О НАХОЖДЕНИИ РЕШЕНИЙ ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

А. М. Блохин
Институт математики СО РАН, Новосибирск, Россия
e-mail: blokhin@math.nsc.ru

А. С. Бушманова
Новосибирский государственный университет, Россия

Е. В. Мищенко
Институт математики СО РАН, Новосибирск, Россия
e-mail: mish@math.nsc.ru

In the paper, solutions are sought to a boundary value problem for a nonlinear ordinary differential equation of the second order with a small parameter at the highest derivative. Three cases are considered: the right-hand side $\rho(s)$ of the equation belongs to the spaces $L_2[0,1]$, $C[0,1]$, $C^2[0,1]$.

Введение

При исследовании *гидродинамических моделей* переноса заряда в полупроводниках и, в частности, при изучении *устойчивости состояния равновесия* для этих моделей возникает проблема нахождения решений следующей *нелинейной краевой задачи*:

$$\begin{cases} \varepsilon^2\varphi'' = e^{\varphi} - \rho, \quad 0 < s < 1, \\ \varphi(0,\varepsilon) = \varphi(1,\varepsilon) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Здесь $\varphi = \varphi(s,\varepsilon)$ — искомая функция, имеющая физический смысл *потенциала электрического поля*, ε ($\varepsilon_0 \geq \varepsilon > 0$) — малый параметр, $\rho = \rho(s)$ — известная функция от s, имеющая физический смысл плотности легирования, обезразмеренной соответствующим образом (см. [1, 2]). Учитывая физическую направленность задачи (0.1), будем полагать, что функция $\rho(s)$ имеет следующий конкретный вид, взятый из [1, 2] (рис. 1, *a*). Здесь $\delta,\ \ell$ — положительные числа такие, что

$$0 < \ell < \frac{1}{2}, \quad 0 < \delta < 1.$$

© А. М. Блохин, А. С. Бушманова, Е. В. Мищенко, 1999.

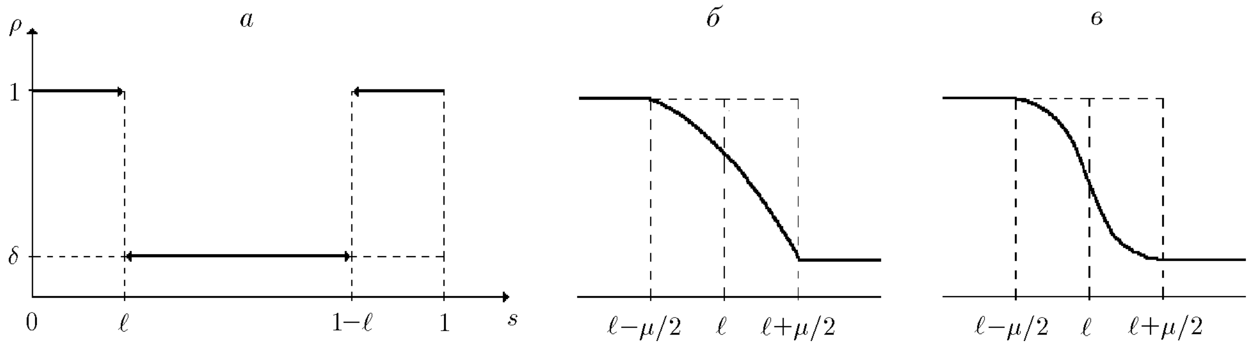

Рис. 1.

Поскольку функция $\rho(s)$ кусочно-непрерывна (ясно, что она принадлежит $L_2(0,1)$), то для такой функции решения задачи (0.1) в обычном *классическом смысле* не существует. Ниже мы по аналогии с уравнениями в частных призводных определим *обобщенное решение* задачи (0.1) в случае, когда $\rho(s) \in L_2(0,1)$.

С другой стороны, надо заметить, что при проведении численных расчетов конкретных задач физики полупроводников (см. работы [1–5], в которых численно решается известная задача о баллистическом диоде) часто применяют *сглаживание* функции $\rho(s)$ в окрестностях точек разрыва первого рода ($s = \ell$ и $s = 1-\ell$). Это может быть непрерывное (C-fitting) либо гладкое (C^m-fitting) или даже бесконечно гладкое (C^∞-fitting) сглаживание. Фрагменты сглаженных кривых $\rho = \rho(s)$ в окрестности точки разрыва первого рода $s = \ell$ изображены на рис. 1, *б* (C-fitting) и 1, *в* (C^m-fitting). Здесь $\mu > 0$ — некоторое, достаточно малое число. Поэтому рассмотрим также краевую задачу (0.1) при $\rho(s) \in W_2^1(0,1)$ и в случае, когда $\rho(s) \in C^m[0,1]$ (или даже $\rho(s) \in C^\infty[0,1]$, см. рис. 1, *б, в*).

Цель настоящей работы заключается в конструктивном построении решения $\varphi = \varphi(s,\varepsilon)$ *задачи (0.1) при малых* ε *и в выяснении вопроса о существовании предела*

$$\lim_{\varepsilon\to+0} \varphi(s,\varepsilon).$$

В разделе 1 рассмотрен случай $\rho(s) \in L_2(0,1)$, раздел 2 посвящен варианту непрерывного сглаживания, раздел 3 содержит результаты для гладкого сглаживания (так называемый случай C^2-fitting).

1. Обобщенное решение задачи (0.1)

Итак, вначале рассмотрим ситуацию, когда $\rho(s) \in L_2(0,1)$. Перепишем задачу (0.1) в виде

$$\begin{cases} A\varphi = \psi, \quad 0 < s < 1, \\ \varphi(0,\varepsilon) = \varphi(1,\varepsilon) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

где

$$A\varphi = -\varepsilon^2\varphi'' + e^\varphi - 1,$$
$$\psi = \psi(s) = \rho(s) - 1.$$

Пусть $\varphi \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(0,1)$ — решение (в смысле теории распределений) задачи (1.1) для $\psi \in L_2(0,1)$. Тогда для любой функции $\gamma \in C_0^\infty(0,1)$ имеем (см. [6]):

$$< A\varphi, \gamma > = < \psi, \gamma > .$$

Отсюда, по определению производных для распределений, получаем:

$$\varepsilon^2 < \varphi', \gamma' > + < e^{\varphi} - 1, \gamma > = < \psi, \gamma >, \quad \gamma \in C_0^\infty(0,1),$$

т. е.

$$\varepsilon^2 \int_0^1 \varphi'\gamma'\, ds + \int_0^1 (e^{\varphi} - 1)\gamma\, ds = \int_0^1 \psi\gamma\, ds. \tag{2}$$

Очевидно, что (1.2) остается в силе и для любой функции $\gamma \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(0,1)$. Следовательно, *обобщенным решением задачи* (1.1) *для заданной функции* $\psi \in L_2(0,1)$ *будем называть функцию* $\varphi \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(0,1)$, *удовлетворяющую равенству* (1.2) *для любой функции* $\gamma \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(0,1)$.

