c_0 \left( \frac{\tanh(d|\mathbf{k}|)}{d|\mathbf{k}|} \right)^{1/2}, \quad (26)$$

которую можно переписать и в виде зависимости  $c_{p, Pot}(\lambda)$  от длины волны  $\lambda = 2\pi/|\mathbf{k}|$ . Тогда

$$\frac{d}{d\lambda} c_{p, Pot}(\lambda) = -\frac{g}{4\pi c_{p, Pot}(\lambda)} \operatorname{sech}^2 \left( \frac{2\pi d}{\lambda} \right) \left[ \frac{2\pi d}{\lambda} - \frac{1}{2} \sinh \left( \frac{4\pi d}{\lambda} \right) \right]. \quad (27)$$

На основе анализа формул (26) и (27) легко устанавливаются следующие свойства величины фазовой скорости (26):

- 1) *свойство изотропности*: величина  $c_{p, Pot}$  фазовой скорости не зависит от направления волнового вектора  $\mathbf{k}$  и определяется лишь длиной волны;
- 2) *свойство монотонности*: из неравенства

$$\frac{d}{d\lambda} c_{p, Pot}(\lambda) > 0 \quad \forall \lambda > 0 \quad (28)$$

следует, что короткие волны (25) отстают при своем движении от длинных;

- 3) *предельное свойство для коротких волн*: при  $\lambda \rightarrow 0$  величина  $c_{p, Pot}(\lambda)$  фазовой скорости стремится к нулю (см. линию 1 на рис. 1), т. е.

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} c_{p, Pot}(\lambda) = 0.$$

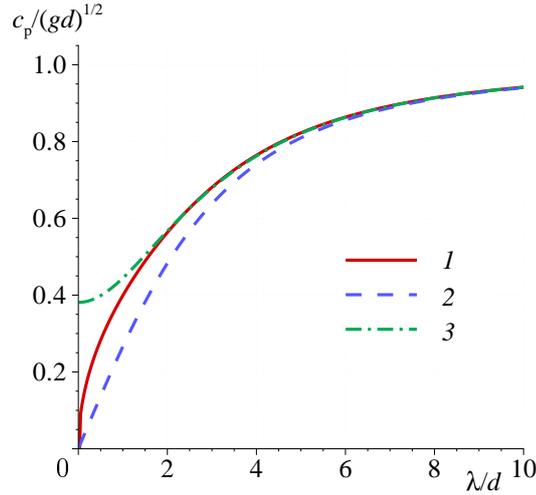


Рис. 1. Зависимость величины фазовой скорости от длины волны: 1 — 3D-модель (22)–(24); 2 — SGN-модель; 3 — MS-модель при  $B = 1/21$

Fig. 1. Dependence of the phase velocity on the wavelength: 1 — 3D-model (22)–(24); 2 — SGN-model; 3 — MS-model with  $B = 1/21$

### 2.3.1. О выполнении “эталонных” свойств в приближенных моделях мелкой воды

При конструировании приближенных математических моделей мелкой воды естественно требовать наследования “эталонных” свойств 1–3. Формула (21) свидетельствует о том, что для линейной MS-модели (20) свойство изотропности выполняется. Отсюда, в частности, следует, что дисперсионные свойства, которые выявлены для одномерных течений [11], будут выполняться и в рассматриваемом здесь двумерном случае. Поэтому далее отметим лишь те свойства, на которых внимание ранее не акцентировалось.

Из формулы

$$\frac{d}{d\lambda} c_{p,M}(\lambda) = \frac{4g\pi^2}{3c_{p,M}(\lambda)} \left[ 1 + \left( B + \frac{1}{3} \right) \frac{4\pi^2 d^2}{\lambda^2} \right]^{-2} \frac{d^3}{\lambda^3}$$

получаем аналог неравенства (28)

$$\frac{d}{d\lambda} c_{p,M}(\lambda) > 0 \quad \forall \lambda > 0, \tag{29}$$

поэтому свойство монотонности также выполняется. Однако для MS-модели предельное свойство для коротких волн при  $B \neq 0$  не выполняется:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} c_{p,M}(\lambda) = c_0 \sqrt{\frac{B}{B + 1/3}} > 0 \quad \forall B > 0. \tag{30}$$

На рис. 1 линия 3 изображает величину фазовой скорости (21) (как функции от длины волны) при “оптимальном” [11] значении  $B = 1/21$ . Видно, что для коротких волн имеет место сильное отличие от “эталонной” линии 1, но для длинных волн MS-модель хорошо воспроизводит фазовую скорость (26) 3D-модели (22)–(24). При  $B = 0$  линейная MS-модель совпадает с линейной SGN-моделью, и только при этом единственном значении параметра  $B$  выполняется предельное свойство 3:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} c_{p,M}(\lambda) \Big|_{B=0} = 0.$$

Таким образом, если иметь в виду выполнение всех трех “эталонных” свойств, то можно сказать, что SGN-модель имеет преимущество перед MS-моделью. Но для длинных волн величина фазовой скорости SGN-модели (см. линию 2 на рис. 1) не так хорошо приближает “эталонные” значения (26), как это имеет место в MS-модели.

### 2.3.2. Влияние параметра $B$ на величину фазовой скорости в MS-модели

В этом разделе предоставлены результаты аналитического исследования влияния параметра  $B$  на дисперсионные свойства MS-модели.

Во-первых, отметим свойство монотонной зависимости величины фазовой скорости (21) от параметра  $B$ . В самом деле, рассматривая величину фазовой скорости (21) как функцию  $c_{p,M}(\xi, B)$  от переменной  $\xi = 2\pi d/\lambda = 2\pi\mu$  и параметра  $B$ , получаем

$$\frac{\partial}{\partial B} c_{p,M}(\xi, B) = \frac{c_0^2}{6c_{p,M}(\xi, B)} \frac{\xi^4}{[1 + (B + 1/3)\xi^2]^2} > 0 \quad \forall B \geq 0, \quad \forall \xi > 0. \quad (31)$$

Строгое неравенство (31) означает, что графики зависимостей (21) не пересекаются при  $\xi > 0$  и располагаются тем выше в системе координат рис. 1, чем большее значение имеет параметр  $B$ , а следовательно, самым нижним будет график, отвечающий параметру  $B = 0$ , т. е. график 2, соответствующий SGN-модели. Этот график при  $\xi > 0$  полностью расположен ниже кривой 1, соответствующей “эталонной” величине фазовой скорости (26), т. е. выполняется неравенство

$$c_{p,M}(\xi, B) \Big|_{B=0} < c_{p,Pot}(\xi) \quad \forall \xi > 0.$$

Доказательство основывается на известном неравенстве [36]

$$\frac{1}{1 + \xi^2/3} < \frac{\tanh \xi}{\xi} \quad \forall \xi > 0.$$

С другой стороны, при  $B = 1/15$  график зависимости (21) полностью расположен выше кривой 1, т. е.

$$c_{p,M}(\xi, B) \Big|_{B=1/15} > c_{p,Pot}(\xi) \quad \forall \xi > 0.$$

Этот факт следует из неравенства [36]

$$\frac{15 + \xi^2}{15 + 6\xi^2} > \frac{\tanh \xi}{\xi} \quad \forall \xi > 0.$$

Из свойства (31) следует, что при  $0 < B < 1/15$  графики зависимостей (21) лежат строго между кривыми, соответствующими значениям параметра  $B = 0$  и  $B = 1/15$ . Но в отличие от этих двух крайних кривых, графики зависимостей (21) и (26) при  $0 < B < 1/15$  пересекаются. Докажем это.