Замечание 1.1. *Легко видеть, что на самом деле обобщенное решение φ (если оно существует) обладает дополнительным свойством $\varphi'' \in L_2(0,1)$, т. е. $\varphi \in \overset{\circ}{W}{}_2^2(0,1)$.*

Найдем с помощью (1.2) *априорную оценку* для решения задачи (0.1). В самом деле, полагая в (1.2) $\gamma = \varphi$, последовательно получаем:

$$\varepsilon^2 ||\varphi'||^2_{L_2(0,1)} + \mathcal{A}(\varphi) = \int_0^1 \psi\varphi\, ds \leq \left| \int_0^1 \psi\varphi\, ds \right| \leq \frac{1}{4\varepsilon^2} ||\psi||^2_{L_2(0,1)} + \varepsilon^2 ||\varphi||^2_{L_2(0,1)},$$

или

$$\frac{\varepsilon^2}{2} ||\varphi||^2_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,1)} + \mathcal{A}(\varphi) \leq \frac{1}{4\varepsilon^2} ||\psi||^2_{L_2(0,1)}. \tag{3}$$

Здесь

$$||\varphi||^2_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,1)} = ||\varphi'||^2_{L_2(0,1)} = \int_0^1 (\varphi')^2\, ds,$$

$\mathcal{A}(\varphi) = \int_0^1 \varphi(e^{\varphi} - 1)\, ds$ — функционал, определенный на функциях φ из $\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,1)$. Кроме того, при выводе (1.3) мы использовали:

а) неравенство Коши—Шварца для функций из $L_2(0,1)$:

$$\left| \int_0^1 \psi\varphi\, ds \right| \leq ||\psi||_{L_2(0,1)} ||\varphi||_{L_2(0,1)},$$

б) неравенство Коши с $\hat{\varepsilon}$:

$$ab \leq \frac{1}{4\hat{\varepsilon}} a^2 + \hat{\varepsilon} b^2 \quad \text{для любых} \quad a,\ b,\ \hat{\varepsilon} > 0,$$

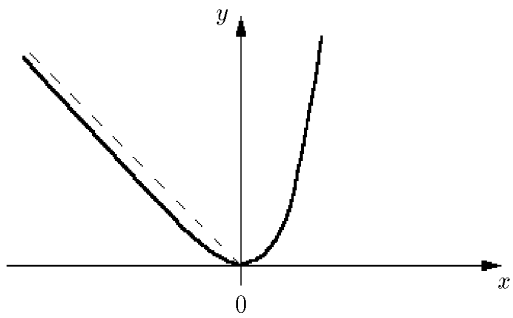

Рис. 2.

в) неравенство Пуанкаре (см. [6]) для любой функции $\varphi \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(0,1)$:

$$||\varphi||^2_{L_2(0,1)} \le \frac{1}{2}||\varphi'||^2_{L_2(0,1)} = \frac{1}{2}||\varphi||^2_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,1)}.$$

Заметим далее, что функционал $\mathcal{A}$ положительно определен на функциях из $\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,1)$, поскольку для любой функции $\varphi \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(0,1)$ подынтегральное выражение неотрицательно:

$$\varphi(e^\varphi - 1)\begin{cases} > 0 & \text{при} \quad |\varphi| > 0, \\ = 0 & \text{при} \quad \varphi = 0 \end{cases}$$

(см. график функции $y(x) = x(e^x - 1)$ на рис. 2).

Замечание 1.2. *При малых* $|x|:\ y(x) \sim x^2$.

Учитывая свойства функционала $\mathcal{A}(\varphi)$, из (1.3) получим искомую *априорную оценку*:

$$||\varphi||_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,1)} \le \frac{1}{\sqrt{2}\varepsilon^2}||\psi||_{L_2(0,1)}. \tag{4}$$

Легко также оценить φ''. В самом деле, поскольку

$$\varphi'' = \frac{1}{\varepsilon^2}[e^\varphi - 1 - \psi],$$

то

$$\begin{gathered}
||\varphi''||^2_{L_2(0,1)} = \frac{1}{\varepsilon^2}||e^\varphi - 1 - \psi||_{L_2(0,1)} \le \frac{1}{\varepsilon^2}||e^\varphi - 1||_{L_2(0,1)} + \frac{1}{\varepsilon^2}||\psi||_{L_2(0,1)} \le \\
\le \frac{1}{\varepsilon^2}||e^\varphi - 1||_{C[0,1]} + \frac{1}{\varepsilon^2}||\psi||_{L_2(0,1)} \le \frac{1}{\varepsilon^2}||\varphi||_{C[0,1]} \exp ||\varphi||_{C[0,1]} + \frac{1}{\varepsilon^2}||\psi||_{L_2(0,1)} \le \\
\le \frac{1}{\varepsilon^2}||\varphi||_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,1)} \exp\left\{||\varphi||_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,1)}\right\} + \frac{1}{\varepsilon^2}||\psi||_{L_2(0,1)} \le \\
\le \frac{1}{\sqrt{2}\varepsilon^4}||\psi||_{L_2(0,1)} \exp\left\{\frac{1}{\sqrt{2}\varepsilon^2}||\psi||_{L_2(0,1)}\right\} + \frac{1}{\varepsilon^2}||\psi||_{L_2(0,1)} = \\
= \frac{1}{\varepsilon^2}||\psi||_{L_2(0,1)}\left[1 + \frac{1}{\sqrt{2}\varepsilon^2}\exp\left\{\frac{1}{\sqrt{2}\varepsilon^2}||\psi||_{L_2(0,1)}\right\}\right]. \qquad (1.5)
\end{gathered}$$

При получении наравенства (1.5) мы использовали:

а) неравенство Минковского для функций из $L_2(0,1)$:

$$||\varphi+\gamma||_{L_2(0,1)} \le ||\varphi||_{L_2(0,1)} + ||\gamma||_{L_2(0,1)},$$

б) очевидное неравенство для любой функции $\varphi \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(0,1)$:

$$||\varphi||_{C[0,1]} = \max_{0\le s\le 1}|\varphi| \le ||\varphi'||_{L_2(0,1)} = ||\varphi||_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,1)},$$

в) неравенство вида

$$|e^x - 1| \le |x|e^{|x|}.$$

Используя оценку (1.4), можно показать *единственность обобщенного решения* (если оно существует). В самом деле, предположим обратное: одной и той же функции $\psi \in L_2(0,1)$ соответствуют два обобщенных решения $\varphi^I,\ \varphi^{II} \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(0,1)$ задачи (1.1). Тогда их разность

$$\Delta = \varphi^I - \varphi^{II}$$

удовлетворяет задаче

$$\begin{cases} -\varepsilon^2\Delta'' + e^{\varphi^{II}}(e^{\Delta}-1) = 0, \quad 0<s<1, \\ \Delta|_{s=0} = \Delta|_{s=1} = 0. \end{cases} \tag{1.6}$$

Повторяя дословно для задачи (1.6) вывод оценки (1.4) (легко видеть, что наличие множителя $e^{\varphi^{II}}$ не мешает проведению соответствующих выкладок), заключаем, что функция $\Delta \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(0,1)$ *почти всюду равна нулю.*

Перейдем теперь к построению обобщенного решения. Прежде всего заметим, что учитывая конкретный вид функции $\psi(s)$, равенство (1.2) можно переписать так:

$$\varepsilon^2\int_0^1 \varphi'\gamma'\,ds + \int_0^1 (e^{\varphi}-1)\gamma\,ds = (\delta-1)\int_{\ell}^{1-\ell}\gamma\,ds. \tag{1.2$'$}$$

Рассмотрим три случая:

1) функции $\gamma \in C_0^\infty(0,1)$ имеют носители, целиком расположенные на интервале $(0,\ell)$;
2) функции $\gamma \in C_0^\infty(0,1)$ имеют носители, целиком расположенные на интервале $(\ell, 1–\ell)$;
3) функции $\gamma \in C_0^\infty(0,1)$ имеют носители, целиком расположенные на интервале $(1–\ell, 1)$.

Следовательно, обобщенное решение $\varphi \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(0,1)$ на интервале $(0,\ell)$ удовлетворяет уравнению

$$A\varphi = 0, \quad 0<s<\ell,$$

на интервале $(\ell, 1-\ell)$ — уравнению

$$A\varphi = \delta - 1, \quad \ell < s < 1-\ell,$$

на интервале $(1-\ell, 1)$ — уравнению

$$A\varphi = 0, \quad 1-\ell < s < 1.$$

Таким образом, обобщенное решение можно строить с помощью гладких (классических) решений приведенных выше уравнений. Предлагается такой *алгоритм построения обобщенного решения.*

Задача (0.1) инвариантна относительно замены переменной $t = 1-s$, т. е. $\varphi(s,\varepsilon) = \varphi(1-s,\varepsilon)$. Следовательно, достаточно строить решение $\varphi(s,\varepsilon)$ только на отрезке $[0, 1/2]$, а затем отобразить его симметрично относительно $s = 1/2$.

Обобщенное решение задачи (0.1) ищется в виде

$$\varphi(s,\varepsilon) = \begin{cases} \varphi_I(s,\varepsilon), & 0 \le s \le l, \\ \varphi_{II}(s,\varepsilon), & l \le s \le 1-l, \\ \varphi_{III}(s,\varepsilon), & 1-l \le s \le 1, \end{cases}$$

где $\varphi_I(s,\varepsilon)$ — решение задачи

$$\begin{cases} \varepsilon^2 \varphi_I''(s,\varepsilon) = e^{\varphi_I(s,\varepsilon)} - \rho(s) = e^{\varphi_I(s,\varepsilon)} - 1, \\ \varphi_I(0,\varepsilon) = 0, \quad \varphi_I(l,\varepsilon) = B, \end{cases} \tag{1.7}$$

$\varphi_{II}(s,\varepsilon)$ — решение задачи

$$\begin{cases} \varepsilon^2 \varphi_{II}''(s,\varepsilon) = e^{\varphi_{II}(s,\varepsilon)} - \rho(s) = e^{\varphi_{II}(s,\varepsilon)} - \delta, \\ \varphi_{II}(l,\varepsilon) = B, \quad \varphi_{II}(1-l,\varepsilon) = B, \end{cases} \tag{1.8}$$

$\varphi_{III}(s,\varepsilon)$ — решение задачи

$$\begin{cases} \varepsilon^2 \varphi_{III}''(s,\varepsilon) = e^{\varphi_{III}(s,\varepsilon)} - \rho(s) = e^{\varphi_{III}(s,\varepsilon)} - 1, \\ \varphi_{III}(1-l,\varepsilon) = B, \quad \varphi_{III}(1,\varepsilon) = 0, \end{cases} \tag{1.9}$$

$$\ln \delta < B < 0.$$

Точное значение B будет определено ниже из условий непрерывности функции φ и ее первой производной.

Уравнения, входящие в задачи (1.7) – (1.9), относятся к сингулярно возмущенным уравнениям, так как при старшей производной они содержат множитель ε^2, который обращается в ноль, если $\varepsilon \to 0$. В связи с этим отметим, что в теории *сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений* большую роль играют свойства решения *предельного уравнения* (т. е. уравнения, которое получается из исходного формальным переходом к $\varepsilon = 0$). Для задач (1.7) – (1.9) предельное уравнение имеет вид

$$e^{\tilde{\varphi}_i(s)} = \rho(s), \quad i = I, II, III,$$

т. е. решения $\tilde{\varphi}_i(s)$ предельных уравнений даются формулами

$$\tilde{\varphi}_i(s) = f(s), \quad i = I, II, III,$$

где $f(s) = \ln \rho(s)$ на соответствующем отрезке. Заметим, что решение $\tilde{\varphi}_I$ предельного уравнения на отрезке $[0, l]$ автоматически удовлетворяет граничному условию в точке

$s = 0$ и не удовлетворяет граничному условию в точке $s = l$. В силу симметрии функция $\tilde{\varphi}_{III}$, определенная на отрезке $[1 - l, l]$, удовлетворяет граничному условию в точке $s = 1$ и не удовлетворяет граничному условию в точке $s = 1 - l$. И, наконец, функция $\tilde{\varphi}_{II}$, определенная на отрезке $[l, 1 - l]$, не удовлетворяет граничным условиям. Таким образом, пограничные слои на левой и правой границах отрезка $[0, 1]$ отсутствуют (см. по этому поводу [7]).

Решения φ_i, $i = I, II, III$, на соответствующем отрезке будем искать в виде сумм предельных ($\varepsilon = 0$) решений и функций типа пограничного слоя π_i, которые устранят возникшие невязки в граничных условиях:

$$\varphi_I(s, \varepsilon) = \ln\rho(s) + \pi_I\left(\frac{l - s}{\varepsilon}\right) = \pi_I\left(\frac{l - s}{\varepsilon}\right), \quad s \in [0, l],$$

$$\varphi_{II}(s, \varepsilon) = \ln\rho(s) + \pi_{II}\left(\frac{s - l}{\varepsilon}\right) = \ln\delta + \pi_{II}\left(\frac{s - l}{\varepsilon}\right), \quad s \in [l, 1/2],$$

$\varphi_{II}(s, \varepsilon)$, $s \in [1/2, l - 1]$, $\varphi_{III}(s, \varepsilon)$, $s \in [1 - l, 1]$ находятся из соображений симметрии. Очевидно, что $\pi_i \leq 0$, $i = I, II, III$.