**Лемма 1.** *Уравнение*

$$c_{p,M}(\xi, B) - c_{p,Pot}(\xi) = 0, \quad B \in \left(0, \frac{1}{15}\right), \quad (32)$$

имеет единственное решение  $\xi_0(B) > 0$ , причем

$$\lim_{B \rightarrow 1/15} \xi_0(B) = 0. \quad (33)$$

**Доказательство.** В силу (30) имеем

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} c_{p,M}(\xi, B) = c_0 \sqrt{\frac{B}{B + 1/3}} > 0, \quad B \in \left(0, \frac{1}{15}\right).$$

С другой стороны,

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} c_{p,Pot}(\xi) = c_0 \sqrt{\lim_{\xi \rightarrow \infty} \frac{\tanh \xi}{\xi}} = 0.$$

Поэтому найдется значение  $\xi_2(B) > 0$  такое, что будет выполняться неравенство

$$c_{p,M}(\xi, B) - c_{p,Pot}(\xi) > 0 \quad \forall \xi \geq \xi_2(B), \quad B \in \left(0, \frac{1}{15}\right). \quad (34)$$

Из свойств монотонности (28), (29) следует, что в качестве  $\xi_2(\beta_N)$  можно взять, например, корень уравнения

$$\frac{\tanh \xi}{\xi} = \frac{B}{B + 1/3}, \quad B \in \left(0, \frac{1}{15}\right).$$

Очевидно, что это уравнение имеет единственное решение для каждого  $B$  из указанного промежутка.

Теперь покажем, что в окрестности точки  $\xi = 0$  вместо (34) выполняется противоположное неравенство, а именно существует  $\xi_1(B) > 0$  такое, что

$$c_{p,M}(\xi, B) - c_{p,Pot}(\xi) < 0 \quad \forall \xi \in (0, \xi_1(B)), \quad B \in \left(0, \frac{1}{15}\right). \quad (35)$$

Доопределив по непрерывности функции  $c_{p,M}(\xi, B)$  и  $c_{p,Pot}(\xi)$  при  $\xi = 0$  значением  $c_0$ , докажем справедливость неравенства, эквивалентного (35):

$$\underbrace{\xi (1 + B\xi^2) \cosh \xi - \left[1 + \left(B + \frac{1}{3}\right)\xi^2\right] \sinh \xi}_{q(\xi)} < 0 \quad \forall \xi \in (0, \xi_1(B)), \quad B \in \left(0, \frac{1}{15}\right).$$

Справедливы равенства

$$q_\xi(\xi) = \xi \left[ \underbrace{-\left(\frac{1}{3} - 2B\right) \xi \cosh \xi + \left(\frac{1}{3} - 2B + B\xi^2\right) \sinh \xi}_{r(\xi)} \right],$$

$$r_\xi(\xi) = \xi \left[ \underbrace{B\xi \cosh \xi + \left(4B - \frac{1}{3}\right) \sinh \xi}_{s(\xi)} \right],$$

$$s_\xi(\xi) = \left(5B - \frac{1}{3} + B\xi \tanh \xi\right) \cosh \xi.$$

Поэтому  $s_\xi(\xi) < 0$  при  $\xi \in (0, \xi_1(B))$ , где  $\xi_1(B)$  — корень уравнения

$$\xi \tanh \xi = \frac{1}{3B} - 5.$$

Очевидно, что при  $B \in (0, 1/15)$  это уравнение имеет единственное решение. Из неравенства  $s_\xi(\xi) < 0$  и граничного условия  $s(0) = 0$  следует, что  $s(\xi) < 0$  для всех  $\xi \in (0, \xi_1(B))$ . Тогда и  $r_\xi(\xi) < 0$ . Но поскольку  $r(0) = 0$ , то  $r(\xi) < 0 \forall \xi \in (0, \xi_1(B))$ . И, в конечном итоге,  $q(\xi) < 0$  при  $\xi \in (0, \xi_1(B))$ . Таким образом, для каждого  $B \in (0, 1/15)$  указано значение  $\xi_1(B) > 0$  такое, что  $\forall \xi \in (0, \xi_1(B))$  выполняется неравенство (35).

Учитывая неравенства (34), (35) и непрерывность функции

$$f(\xi, B) \stackrel{\text{def}}{=} c_{p,M}(\xi, B) - c_{p,Pot}(\xi), \quad \xi \geq 0, \quad (36)$$

приходим к выводу о том, что уравнение (32) имеет решение  $\xi_0(B)$ , при этом

$$\xi_1(B) < \xi_0(B) < \xi_2(B).$$

Итак, хотя бы один корень  $\xi_0(B)$  существует. Легко показать, что  $f_\xi(\xi, B) > 0$  при  $\xi \geq \xi_0(B)$ . Следовательно, корень единственный.  $\square$

**Лемма 2.** *Функция  $f(\xi, B)$  имеет единственный локальный минимум при  $\xi > 0$ , при этом*

$$\min_{\xi > 0} f(\xi, B) = f(\xi_*(B), B) < 0, \quad B \in \left(0, \frac{1}{15}\right),$$

$$0 < \xi_*(B) < \xi_0(B). \quad (37)$$

$$\lim_{B \rightarrow \frac{1}{15}} f(\xi_*(B), B) = 0. \quad (38)$$

**Доказательство.** Согласно равенствам  $f(0, B) = 0$ ,  $f(\xi_0(B), B) = 0$  и неравенству

$$f(\xi, B) < 0 \quad \forall \xi \in (0, \xi_0(B)), \quad B \in \left(0, \frac{1}{15}\right),$$

существует хотя бы одна точка  $\xi_*(B) \in (0, \xi_0(B))$  локального минимума. Нетрудно показать, что  $f_\xi(\xi, B) > 0$  при  $\xi > \xi_*(B)$ . Отсюда и следует единственность точки локального минимума.  $\square$

На рис. 2, а показано поведение функции (36) при четырех значениях параметра  $B$ . Эти графики косвенно подтверждают справедливость утверждений (33), (37) и (38).