Условие стремления $\varphi(s, \varepsilon)$ к предельному решению $\ln\rho(s)$ при $\varepsilon \to 0$ дает условие на поведение π_i, $i = I, II$, при $\tau \to \infty$, где τ — новая “медленная” переменная:

$$\begin{cases} \pi_I(\tau) \to 0, \\ (\pi_I(\tau))_\tau \to 0, \quad \tau \to +\infty, \\ \tau = \dfrac{l - s}{\varepsilon}, \end{cases} \tag{1.10}$$

$$\begin{cases} \pi_{II}(\tau) \to 0, \\ (\pi_{II}(\tau))_\tau \to 0, \quad \tau \to +\infty, \\ \tau = \dfrac{s - l}{\varepsilon}. \end{cases} \tag{1.11}$$

Для того, чтобы выполнить условие на левом конце ($s = 0$), переформулируем (1.10) в виде

$$\begin{cases} \pi_I(\tau) \to 0, \\ (\pi_I(\tau))_\tau \to 0, \quad \tau \to l/\varepsilon. \end{cases} \tag{1.10$'$}$$

При $\tau > l/\varepsilon$ функцию $\pi_I(\tau)$ продолжим нулем.

Требование непрерывности $\varphi'(s, \varepsilon)$ в точке $s = 1/2$ заставляет переформулировать и (1.11) в следующем виде:

$$\begin{cases} \pi_{II}(\tau) \to 0, \\ (\pi_{II}(\tau))_\tau \to 0, \quad \tau \to \dfrac{l - 1/2}{\varepsilon}. \end{cases} \tag{1.11$'$}$$

При $\tau > \dfrac{l - 1/2}{\varepsilon}$ функцию $\pi_{II}(\tau)$ продолжим нулем.

Суммируя вышеприведенные рассуждения, приходим к следующим задачам для определения функций $\pi_I(\tau)$, $\pi_{II}(\tau)$:

$$\begin{cases} (\pi_I(\tau))_{\tau\tau} = e^{\pi_I(\tau)} - 1, \\ \pi_I(\tau) \to 0, \quad (\pi_I(\tau))_\tau \to 0, \quad \tau \to l/\varepsilon, \\ \pi_I(0) = B, \end{cases} \tag{1.12}$$

$$\begin{cases} (\pi_{II}(\tau))_{\tau\tau} = e^{\pi_{II}(\tau)+\ln\delta} - \delta, \\ \pi_{II}(\tau) \to 0, \quad (\pi_{II}(\tau))_\tau \to 0, \quad \tau \to \dfrac{l-1/2}{\varepsilon}, \\ \pi_{II}(0) = B - \ln\delta. \end{cases} \tag{1.13}$$

Каждое из уравнений, входящих в (1.12), (1.13), имеет вид

$$y'' = c(e^y - 1),$$

причем $c = 1$ для $i = I$, $c = \delta$ для $i = II$. С учетом условий $(1.10'), (1.11')$ они сводятся к уравнению первого порядка

$$y'^2 = 2c(e^y - y - 1).$$

Для функции $\pi_I(\tau)$ имеем уравнение

$$(\pi_I(\tau))_\tau = \sqrt{2(e^{\pi_I(\tau)} - \pi_I(\tau) - 1)},$$

а для функции $\pi_{II}(\tau)$ получаем следующее уравнение:

$$(\pi_{II}(\tau))_\tau = -\sqrt{2\delta(e^{\pi_{II}(\tau)} - \pi_{II}(\tau) - 1)}.$$

Знак $+$ в первом уравнении выбран потому, что

$$\operatorname{sign}((\pi_I)_\tau) = -\operatorname{sign}((\pi_I)_s)$$

и $\pi_I(s) = \pi_I\left(\dfrac{l-s}{\varepsilon}\right)$ — убывающая по s функция. Знак $-$ во втором уравнении появляется потому, что

$$\operatorname{sign}((\pi_{II})_\tau) = \operatorname{sign}((\pi_{II})_s)$$

и $\pi_{II}(s) = \pi_{II}\left(\dfrac{s-l}{\varepsilon}\right)$ — убывающая по s функция.

Следовательно, от задач (1.12), (1.13) переходим к задачам Коши

$$\begin{cases} (\pi_I(\tau))_\tau = \sqrt{2(e^{\pi_I(\tau)} - \pi_I(\tau) - 1)}, \\ \pi_I(0) = B, \end{cases} \tag{1.14}$$

$$\begin{cases} (\pi_{II}(\tau))_\tau = -\sqrt{2\delta(e^{\pi_{II}(\tau)} - \pi_{II}(\tau) - 1)}, \\ \pi_{II}(0) = B - \ln\delta. \end{cases} \tag{1.15}$$

Теперь мы можем определить B. Как было замечено выше, необходимо выполнение условий

$$\begin{cases} \varphi_I(l,\varepsilon) = \varphi_{II}(l,\varepsilon) = B, \\ \varphi_I'(l,\varepsilon) = \varphi_{II}'(l,\varepsilon), \end{cases}$$

что эквивалентно таким соотношениям:

$$\begin{cases} \pi_I(0) = B, \quad \pi_{II}(0) = B - \ln\delta, \\ (\pi_I)_\tau|_{\tau=0} = (\pi_{II})_\tau|_{\tau=0} \end{cases}$$

или

$$2\left(e^B - B - 1\right) = 2\delta\left(e^{(B-\ln\delta)} - (B - \ln\delta) - 1\right).$$

Значит
$$B = -1 - \frac{\delta \ln \delta}{1-\delta}.$$

Итак, задачи для нахождения π_I, π_{II} определены полностью:
$$\begin{cases} (\pi_I(\tau))_\tau = \sqrt{2(e^{\pi_I(\tau)} - \pi_I(\tau) - 1)}, \\ \pi_I(0) = -1 - \dfrac{\delta \ln \delta}{1-\delta}, \end{cases} \tag{1.14'}$$

$$\begin{cases} (\pi_{II}(\tau))_\tau = -\sqrt{2\delta(e^{\pi_{II}(\tau)} - \pi_{II}(\tau) - 1)}, \\ \pi_{II}(0) = -1 - \dfrac{\ln \delta}{1-\delta}. \end{cases} \tag{1.15'}$$

Исследуем теперь уравнение
$$y' = \pm\sqrt{2c(e^y - y - 1)}, \quad c > 0. \tag{1.16}$$

Очевидно, что $y \equiv 0$ является решением уравнения (1.16). Выражение $\sqrt{2c(e^y - y - 1)}$ при $y < 0$ имеет смысл, дифференцируемо по y, а значит, задачи Коши (1.14'), (1.15') имеют решения.