### 2.3.3. О порядке аппроксимации фазовой скорости

Известно [11], что при  $B = 1/15$  фазовая скорость (21) MS-модели аппроксимирует “эталонную” скорость (26) 3D-модели (22)–(24) с точностью  $O(\mu^4)$ . Это понимается в том

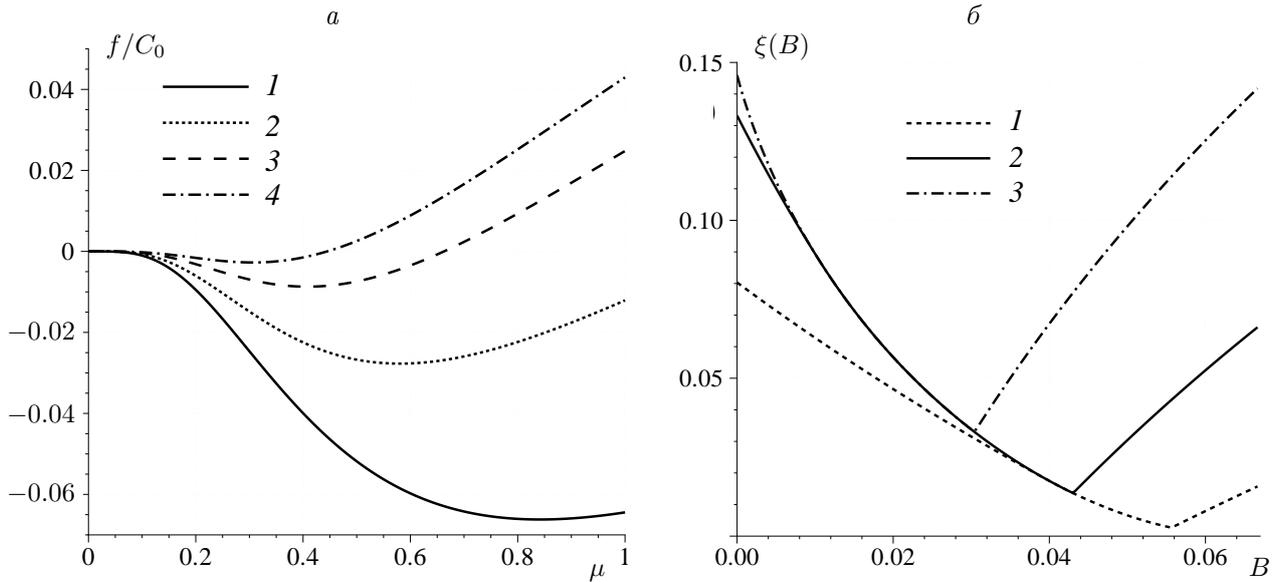


Рис. 2. Дисперсионные свойства MS-модели (20): *a* — графики зависимости (36) как функции от параметра дисперсии  $\mu$  при  $B = 1/60, 1/30, 1/21$  и  $1/18$  (кривые 1–4 соответственно); *b* — графики зависимости (44) при  $\mu_r = 0.5, 1.0$  и  $2.0$  (кривые 1–3 соответственно)  
 Fig. 2. Dispersive properties of MS-model (20): *a* — graphs of the dependency (36) as a function of dispersion parameter  $\mu$  under  $B = 1/60, 1/30, 1/21$  and  $1/18$  (curves 1–4); *b* — graphs of the dependency (44) under  $\mu_r = 0.5, 1.0$  and  $2.0$  (curves 1–3)

смысле, что разложения указанных скоростей (или их квадратов) в степенные ряды по переменной  $\xi = 2\pi\mu$  совпадают вплоть до членов, содержащих  $\xi^4$ :

$$\frac{c_{p,Pot}^2(\xi)}{c_0^2} = 1 - \frac{1}{3}\xi^2 + \frac{2}{15}\xi^4 - \frac{17}{315}\xi^6 + O(\xi^8), \quad (39)$$

$$\left. \frac{c_{p,M}^2(\xi, B)}{c_0^2} \right|_{B=1/15} = \frac{1 + \frac{1}{15}\xi^2}{1 + \frac{2}{5}\xi^2} = 1 - \frac{1}{3}\xi^2 + \frac{2}{15}\xi^4 - \frac{4}{75}\xi^6 + O(\xi^8). \quad (40)$$

По поводу порядка аппроксимации следует сделать два замечания. Во-первых, отметим, что MS-модель обладает тем замечательным свойством, что, хотя уравнения этой модели аппроксимируют уравнения Эйлера с точностью  $O(\mu^2)$  при  $\mu \rightarrow 0$ , дисперсионное соотношение и фазовая скорость трехмерной модели аппроксимируются при  $B = 1/15$  с большей точностью  $O(\mu^4)$ .

Второе замечание касается вопроса о том, когда можно говорить о порядке аппроксимации, сравнивая ряды (39) и (40). Дело в том, что степенной ряд для гиперболического тангенса сходится при  $\xi < \pi/2$ , а  $[2, 2]$ -аппроксимант Padé можно представить в виде степенного ряда (40) только при  $\xi < \sqrt{2.5}$ . Таким образом, представления (39), (40) справедливы одновременно только при выполнении условия

$$\mu < 0.25.$$

При нарушении этого условия нет оснований говорить о порядке аппроксимации, сравнивая ряды (39) и (40), но можно обсуждать величину погрешности аппроксимации. Для этого надо сравнивать непосредственно величины скоростей (21) и (26), не прибегая к разложению в степенные ряды.

### 2.3.4. Оптимальное значение параметра $B$

Здесь рассматривается вопрос о выборе оптимального значения параметра  $B$ , т. е. такого значения, при котором достигается минимальное отклонение фазовой скорости (21) от “эталонной” (26). Для решения этой задачи надо указать, во-первых, интервал  $(0, \mu_r)$  параметра дисперсии  $\mu$ , на котором будет вычисляться отклонение и, во-вторых, определить норму, в которой оно будет измеряться. Таким образом, оптимальное значение  $B$  будет зависеть от  $\mu_r$  и оценочной нормы.

Поскольку при выводе НЛД-моделей используется условие малости параметра дисперсии  $\mu \ll 1$ , то и при анализе дисперсионных характеристик этих моделей следует ограничиваться не слишком большими значениями  $\mu_r$  (выбор границы  $\mu_r$  опирается на эвристический опыт). Что касается выбора нормы для вычисления величины отклонения, то ввиду гладкости функций (21), (26) незачем привлекать среднеквадратичную норму, как это делается во многих работах. На наш взгляд, будет правильным, если для этого использовать более сильную равномерную норму

$$\varepsilon(B) \stackrel{\text{def}}{=} \max_{\xi \in [0, \xi_r]} |f(\xi, B)|, \quad (41)$$

где  $\xi_r = 2\pi\mu_r$ . Тогда за оптимальное значение  $B_{\text{opt}}$  примем такое, для которого выполняется следующее равенство:

$$\varepsilon(B_{\text{opt}}) = \min_{B \geq 0} \varepsilon(B). \quad (42)$$

Используя свойство монотонности (31), а также соотношения (33), (38), получаем, что

$$\varepsilon(B) \Big|_{B \geq \frac{1}{15}} > \varepsilon(B) \Big|_{B \in (0, \frac{1}{15})},$$

поэтому оптимальное значение параметра  $B$  может лежать только в интервале

$$B_{\text{opt}} \in \left(0, \frac{1}{15}\right),$$

и формулу (42) можно переписать так:

$$\varepsilon(B_{\text{opt}}) = \min_{B \in (0, \frac{1}{15})} \varepsilon(B). \quad (43)$$

Основываясь на утверждениях, доказанных в леммах 1, 2, получаем, что при  $B \in \left(0, \frac{1}{15}\right)$  для вычисления  $\varepsilon(B)$  из правой части (43) можно использовать формулу

$$\varepsilon(B) = \begin{cases} \max \{-f(\xi_*(B), B); f(\xi_r)\}, & \xi_0(B) < \xi_r, \\ -f(\xi_*(B), B), & \xi_*(B) \leq \xi_r \leq \xi_0(B), \\ -f(\xi_r, B), & \xi_r < \xi_*(B). \end{cases} \quad (44)$$

На рис. 2, б линия 2 изображает график зависимости (44) при  $\mu_r = 1$ . Для этого значения  $\mu_r$  получаем  $B_{\text{opt}} = 0.0427$ . При  $\mu_r = 0.5$  имеем  $B_{\text{opt}} = 0.0557$ . Таким образом, оптимальное значение  $B_{\text{opt}}$  зависит от правой границы  $\mu_r$  интервала, на котором вычисляется величина (41), на что обращалось внимание и ранее (см., например, [18, 20]).