2. Случай непрерывного сглаживания

Для дальнейшего исследования удобно ввести новую зависимую переменную $u(s,\varepsilon) = \varphi(s,\varepsilon) - f(s)$, где $f(s) = \ln \rho(s)$. Тогда задача (0.1) перепишется так:
$$\begin{cases} A_\rho u = \varepsilon^2 f'', \quad 0 < s < 1, \\ u(0,\varepsilon) = u(1,\varepsilon) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Здесь $A_\rho u = -\varepsilon^2 u'' + \rho(e^u - 1)$. Потенциал φ находится по формуле
$$\varphi(s,\varepsilon) = u(s,\varepsilon) + f(s). \tag{2}$$

Будем полагать далее, что $f \in \overset{\circ}{W}{}^1_2(0,1)$. Тогда $f'' \in \overset{\circ}{W}{}^{1\prime}_2(0,1)$, где $\overset{\circ}{W}{}^{1\prime}_2(0,1)$ — пространство, сопряженное к $\overset{\circ}{W}{}^1_2(0,1)$ (см. [6]). Пусть $u \in \overset{\circ}{W}{}^1_2(0,1)$ — решение (в смысле теории распределений) задачи (2.1). В таком случае для любой функции $\gamma \in C_0^\infty(0,1)$ имеем
$$< A_\rho u, \gamma > = \varepsilon^2 < f'', \gamma > .$$

Отсюда, по определению производных для распределений, имеем:
$$\varepsilon^2 < u', \gamma' > + < \rho(e^u - 1), \gamma > = -\varepsilon^2 < f', \gamma' >, \quad \gamma \in C_0^\infty(0,1),$$

т. е.
$$\varepsilon^2 \int_0^1 u'\gamma'\,ds + \int_0^1 \rho(e^u - 1)\gamma\,ds + \varepsilon^2 \int_0^1 f'\gamma'\,ds = 0. \tag{3}$$

Очевидно, что (2.3) остается в силе и для произвольной функции $\gamma \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(0,1)$. Следовательно, *обобщенным решением задачи* (2.1) *для заданной функции* $f \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(0,1)$ *будем называть функцию* $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(0,1)$, *удовлетворяющую равенству* (2.3) *для любой функции* $\gamma \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(0,1)$.

Как и в разделе 1, с помощью (2.3) легко получить *априорную оценку* обобщенного решения задачи (2.1) (если оно существует). Полагая в (2.3) $\gamma = u$, получаем:

$$\varepsilon^2 ||u'||^2_{L_2(0,1)} + \mathcal{A}_\rho(u) = -\varepsilon^2 \int\limits_0^1 u'f'\,ds \le \varepsilon^2 \left| \int\limits_0^1 u'f'\,ds \right| \le$$

$$\le \frac{\varepsilon^2}{2} ||u'||^2_{L_2(0,1)} + \frac{\varepsilon^2}{2} ||f'||^2_{L_2(0,1)}$$

или

$$\frac{\varepsilon^2}{2} ||u||^2_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,1)} + \mathcal{A}_\rho(u) \le \frac{\varepsilon^2}{2} ||f||^2_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,1)}. \tag{4}$$

Здесь $\mathcal{A}_\rho(u) = \int\limits_0^1 \rho(e^u - 1)u\,ds$ — функционал, определенный на функциях u из $\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,1)$. Учитывая, что $\mathcal{A}_\rho(u) \ge 0$ (см. раздел 1), получим из (2.4) искомую априорную оценку:

$$||u||_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,1)} \le ||f||_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,1)}. \tag{5}$$

Кроме этого, обобщенное решение u обладает *дополнительным свойством*, которое выражается в виде неравенства

$$\mathcal{A}_\rho(u) \le \frac{\varepsilon^2}{2} ||f||^2_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,1)}. \tag{6}$$

Понятно, что из (2.5) легко вывести *единственность* обобщенного решения (если оно существует).

Оценки (2.5), (2.6) позволяют ответить на вопрос, поставленный во введении, о существовании предела

$$\lim_{\varepsilon \to +0} u(s, \varepsilon)$$

(при условии, что мы можем находить решение $u(s, \varepsilon)$ для любого ε).

В самом деле, пусть последовательность $\{\varepsilon_k\}$, $k = 1, 2, \ldots$, такова, что $\varepsilon_k \to +0$ при $k \to \infty$. Тогда $\{u(s, \varepsilon_k)\}$ — ограниченная последовательность функций из $\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,1)$ в силу априорной оценки (2.5). По *теореме Реллиха* (см. [6]) существует подпоследовательность $\{u(s, \varepsilon_{k_p})\}$, $p = 1, 2, \ldots$, которая фундаментальна в $L_2(0,1)$. В силу оценки (2.6) и свойств подынтегрального выражения для функционала $\mathcal{A}_\rho(u)$ (см. раздел 1) эта подпоследовательность сходится *почти всюду к нулю*, т. е. к решению предельного уравнения

$$e^{\tilde{u}(s)} = 1.$$

В силу формулы (2.2) $\varphi(s,\varepsilon_{k_p}) \to\ f(s)$ *в среднем* при $p\to\infty$.

Легко видеть, что на самом деле $u(s,\varepsilon)\to 0$ при $\varepsilon\to +0$ *равномерно* на отрезке [0,1]. Действительно, поскольку

$$\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,1)\subset C[0,1],$$

то для любой функции $\gamma\in \overset{\circ}{W}{}_2^1(0,1)$ справедливо неравенство (см. раздел 1)

$$||\gamma||_{C[0,1]}\le ||\gamma||_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,1)}. \tag{7}$$

Тогда из (2.7) и (2.5) следует, что последовательность $\{u(s,\varepsilon_k)\}$ *равномерно ограничена.* Покажем, что эта последовательность *равностепенно непрерывна* в любой точке $s_0\in(0,1)$. Действительно, поскольку

$$u(s,\varepsilon_k)-u(s_0,\varepsilon_k)=\int\limits_{s_0}^{s} u'(\xi,\varepsilon_k)\,d\xi,$$

то

$$|u(s,\varepsilon_k)-u(s_0,\varepsilon_k)|\le |s-s_0|\cdot ||u(s,\varepsilon_k)||_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,1)}\le |s-s_0|\cdot||f||_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,1)}.$$

Следовательно, для любого $\tilde\varepsilon>0$ существует $\tilde\delta>0$ $\left(\tilde\delta=\dfrac{\tilde\varepsilon}{||f||_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,1)}}\right)$ такое, что если

$$|s-s_0|\le\tilde\delta,\qquad \text{то } |u(s,\varepsilon_k)-u(s_0,\varepsilon_k)|\le\tilde\varepsilon$$

одновременно для всех $k=1,2,3,\ldots$. Поэтому, в силу *теоремы Асколи — Арцела* некоторая подпоследовательность этой последовательности $\{u(s,\varepsilon_{k_p})\}$, $p=1,2,\ldots$, сходится равномерно. Легко видеть, что предельная функция равна нулю, ибо в противном случае мы приходим к противоречию с оценкой (2.6).

Перейдем теперь к вопросу о построении обобщенного решения из $\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,1)$ задачи (2.1). Прежде всего заметим, что учитывая конкретный вид функции $f(s)$ (см. рис. 1, *б*) равенство (2.3) можно переписать в виде

$$\varepsilon^2\int\limits_0^1 u'\gamma'\,ds+\int\limits_0^1\rho(e^u-1)\gamma\,ds+\varepsilon^2\int\limits_{\ell-\frac{\mu}{2}}^{\ell+\frac{\mu}{2}} f'\gamma'\,ds+\varepsilon^2\int\limits_{1-\ell-\frac{\mu}{2}}^{1-\ell+\frac{\mu}{2}} f'\gamma'\,ds=0. \tag{2.3$'$}$$

Рассуждая так же, как в разделе 1, приходим к выводу, что обобщенное решение $u(s,\varepsilon)\in \overset{\circ}{W}{}_2^1(0,1)$ на интервалах

$$\left(0,\ell-\frac{\mu}{2}\right),\ \left(\ell+\frac{\mu}{2},1-\ell-\frac{\mu}{2}\right),\ \left(1-\ell+\frac{\mu}{2},1\right)$$

удовлетворяет уравнению

$$A_\rho u=0,$$

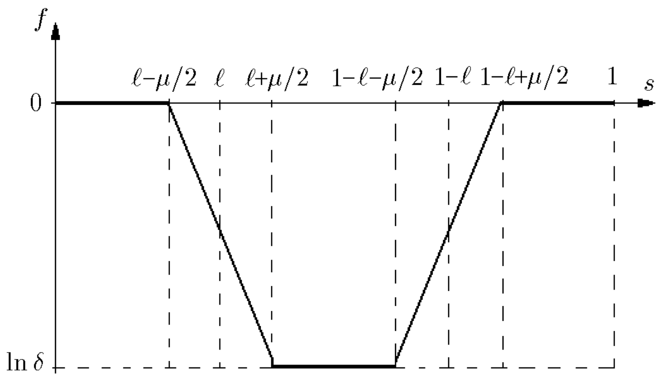

Рис. 3.

а на интервалах

$$\left(\ell-\frac{\mu}{2},\ell+\frac{\mu}{2}\right),\ \left(1-\ell-\frac{\mu}{2},1-\ell+\frac{\mu}{2}\right)$$

уравнению

$$A_\rho u=\varepsilon^2 f''.$$

Можно указать несколько случаев, когда обобщенное решение легко строится.

I) Пусть на интервалах

$$\left(\ell-\frac{\mu}{2},\ell+\frac{\mu}{2}\right),\ \left(1-\ell-\frac{\mu}{2},1-\ell+\frac{\mu}{2}\right)$$

$f'(s)\equiv\mathrm{const}$ (рис. 3). Тогда $f''(s)\equiv 0$ на этих интервалах. Следовательно, в качестве обобщенного решения из $\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,1)$ можно взять функцию $u(s,\varepsilon)\equiv 0$, первая производная от которой почти всюду равна нулю. По формуле (2.2) находим потенциал φ:

$$\varphi(s)=f(s)\quad \text{для любого } \varepsilon.$$

II) Если на интервалах

$$\left(\ell-\frac{\mu}{2},\ell+\frac{\mu}{2}\right),\ \left(1-\ell-\frac{\mu}{2},1-\ell+\frac{\mu}{2}\right)$$

вместо одного отрезка прямой линии мы имеем *ломаную линию*, составленную из отрезков прямых, то вновь в качестве обобщенного решения из $\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,1)$ можно взять $u(s,\varepsilon)\equiv 0$, первая производная от которой почти всюду равна нулю.

Далее будем полагать, что на интервалах

$$\left(\ell-\frac{\mu}{2},\ell+\frac{\mu}{2}\right),\ \left(1-\ell-\frac{\mu}{2},1-\ell+\frac{\mu}{2}\right)$$

функция $f(s)$ бесконечно дифференцируема. Предлагается такой алгоритм построения обобщенного решения:

1) на интервалах

$$\Big(0,\ell-\frac{\mu}{2}),\ (\ell+\frac{\mu}{2},1-\ell-\frac{\mu}{2}\Big),\ \Big(1-\ell+\frac{\mu}{2},1\Big)$$

полагаем $u(s,\varepsilon)\equiv 0$;

2) на интервалах

$$\Big(\ell-\frac{\mu}{2},\ell+\frac{\mu}{2}\Big),\ \Big(1-\ell-\frac{\mu}{2},1-\ell+\frac{\mu}{2}\Big)$$

находим гладкое решение следующих краевых задач:

$$\begin{cases} A_\rho u=\varepsilon^2 f'', \quad \ell-\dfrac{\mu}{2}<s<\ell+\dfrac{\mu}{2},\\ u\Big(\ell-\dfrac{\mu}{2},\varepsilon\Big)=u\Big(\ell+\dfrac{\mu}{2},\varepsilon\Big)=0,\end{cases} \tag{8}$$

$$\begin{cases} A_\rho u=\varepsilon^2 f'', \quad 1-\ell-\dfrac{\mu}{2}<s<1-\ell+\dfrac{\mu}{2},\\ u\Big(1-\ell-\dfrac{\mu}{2},\varepsilon\Big)=u\Big(1-\ell+\dfrac{\mu}{2},\varepsilon\Big)=0,\end{cases} \tag{9}$$

что можно сделать в соответствии с теоремой, доказанной в следующем разделе.