### 2.3.5. Поведение фазовой скорости на коротких волнах

Исследования, опубликованные в [11, 15] и опирающиеся на анализ численных расчетов в рамках приближенных и трехмерных моделей с привлечением экспериментальных данных, показывают, что модели с усредненной скоростью “работают” в диапазоне  $\mu < 0.22$ , т. е. их можно использовать для математического моделирования поверхностных волн только с относительно большой длиной. Однако надо иметь в виду, что даже при задании в начальных данных длинных волн в численном решении будут присутствовать гармоники с разными длинами  $\lambda$ , в том числе очень малыми. Бесконечно малыми они быть не могут, поскольку для данной сетки с размером  $\Delta x$  сторон расчетных ячеек возможные значения длин гармоник, которые могут быть воспроизведены на такой сетке, ограничены снизу:  $\lambda \geq 2\Delta x$ . Если используемую сетку характеризовать [37, 38] параметром  $\delta = d/\Delta x$ , то это ограничение выглядит так:

$$\frac{\mu}{\delta} \in \left(0, \frac{1}{2}\right]. \quad (45)$$

Параметр  $\delta$  можно трактовать как число ячеек, приходящихся на толщину жидкого слоя, или глубину. Параметр  $\mu/\delta$  равен обратной величине, определяемой как число узлов расчетной сетки, приходящихся на длину волны. Отметим, что параметр  $\delta$  является более удобной характеристикой численного алгоритма, так как он содержит в явном виде величины  $d$  и  $\Delta x$ , тогда как длина волны изменяется в процессе расчета.

Короткие волны соответствуют окрестности правой границы этого промежутка, и, поскольку присутствие таких коротких волн обусловлено лишь свойствами используемого численного алгоритма, их следует отфильтровывать. Например, можно принудительно подавлять амплитуду коротковолновых гармоник. Другой путь уменьшения влияния паразитических колебаний — добиваться обеспечения малой скорости распро-

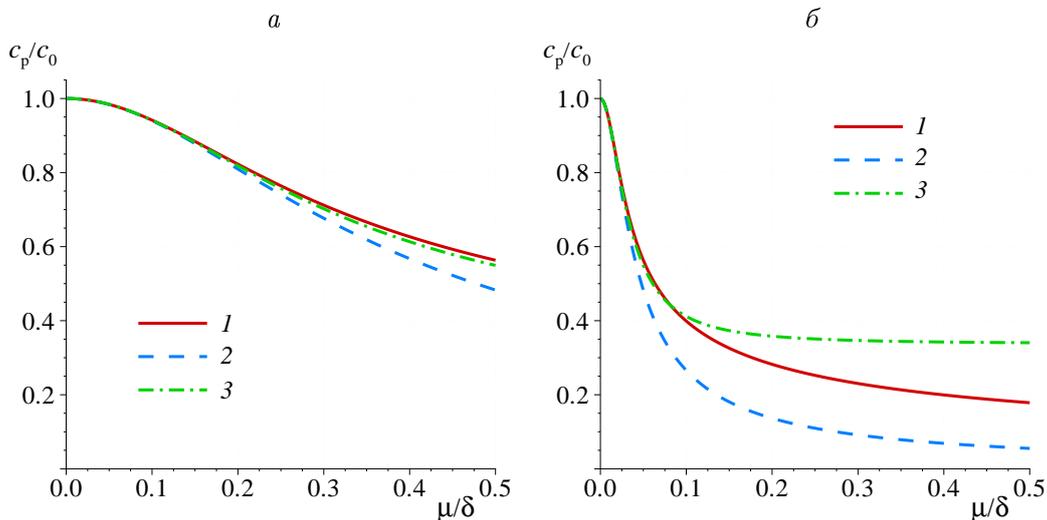


Рис. 3. Дисперсионные свойства гидродинамических моделей: зависимость величины фазовой скорости от параметра дисперсии для 3D-модели потенциальных течений (1), SGN-модели (2) и MS-модели (3) при значениях  $\delta = 1$  (а),  $\delta = 10$  (б)

Fig. 3. Dispersive properties of hydrodynamic models: dependence of the phase velocity value on the dispersion parameter for 3D-model of potential flows (1), SGN-model (2) and MS-model (3) under  $\delta = 1$  (a);  $\delta = 10$  (b)

странения высокочастотных гармоник, не имеющих физического смысла. Если на последний прием смотреть с точки зрения свойств математической модели, то в окрестности правой границы промежутка (45) близость к нулю фазовой скорости коротковолновых гармоник приближенной модели становится более важной, чем свойство повышенного порядка аппроксимации “эталонной” фазовой скорости 3D-модели (22)–(24). На рис. 3 показаны графики величин фазовых скоростей как функций от параметра  $\mu/\delta$ . Видно, что на мелких сетках ( $\delta = 10$ ) фазовая скорость коротковолновых гармоник SGN-модели существенно ниже, чем для MS-модели (при  $B = 1/21$ ). Поэтому можно сказать, что по свойству близости к нулю фазовой скорости коротковолновых гармоник SGN-модель предпочтительнее по сравнению с MS-моделью. Повторим еще раз, что для длинных волн более предпочтительной является MS-модель.

### 3. Свойства полностью нелинейной mSGN-модели

В случае идеальной однородной жидкости уравнения Эйлера инвариантны относительно преобразования Галилея и обладают законами сохранения массы, импульса, полной энергии. При переходе к приближенным уравнениям волновой гидродинамики возможна потеря этих свойств.

Важно выяснить, выполняются ли для полученной mSGN-модели (5), (12)–(15) балансовые соотношения для массы, импульса и полной энергии, поскольку их наличие обеспечивает физическую состоятельность модели и может использоваться как для ее теоретического исследования, так и для построения надежных вычислительных алгоритмов. Уравнение неразрывности (5) записано в консервативной форме, чем обеспечивается выполнение закона сохранения массы. Уравнение движения (12) имеет квазиконсервативную форму записи (дивергентная левая часть и наличие источников члена в правой части) и выражает собой выполнение балансового соотношения для полного импульса  $H\mathbf{u}$ . В случае горизонтального дна это балансовое соотношение переходит в закон сохранения полного импульса.

Важным преимуществом полученной полностью нелинейной mSGN-модели является инвариантность относительно преобразования Галилея. Это следует из того [24], что в уравнениях mSGN-модели присутствуют только полные производные (10). В самом деле, систему уравнений (5), (12) можно записать в следующей эквивалентной форме:

$$DH + H\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (46)$$

$$D\mathbf{u} + \frac{\nabla p_m}{H} = \frac{\check{p}_m}{H} \nabla h, \quad (47)$$

где  $D\mathbf{u} = (Du_1, Du_2)^\top$ ,  $\mathbf{u} = (u_1, u_2)^\top$ . В выражение (13) также входит только полная производная по времени:

$$\mathbf{I}_0 = D\mathbf{u} + g\nabla\eta.$$

Отметим, что для слабо нелинейных аналогов (1), (2), (18) и (1), (2), (19) mSGN-модели, а также для MS-модели (1), (2), (4) свойство инвариантности относительно преобразования Галилея не выполняется.

Балансовое соотношение для полной энергии  $\mathcal{E}_m$  может быть получено скалярным умножением уравнения движения (47) на вектор скорости  $\mathbf{u}$  и учетом известного определения полной производной:

$$D\left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}{2}\right) + \frac{1}{H}\nabla \cdot (p_m \mathbf{u}) - \frac{p_m}{H}\nabla \cdot \mathbf{u} - \frac{\check{p}_m}{H}Dh = -\frac{\check{p}_m}{H}h_t. \quad (48)$$

Используя выражения (14) для давления и уравнение неразрывности в виде (46), приходим к следующей цепочке равенств:

$$\begin{aligned} & \frac{p_m}{H}\nabla \cdot \mathbf{u} + \frac{\check{p}_m}{H}Dh = \\ & = \left[ g\frac{H}{2} - \frac{H^2}{3}(D(\nabla \cdot \mathbf{u}) - (\nabla \cdot \mathbf{u})^2 - \beta\nabla \cdot \mathbf{I}_0) - \frac{H}{2}(D^2h - \beta\mathbf{I}_0 \cdot \nabla h) \right] \nabla \cdot \mathbf{u} + \\ & + \left[ g - \frac{H}{2}(D(\nabla \cdot \mathbf{u}) - (\nabla \cdot \mathbf{u})^2 - \beta\nabla \cdot \mathbf{I}_0) - (D^2h - \beta\mathbf{I}_0 \cdot \nabla h) \right] Dh = \\ & = g\left(-\frac{DH}{2} + Dh\right) - \frac{H^2}{6}D(\nabla \cdot \mathbf{u})^2 - \frac{H}{3}(\nabla \cdot \mathbf{u})^2DH - \\ & - \frac{H}{2}(\nabla \cdot \mathbf{u})D^2h - \frac{H}{2}D(\nabla \cdot \mathbf{u})Dh - \frac{DH}{2}(\nabla \cdot \mathbf{u})Dh - (D^2h)Dh - \\ & - \beta\frac{H}{3}(\nabla \cdot \mathbf{I}_0)DH - \beta(\mathbf{I}_0 \cdot \nabla h)\frac{DH}{2} + \beta\frac{H}{2}(\nabla \cdot \mathbf{I}_0)Dh + \beta(\mathbf{I}_0 \cdot \nabla h)Dh = \\ & = -D\left[\frac{H^2}{6}(\nabla \cdot \mathbf{u})^2 + \frac{H}{2}(\nabla \cdot \mathbf{u})Dh + \frac{(Dh)^2}{2} + g\frac{H-2h}{2} + \beta\mathbf{e}\right] + \\ & + \beta D\mathbf{e} + \beta\frac{H^2}{6}D(\nabla \cdot \mathbf{I}_0) - \beta(\mathbf{I}_0 \cdot \nabla h)\frac{DH}{2} + \beta\frac{H}{2}(\nabla \cdot \mathbf{I}_0)Dh + \beta(\mathbf{I}_0 \cdot \nabla h)Dh. \end{aligned}$$

Следовательно, уравнение (48) принимает вид

$$\frac{\partial \mathcal{E}_m}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathcal{E}_m + \frac{1}{H}\nabla \cdot (p_m \mathbf{u}) = -\frac{\check{p}_m}{H}h_t + \mathcal{F}_e, \quad (49)$$

где

$$\mathcal{F}_e = \beta D\mathbf{e} + \beta \left[ \frac{H^2}{6}D(\nabla \cdot \mathbf{I}_0) + \frac{H}{2}(\nabla \cdot \mathbf{I}_0)Dh - (\mathbf{I}_0 \cdot \nabla h)D\frac{H-2h}{2} \right].$$

При  $\beta \neq 0$  источниковый член  $\mathcal{F}_e$  в правой части уравнения (49) не обращается в нуль при любом выборе величины  $\mathbf{e}$ , поскольку выражение в квадратных скобках не представляется в виде полной производной по времени. Например, даже в случае горизонтального дна

$$\frac{H^2}{6}D(\nabla \cdot \mathbf{I}_0) \neq D\left(\frac{H^2}{6}\nabla \cdot \mathbf{I}_0\right),$$

за исключением частного случая течения, для которого в каждый момент времени выполняется условие  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ .

Умножая уравнение (49) на  $H$ , уравнение неразрывности — на  $\mathcal{E}_m$  и складывая результаты, получаем уравнение баланса полной энергии mSGN-модели, левая часть которого имеет дивергентную форму:

$$\frac{\partial H\mathcal{E}_m}{\partial t} + \nabla \cdot \left( \mathbf{u}H \left( \mathcal{E}_m + \frac{p_m}{H} \right) \right) = -\check{p}_m h_t + H\mathcal{F}_e.$$

При  $\beta = 0$  и в случае стационарной донной поверхности это уравнение имеет вид закона сохранения полной энергии в исходной SGN-модели, но для модифицированной mSGN-модели ( $\beta \neq 0$ ) закон сохранения полной энергии не выполняется не только в случае неподвижного дна произвольной формы, но даже и при горизонтальном дне ( $\mathcal{F}_e \neq 0$ ). В этом заключается существенный недостаток mSGN-модели.

## Заключение

В статье представлена однопараметрическая полностью нелинейная слабо дисперсионная mSGN-модель с улучшенными дисперсионными свойствами, предназначенная для исследования течения жидкости с поверхностными волнами над дном произвольной формы, в общем случае подвижным. Она относится к классу моделей второго длинноволнового приближения и получена путем модификации дисперсионных членов давления в известной SGN-модели [24]. Показано, что в некоторых частных случаях mSGN-модель совпадает или аналогична известным [12, 16] слабо нелинейным слабо дисперсионным моделям, обладающим улучшенными дисперсионными характеристиками.

Дисперсионный анализ mSGN-модели показал, что порядок аппроксимации дисперсионного соотношения трехмерной модели потенциальных течений повышается со второго до четвертого только для достаточно длинных волн. Однако аппроксимация улучшается и для более коротких волн, чем в SGN-модели. Анализ показал также, что не существует универсального оптимального значения параметра, приводящего к “улучшенной” аппроксимации, поскольку это оптимальное значение зависит от рассматриваемого диапазона длин волн. Кроме того, показано, что при определении оптимального значения параметра модели с улучшенным дисперсионным соотношением на длинных волнах важно, чтобы для коротких волн их фазовая скорость была близка к нулю (предельное свойство “эталонной” трехмерной модели потенциальных течений). Для mSGN-модели это свойство может нарушаться, что является одним из ее недостатков.