3. Случай C^2-fitting

Для изложения результатов этого раздела нам потребуется ввести обозначения для норм матрицы, вектора и функции. Сделаем это следующим образом. Для произвольных матриц $A(s)$, $B(t)$ с элементами $a_{ij}(s), b_{ij}(t)\in C[0,1]$, $i,j=1,2$, положим

$$|||A(s)|||^2=\lambda_{\max}(A^*(s)A(s))\le\sum_{i,j=1}^{2}|a_{ij}(s)|^2,$$

$$||A||=\max_{0\le s\le 1}|||A(s)|||, \quad ||AB||=\max_{0\le s,t\le 1}|||A(s)|||\cdot|||B(t)|||;$$

для произвольного вектора $v(s)=(v_1(s)v_2(s))^*$ с элементами $v_i(s)\in C[0,1]$, $i=1,2$

$$|||v(s)|||^2=\sum_{i=1}^{2}|v_i(s)|^2, \quad ||v||=\max_{0\le s\le 1}|||v(s)|||;$$

для произвольной функции $g(s)\in C[0,1]$

$$||g||=\max_{0\le s\le 1}|g(s)|.$$

Кроме того, верно соотношение

$$|||A^{-1}(s)|||=\left|\left|\left|\frac{A(s)}{|\mathrm{det}A(s)|}\right|\right|\right|,$$

которое можно легко получить, сравнив характеристические уравнения для определения собственных значений матриц $A^*(s)A(s)$ и $(A^{-1})^*(s)A^{-1}(s)$.

3.1. Формулировка основной теоремы. План доказательства теоремы

Случай C^2–fitting предполагает, что $\rho(s) \in C^2[0,1]$ (по крайней мере), причем мы сохраним свойство симметричности $\rho(s)$ относительно $s = \dfrac{1}{2}$: $\rho(s) = \rho(1-s)$. В этих предположениях верна следующая теорема.

Теорема. *Если $\rho(s) \in C^2[0,1]$, $\rho(s) = \rho(1-s)$, то можно указать такое $\varepsilon_0 > 0$, что для всех $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$ существует единственное решение краевой задачи (0.1) вида $\varphi(s,\varepsilon) = f(s) + O(\varepsilon)$.*

Доказательство. Мы будем придерживаться следующего плана доказательства.

1. От задачи (0.1) перейдем к краевой задаче для системы из двух уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} \varepsilon y'(s,\varepsilon) = A(s)y(s,\varepsilon) + F(s, y(s,\varepsilon), \varepsilon), \\ Py(0,\varepsilon) = 0, \\ Qy(1,\varepsilon) = 0, \end{cases} \tag{3.1}$$

где $y(s,\varepsilon)$ — искомый вектор, $A(s)$ — матрица 2×2 с переменными коэффициентами, $P = Q = (1\ 0)$, $F(s, y(s,\varepsilon), \varepsilon)$ — правая часть. Конкретные выражения для y, A, F будут приведены ниже.

2. Для задачи (3.1) найдем матрицу Грина $G(s,t,\varepsilon)$. По определению, это матрица порядка 2×2 со свойствами:

$$\text{а)} \quad \varepsilon G_s(s,t,\varepsilon) = A(s)G(s,t,\varepsilon)$$

(т. е. матрица $G(s,t,\varepsilon)$ удовлетворяет однородной системе $\varepsilon y' = Ay$ по переменной s);

$$\text{б)} \quad \begin{cases} PG(0,t,\varepsilon) = 0, \\ QG(1,t,\varepsilon) = 0 \end{cases}$$

(т. е. ($G(s,t,\varepsilon)$ удовлетворяет граничным условиям по s);

$$\text{в)} \quad G(s+0,s,\varepsilon) - G(s-0,s,\varepsilon) = I$$

(коэффициенты матрицы Грина $G(s,t,\varepsilon)$ терпят разрыв при переходе через прямую $s = t$).

После того как матрица Грина найдена, задача (3.1) переписывается с ее помощью в виде интегрального уравнения

$$y(s,\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^1 G(s,t,\varepsilon) F(t, y(t,\varepsilon), \varepsilon)\, dt. \tag{3.1$'$}$$

3. Докажем, что существует число $\varepsilon_0 > 0$ такое, что для всех $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$ отображение

$$y \to \frac{1}{\varepsilon} \int_0^1 G(s,t,\varepsilon) F(t, y(t,\varepsilon), \varepsilon)\, dt$$

является сжимающим. Понятно, что величина ε_0 определяется значениями, которые принимает функция $\rho(s)$. Из свойства сжимаемости следует, что решение интегрального уравнения (3.1$'$) и соответственно задачи (3.1) существует, единственно и может быть найдено с помощью метода последовательных приближений:

$$y_0(s,\varepsilon) = 0,$$

$$y_n(s,\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^1 G(s,t,\varepsilon)F(t,y_{n-1}(t,\varepsilon),\varepsilon)dt, \quad n = 1,2,\ldots.$$

4. Отдельно следует заметить, что для построения матрицы Грина $G(s,t,\varepsilon)$ надо знать фундаментальную матрицу решений $Y(s,\varepsilon)$ для однородной системы

$$\varepsilon y' = Ay.$$

В [8] указано, что для нахождения фундаментальной матрицы решений (ф.м.р.) удобно с помощью невырожденного преобразования

$$y(s,\varepsilon) = R(s,\varepsilon)\eta(s,\varepsilon)$$

перейти к системе вида

$$\varepsilon\eta'(s,\varepsilon) = [\Lambda(s,\varepsilon) + \varepsilon^2 C(s,\varepsilon)]\eta(s,\varepsilon). \tag{3.1''}$$

Здесь приняты следующие обозначения: $\eta(s,\varepsilon)$ — вектор-функция, $R(s,\varepsilon)$, $\Lambda(s,\varepsilon)$, $C(s,\varepsilon)$ — матрицы 2×2.

Преобразование $R(s,\varepsilon)$ выбираем так, чтобы Λ была представима в виде суммы двух диагональных матриц Λ_0, Λ_1:

$$\Lambda(s,\varepsilon) = \Lambda_0(s) + \varepsilon\Lambda_1(s),$$

а матрица $C(s,\varepsilon)$ являлась ограниченной по норме

$$||C|| < \infty.$$

При нахождении ф.м.р. $Y(s,\varepsilon)$ используем следующие факты. Для системы

$$\varepsilon\eta'(s,\varepsilon) = \Lambda(s,\varepsilon)\eta(s,\varepsilon)$$

найдем семейство ф.м.р., зависящих от параметра $t \in [0,1]$. Обозначим пока через $\hat{\mathcal{N}}(s,t,\varepsilon)$ ф.м.р., составляющие это семейство, и $\mathcal{N}(s,\varepsilon)$ — ф.м.р. для системы (3.1$''$) (в дальнейшем будем использовать другие обозначения). Докажем, что $\hat{\mathcal{N}}(s,t,\varepsilon)$ и $\mathcal{N}(s,\varepsilon)$ связаны интегральным уравнением

$$\mathcal{N}(s,\varepsilon) = \varepsilon\int\limits_a^s \hat{\mathcal{N}}(s,t,\varepsilon)C(t,\varepsilon)\mathcal{N}(t,\varepsilon)dt + \mathcal{N}(a,\varepsilon), \quad a \in [0,1]$$

при выполнении определенных условий на $\hat{\mathcal{N}}(s,t,\varepsilon)$ и $\mathcal{N}(a,\varepsilon)$. При более подробном изложении этого пункта мы приведем эти условия.