Отметим, что примененный в работе метод можно использовать для реализации предложенной в [39] техники улучшения дисперсионных свойств. Варианты этой техники можно применять не только к НЛД-моделям с усредненной скоростью, но и к моделям, в которых в качестве вектора скорости выбирается [15] горизонтальная составляющая вектора скорости трехмерной модели на некоторой поверхности, расположенной между дном и поверхностью воды. Например, в [40] после модификации модели [15] для фазовой скорости получена аппроксимация Padé (4,4). Однако в подобных работах основное внимание акцентируется на улучшении дисперсионных характеристик линейных моделей, оставляя вне рамок исследований такие важные в нелинейном случае свойства, как выполнение законов сохранения и инвариантность относительно преобразования Галилея.

В настоящей работе показано, что уравнения mSGN-модели инвариантны относительно преобразования Галилея и для нее выполняются закон сохранения массы и закон баланса полного импульса (закон сохранения в случае горизонтального дна). Однако даже в случае горизонтального дна закон сохранения полной энергии не выполняется, что может негативно сказаться при проведении расчетов на длительные времена. По всей видимости, этим отрицательным качеством обладают все имеющиеся на сегодняшний день НЛД-модели с улучшенными дисперсионными характеристиками.

**Благодарности.** Результаты получены при выполнении работы по теме № 0316-2019-0001 “Разработка и исследование новых элементов вычислительной технологии решения фундаментальных и прикладных задач аэро-, гидро- и волновой динамики” государственного задания ФИЦ ИВТ. Работа поддержана Национальным исследовательским агентством Франции в рамках программы “Инвестиции в будущее” (№ ANR-18-EURE-0016 — Solar Academy). Авторы выражают глубокую признательность анонимному рецензенту за ценные замечания и советы по улучшению стиля представления материала статьи.

## Список литературы

- [1] **Fedotova Z.I., Khakimzyanov G.S., Dutykh D.** Energy equation for certain approximate models of long-wave hydrodynamics. Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. 2014; 29(3):167–178.
- [2] **Шокин Ю.И., Федотова З.И., Хакимзянов Г.С.** Иерархия нелинейных моделей гидродинамики длинных поверхностных волн. ДАН. 2015; 462(2):168–172.
- [3] **Madsen P.A., Fuhrman D.R.** High-order Boussinesq-type modeling of nonlinear wave phenomena in deep and shallow water. Advances in Numerical Simulation of Nonlinear Water Waves (ed. Ma Q.W.). Singapore: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd; 2010: 245–286.
- [4] **Brocchini M.** A reasoned overview on Boussinesq-type models: The interplay between physics, mathematics and numerics. Proc. of Royal Soc. of London. A. 2013; 469(2160):20130496.
- [5] **Kirby J.T.** Boussinesq models and their application to coastal processes across a wide range of scales. Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering. 2016; 142(6):03116005.
- [6] **Witting J.M.** A unified model for the evolution of nonlinear water waves. Journal Comput. Phys. 1984; 56(2):203–236.
- [7] **Ataie-Ashtiani B., Najafi-Jilani A.** A higher-order Boussinesq-type model with moving bottom boundary: Applications to submarine landslide tsunami waves. Int. J. Numer. Meth. Fluids. 2007; (53):1019–1048.
- [8] **Gobbi M.F., Kirby J.T.** Wave evolution over submerged sills: Tests of a high-order Boussinesq model. Coastal Engineering. 1999; (37):57–96.
- [9] **Gobbi M.F., Kirby J.T., Wei G.** A fully nonlinear Boussinesq model for surface waves. Part 2. Extension to  $O(kh)^4$ . Journal of Fluid Mechanics. 2000; (405):181–210.
- [10] **Lynett P., Liu P.L-F.** A multi-layer approach to wave modeling. Proc. of Royal Soc. of London. A., 2004; (460):2637–2669.
- [11] **Madsen P.A., Murray R., Sørensen O.R.** A new form of the Boussinesq equations with improved linear dispersion characteristics. Coastal Engineering. 1991; (15):371–388.
- [12] **Madsen P.A., Sørensen O.R.** A new form of the Boussinesq equations with improved linear dispersion characteristics. Part 2. A slowly-varying bathymetry. Coastal Engineering. 1992; (18):183–204.
- [13] **Abbott M.B., Petersen H.M., Skovgaard O.** On the numerical modelling of short waves in shallow water. Journal of Hydraulic Research. 1978; 16(3):173–204.
- [14] **Peregrine D.H.** Long waves on a beach. Journal of Fluid Mechanics. 1967; (27):815–827.
- [15] **Nwogu O.** Alternative form of Boussinesq equations for nearshore wave propagation. Journal of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering. 1993; 119(6):618–638.
- [16] **Beji S., Nadaoka K.** A formal derivation and numerical modelling of the improved Boussinesq equations for varying depth. Ocean Engineering. 1996; 23(8):691–704.

- [17] **Agnon Y., Madsen P.A., Schäffer H.A.** A new approach to high order Boussinesq models. *Journal of Fluid Mechanics*. 1999; (399):319–333.
- [18] **Madsen P.A., Bingham H.B., Liu H.** A new Boussinesq method for fully nonlinear waves from shallow to deep water. *Journal of Fluid Mechanics*. 2002; (462):1–30.
- [19] **Madsen P.A., Agnon Y.** Accuracy and convergence of velocity formulations for water waves in the framework of Boussinesq theory. *Journal of Fluid Mechanics*. 2003; (477):285–319.
- [20] **Clamond D., Dutykh D., Mitsotakis D.** Conservative modified Serre — Green — Naghdi equations with improved dispersion characteristics. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* 2017; (45):245–257.
- [21] **Løvholt F., Pedersen G.K., Glimsdal S.** Coupling of dispersive tsunami propagation and shallow water coastal response. *The Open Oceanography Journal*. 2010; (4):71–82.
- [22] **Tavakkol S., Lynett P.** Celeris: A GPU-accelerated open source software with a Boussinesq type wave solver for real-time interactive simulation and visualization. *Computer Physics Communications*. 2017; (217):117–127.
- [23] **Shi F., Kirby J.T., Harris J.C., Geiman J.D., Grilli S.T.** A high-order adaptive time-stepping TVD solver for Boussinesq modelling of breaking waves and coastal inundation. *Ocean Modelling*. 2012; (43–44):36–51.
- [24] **Khakimzyanov G., Dutykh D., Fedotova Z., Mitsotakis D.** Dispersive shallow water wave modelling. Part I: Model derivation on a globally flat space. *Communications in Computational Physics*. 2018; 23(1):1–29.
- [25] **Федотова З.И., Хакимзянов Г.С., Гусев О.И., Шокина Н.Ю.** История развития и анализ численных методов решения нелинейно-дисперсионных уравнений гидродинамики. II. Двумерные модели. *Вычисл. технологии*. 2017; 22(5):73–109.
- [26] **Khakimzyanov G.S., Gusev O.I., Beisel S.A., Chubarov L.B., Shokina N.Yu.** Simulation of tsunami waves generated by submarine landslides in the Black Sea. *Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling*. 2015; 30(4):227–237.
- [27] **Serre F.** Contribution à l'étude des écoulements permanents et variables dans les canaux. *La Houille Blanche*. 1953; 3:374–388.
- [28] **Serre F.** Contribution à l'étude des écoulements permanents et variables dans les canaux. *La Houille Blanche*. 1953; 3:830–872.
- [29] **Green A.E., Naghdi P.M.** A derivation of equations for wave propagation in water of variable depth. *Journal of Fluid Mechanics*. 1976; (78):237–246.
- [30] **Железняк М.И., Пелиновский Е.Н.** Физико-математические модели наката цунами на берег. Накат цунами на берег: Сб. науч. тр. Горький: ИПФ АН СССР; 1985: 8–33.
- [31] **Khakimzyanov G.S., Dutykh D., Fedotova Z.I.** Dispersive shallow water wave modelling. Part III: Model derivation on a globally spherical geometry. *Communications in Computational Physics*. 2018; 23(2):315–360.
- [32] **Chhay M., Dutykh D., Clamond D.** On the multi-symplectic structure of the Serre — Green — Naghdi equations. *Journal Phys. A: Math. Gen.* 2016; 49(3):03LT01.
- [33] **Федотова З.И., Хакимзянов Г.С.** Анализ условий вывода нелинейно-дисперсионных уравнений. *Вычисл. технологии*. 2012; 17(5):94–108.
- [34] **Khakimzyanov G., Dutykh D.** Long wave interaction with a partially immersed body. Part I: Mathematical models. *Communications in Computational Physics*. 2020; 27(2):321–378.
- [35] **Schäffer H.A., Madsen P.A.** Discussion of “A formal derivation and numerical modelling of the improved Boussinesq equations for varying depth”. *Ocean Engineering*. 1998; 25(6):497–500.
- [36] **Bercu G., Wu S.** Refinements of certain hyperbolic inequalities via the Padé approximation method. *Journal of Nonlinear Science and Applications*. 2016; (9):5011–5020.

- [37] **Fedotova Z.I., Khakimzyanov G.S.** Characteristics of finite-difference methods for dispersive shallow water equations. *Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling*. 2016; 31(3):149–158.
- [38] **Khakimzyanov G., Dutykh D., Gusev O., Shokina N.** Dispersive shallow water wave modelling. Part II: Numerical simulation on a globally flat space. *Communications in Computational Physics*. 2018; 23(1):30–92.
- [39] **Benjamin T.B., Bona J.L., Mahony J.J.** Model equations for long waves in nonlinear dispersive systems. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. A*. 1972; (272):47–78.
- [40] **Schäffer H.A., Madsen P.A.** Further enhancements of Boussinesq-type equations. *Coastal Engineering*. 1995; (26):1–14.

Вычислительные технологии, 2020, том 25, № 5, с. 17–41. © ФИЦ ИВТ, 2020  
 Computational Technologies, 2020, vol. 25, no. 5, pp. 17–41. © FRC ICT, 2020

ISSN 1560-7534  
 eISSN 2313-691X

MATHEMATICAL MODELLING

DOI:10.25743/ICT.2020.25.5.003

**Two-dimensional model of wave hydrodynamics with high accuracy dispersion relation**

КХАКИМЗЯНОВ ГАЯЗ С.<sup>1,2,\*</sup>, ФЕДОТОВА ЗИНАИДА И.<sup>1</sup>, ДУТЯХ ДЕНЫС<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Federal Research Center for Information and Computational Technologies, Novosibirsk, Russia

<sup>2</sup>Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia

<sup>3</sup>Univercity Grenoble Alpes, Univercity Savoie Mont Blanc, CNRS, LAMA, Chambéry, France

\*Corresponding author: Khakimzyanov Gayaz S., e-mail: khak@ict.nsc.ru

Received May 27, 2020, revised August 28, 2020, accepted September 4, 2020

**Abstract**

Application of nonlinear dispersion wave hydrodynamics (NLD-) models for solving practical problems constantly stimulates the search for ways to expand their field of applicability and achieve a more accurate reproduction of the characteristics of the simulated processes. A productive step in this direction turned out to be the method proposed by Madsen & Sørensen (1992), which made it possible to increase the approximation order of the dispersion relation of the Peregrine model while preserving the third order of derivatives included in the original equations and the second order of long-wave approximation. Later, other approaches were proposed to achieve this goal, which had a noticeable effect on expanding the field of applicability of NLD-models (for example, Nwogu (1993), Beji & Nadaoka (1996)).

In the present work, we set a similar goal — to improve the properties of the dispersion relation of the model (and, therefore, the phase velocity), providing the Pade approximation (2,2) of the dispersion relation of the 3D model of potential flows. In contrast to earlier works on this subject, where weakly non-linear models were considered, we proceed from the fully nonlinear weakly dispersive two-dimensional Serre — Green — Naghdi (SGN-) model. The novelty of the proposed method consists in modifying the formula for the non-hydrostatic part of the pressure, while the accuracy of the long-wave approximation is preserved. It is shown that in some special cases the obtained fully nonlinear model is close to the known models (for example, after appropriate simplification it coincides with the model from Beji & Nadaoka (1996)). A dispersion analysis was performed one of the results of which was the conclusion that for sufficiently long waves the

approximation order of the dispersion relation of the 3D model increases from the second to the fourth and an improvement was also achieved for more short waves. The proposed modification of the SGN-model is invariant with respect to the Galilean transformation; the law of conservation of mass and the law of balance of the total momentum are satisfied. However, the law of conservation of total energy is not satisfied. Apparently all NLD-models with improved dispersion characteristics possess this negative quality.

*Keywords:* long surface waves, nonlinear dispersive equations, dispersion relation, phase velocity.

*Citation:* Khakimzyanov G.S., Fedotova Z.I., Dutykh D. Two-dimensional model of wave hydrodynamics with high accuracy dispersion relation. Computational Technologies. 2020; 25(5):17–41. DOI:10.25743/ICT.2020.25.5.003. (In Russ.)

**Acknowledgements.** The results were obtained within the framework of the theme No. 0316-2019-0001 “Development and research of new elements of computational technology for solving fundamental and applied problems of aero-, hydro- and wave dynamics” of the state task of the Federal Research Center for Information and Computational Technologies. This work has been supported by the French National Research Agency, through Investments for Future Program (ref. ANR-18-EURE0016 — Solar Academy). The authors would like to thank the anonymous Referee for helping us to shape this manuscript.

## References

1. **Fedotova Z.I., Khakimzyanov G.S., Dutykh D.** Energy equation for certain approximate models of long-wave hydrodynamics. Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. 2014; 29(3):167–178.
2. **Shokin Yu.I., Fedotova Z.I., Khakimzyanov G.S.** Hierarchy of nonlinear models of the hydrodynamics of long surface waves. Doklady Physics. 2015; 60(5):224–228.
3. **Madsen P.A., Fuhrman D.R.** High-order Boussinesq-type modeling of nonlinear wave phenomena in deep and shallow water. Advances in Numerical Simulation of Nonlinear Water Waves (ed. Ma Q.W.). Singapore: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd; 2010: 245–286.
4. **Brocchini M.** A reasoned overview on Boussinesq-type models: The interplay between physics, mathematics and numerics. Proc. of Royal Soc. of London. A. 2013; 469(2160):20130496.
5. **Kirby J.T.** Boussinesq models and their application to coastal processes across a wide range of scales. Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering. 2016; 142(6):03116005.
6. **Witting J.M.** A unified model for the evolution of nonlinear water waves. Journal Comput. Phys. 1984; 56(2):203–236.
7. **Ataie-Ashtiani B., Najafi-Jilani A.** A higher-order Boussinesq-type model with moving bottom boundary: Applications to submarine landslide tsunami waves. Int. J. Numer. Meth. Fluids. 2007; (53):1019–1048.
8. **Gobbi M.F., Kirby J.T.** Wave evolution over submerged sills: Tests of a high-order Boussinesq model. Coastal Engineering. 1999; (37):57–96.
9. **Gobbi M.F., Kirby J.T., Wei G.** A fully nonlinear Boussinesq model for surface waves. Part 2. Extension to  $O(kh)^4$ . Journal of Fluid Mechanics. 2000; (405):181–210.
10. **Lynett P., Liu P.L-F.** A multi-layer approach to wave modeling. Proc. of Royal Soc. of London. A., 2004; (460):2637–2669.
11. **Madsen P.A., Murray R., Sørensen O.R.** A new form of the Boussinesq equations with improved linear dispersion characteristics. Coastal Engineering. 1991; (15):371–388.
12. **Madsen P.A., Sørensen O.R.** A new form of the Boussinesq equations with improved linear dispersion characteristics. Part 2. A slowly-varying bathymetry. Coastal Engineering. 1992; (18):183–204.
13. **Abbott M.B., Petersen H.M., Skovgaard O.** On the numerical modelling of short waves in shallow water. Journal of Hydraulic Research. 1978; 16(3):173–204.
14. **Peregrine D.H.** Long waves on a beach. Journal of Fluid Mechanics. 1967; (27):815–827.
15. **Nwogu O.** Alternative form of Boussinesq equations for nearshore wave propagation. Journal of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering. 1993; 119(6):618–638.
16. **Beji S., Nadaoka K.** A formal derivation and numerical modelling of the improved Boussinesq equations for varying depth. Ocean Engineering. 1996; 23(8):691–704.

17. **Agnon Y., Madsen P.A., Schäffer H.A.** A new approach to high order Boussinesq models. *Journal of Fluid Mechanics*. 1999; (399):319–333.
18. **Madsen P.A., Bingham H.B., Liu H.** A new Boussinesq method for fully nonlinear waves from shallow to deep water. *Journal of Fluid Mechanics*. 2002; (462):1–30.
19. **Madsen P.A., Agnon Y.** Accuracy and convergence of velocity formulations for water waves in the framework of Boussinesq theory. *Journal of Fluid Mechanics*. 2003; (477):285–319.
20. **Clamond D., Dutykh D., Mitsotakis D.** Conservative modified Serre — Green — Naghdi equations with improved dispersion characteristics. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* 2017; (45):245–257.
21. **Løvholt F., Pedersen G.K., Glimsdal S.** Coupling of dispersive tsunami propagation and shallow water coastal response. *The Open Oceanography Journal*. 2010; (4):71–82.
22. **Tavakkol S., Lynett P.** Celeris: A GPU-accelerated open source software with a Boussinesq type wave solver for real-time interactive simulation and visualization. *Computer Physics Communications*. 2017; (217):117–127.
23. **Shi F., Kirby J.T., Harris J.C., Geiman J.D., Grilli S.T.** A high-order adaptive time-stepping TVD solver for Boussinesq modelling of breaking waves and coastal inundation. *Ocean Modelling*. 2012; (43–44):36–51.
24. **Khakimzyanov G., Dutykh D., Fedotova Z., Mitsotakis D.** Dispersive shallow water wave modelling. Part I: Model derivation on a globally flat space. *Communications in Computational Physics*. 2018; 23(1):1–29.
25. **Fedotova Z.I., Khakimzyanov G.S., Gusev O.I., Shokina N.Yu.** History of the development and analysis of numerical methods for solving nonlinear dispersive equations of hydrodynamics. II. Two-dimensional models. *Computational Technologies*. 2017; 22(5):73–109. (In Russ.)
26. **Khakimzyanov G.S., Gusev O.I., Beisel S.A., Chubarov L.B., Shokina N.Yu.** Simulation of tsunami waves generated by submarine landslides in the Black Sea. *Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling*. 2015; 30(4):227–237.
27. **Serre F.** Contribution à l'étude des écoulements permanents et variables dans les canaux. *La Houille Blanche*. 1953; 3:374–388.
28. **Serre F.** Contribution à l'étude des écoulements permanents et variables dans les canaux. *La Houille Blanche*. 1953; 3:830–872.
29. **Green A.E., Naghdi P.M.** A derivation of equations for wave propagation in water of variable depth. *Journal of Fluid Mechanics*. 1976; (78):237–246.
30. **Zheleznyak M.I., Pelinovsky E.N.** Physical and mathematical models of the tsunami climbing a beach. *Tsunami Climbing a Beach: Sb. nauch. tr. Gor'kiy: IPF AN SSSR*; 1985: 8–33. (In Russ.)
31. **Khakimzyanov G.S., Dutykh D., Fedotova Z.I.** Dispersive shallow water wave modelling. Part III: Model derivation on a globally spherical geometry. *Communications in Computational Physics*. 2018; 23(2):315–360.
32. **Chhay M., Dutykh D., Clamond D.** On the multi-symplectic structure of the Serre — Green — Naghdi equations. *Journal Phys. A: Math. Gen.* 2016; 49(3):03LT01.
33. **Fedotova Z.I., Khakimzyanov G.S.** On analysis of conditions for derivation of nonlinear dispersive equations. *Computational Technologies*. 2012; 17(5):94–108. (In Russ.)
34. **Khakimzyanov G., Dutykh D.** Long wave interaction with a partially immersed body. Part I: Mathematical models. *Communications in Computational Physics*. 2020; 27(2):321–378.
35. **Schäffer H.A., Madsen P.A.** Discussion of “A formal derivation and numerical modelling of the improved Boussinesq equations for varying depth”. *Ocean Engineering*. 1998; 25(6):497–500.
36. **Bercu G., Wu S.** Refinements of certain hyperbolic inequalities via the Padé approximation method. *Journal of Nonlinear Science and Applications*. 2016; (9):5011–5020.
37. **Fedotova Z.I., Khakimzyanov G.S.** Characteristics of finite-difference methods for dispersive shallow water equations. *Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling*. 2016; 31(3):149–158.
38. **Khakimzyanov G., Dutykh D., Gusev O., Shokina N.** Dispersive shallow water wave modelling. Part II: Numerical simulation on a globally flat space. *Communications in Computational Physics*. 2018; 23(1):30–92.
39. **Benjamin T.B., Bona J.L., Mahony J.J.** Model equations for long waves in nonlinear dispersive systems. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. A*. 1972; (272):47–78.
40. **Schäffer H.A., Madsen P.A.** Further enhancements of Boussinesq-type equations. *Coastal Engineering*. 1995; (26):1–14.