Далее, используя ограниченность $||C||$ и малость ε, доказываем, что интегральный оператор

$$\mathcal{N} \to \varepsilon\int\limits_a^s \hat{\mathcal{N}}(s,t,\varepsilon)C(t,\varepsilon)\mathcal{N}(t,\varepsilon)dt$$

сжимающий, что дает нам существование ф.м.р. $\mathcal{N}(s,\varepsilon)$. Вспоминая сделанную замену, находим $Y(s,\varepsilon)$.

Таков вкратце план доказательства. Переходим теперь к его подробному изложению.

3.2. Сведение задачи (0.1) к краевой задаче (3.1)

Введем следующие обозначения:

$$y^1(s,\varepsilon)=\varphi(s,\varepsilon)-f(s),$$
$$y^2(s)=\varepsilon\varphi'(s),$$

где $f(s)=\ln\rho(s)$, и перепишем задачу (0.1) в виде

$$\left\{\begin{array}{l}\varepsilon y'(s,\varepsilon)=A(s)y(s,\varepsilon)+F(s,y(s,\varepsilon),\varepsilon),\\ Py(0,\varepsilon)=0,\quad Qy(1,\varepsilon)=0.\end{array}\right. \tag{3.1}$$

Здесь

$$A(s)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ \rho(s) & 0\end{pmatrix},\quad P=(1\ 0),\quad Q=(1\ 0),$$

$$y(s,\varepsilon)=\begin{pmatrix}y^1(s,\varepsilon)\\ y^2(s,\varepsilon)\end{pmatrix},\quad F(s,y(s,\varepsilon),\varepsilon)=\begin{pmatrix}-\varepsilon f'(s)\\ -\rho(s)[y^1(s,\varepsilon)-e^{y^1(s,\varepsilon)}+1]\end{pmatrix}.$$

Рассмотрим соответствующую “однородную” задачу

$$\left\{\begin{array}{l}\varepsilon y'=Ay,\\ Py(0,\varepsilon)=0,\\ Qy(1,\varepsilon)=0.\end{array}\right. \tag{3.2}$$

В монографии [8] указано: если

1 — собственные значения $\lambda_1(s),\lambda_2(s)$ матрицы $A(s)$ таковы, что

а) $\mathrm{Re}\lambda_1(s)\le\mathrm{Re}\lambda_2(s)$,

б) $\lambda_1(s)\ne\lambda_2(s)$,

в) $\mathrm{Re}\lambda_1(s)\le 0,\lambda_1(s)\ne 0,\mathrm{Re}\lambda_2(s)>0$ (либо $\mathrm{Re}\lambda_1(s)>0,\lambda_2(s)\ne 0,\mathrm{Re}\lambda_2(s)\le 0$);

2 — существует матрица

$$B(s)=\begin{pmatrix}b_{11}(s) & b_{12}(s)\\ b_{21}(s) & b_{22}(s)\end{pmatrix},$$

со свойствами

$$)\quad B^{-1}(s)A(s)B(s)=\begin{pmatrix}\lambda_1(s) & 0\\ 0 & \lambda_2(s)\end{pmatrix},$$

$$)\quad b_{11}\ne 0,\quad b_{22}\ne 0,$$

то найдется такая матрица $R(s,\varepsilon)$, что с помощью замены

$$y(s,\varepsilon)=R(s,\varepsilon)\eta(s,\varepsilon) \tag{3.3}$$

получим вместо $\varepsilon y'=Ay$ квазидиагональную систему вида

$$\varepsilon\eta'(s,\varepsilon)=[\Lambda_0(s)+\varepsilon\Lambda_1(s)+\varepsilon^2C(s,\varepsilon)]\eta(s,\varepsilon), \tag{3.4}$$

где Λ_0,Λ_1 — диагональные матрицы.

В нашем случае $\lambda_1(s)=-\sqrt{\rho(s)}$, $\lambda_2(s)=\sqrt{\rho(s)}$,

$$B(s)=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -\sqrt{\rho(s)} & \sqrt{\rho(s)}\end{pmatrix},$$

т. е. условия 1, 2 выполнены.

Матрицу R будем искать в виде

$$R(s,\varepsilon) = B(s) + \varepsilon B_1(s),$$

где $B_1(s)$ — матрица, подлежащая определению. Делая в системе $\varepsilon y' = Ay$ замену (3.3), получаем

$$\varepsilon\eta' = [B + \varepsilon BB_1]^{-1}[AB + \varepsilon ABB_1 - \varepsilon B' - \varepsilon^2 (BB_1)']\eta.$$

Сравнивая это выражение с (3.4), делаем вывод, что должны выполняться тождества

$$AB = B\Lambda_0,$$

$$ABB_1 - B' = B\Lambda_1 + BB_1\Lambda_0,$$

$$-(BB_1)' = BC + BB_1\Lambda_1 + \varepsilon BB_1 C.$$

Первое, очевидно, будет выполнено при таком выборе Λ_0:

$$\Lambda_0 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

С учетом первого тождества второе можно переписать в виде

$$B\Lambda_0 B_1 - B' = B\Lambda_1 + BB_1\Lambda_0,$$

или

$$\Lambda_0 B_1 - B_1\Lambda_0 = B^{-1}B' + \Lambda_1.$$

Диагональные элементы матрицы $\Lambda_0 B_1 - B_1\Lambda_0$ равны нулю, следовательно,

$$\Lambda_1 = \begin{pmatrix} (-B^{-1}B')_{11} & 0 \\ 0 & (-B^{-1}B')_{22} \end{pmatrix}$$

и

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}(B^{-1}B')_{12} \\ \dfrac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}(B^{-1}B')_{21} & 0 \end{pmatrix}.$$

Наконец, из последнего тождества получаем выражения для определения матрицы C:

$$C = -[B + \varepsilon BB_1]^{-1}((BB_1)' + BB_1\Lambda).$$

Таким образом,

$$\Lambda_0(s) = \sqrt{\rho(s)} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Lambda_1(s) = \lambda(s) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$B_1(s) = b(s) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C(s,\varepsilon) = \frac{1}{1+\varepsilon^2 b^2(s)} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{1+\varepsilon^2 b^2(s)} \begin{pmatrix} -\lambda(s)b(s) + \varepsilon b(s)b'(s) & b'(s) - \varepsilon\lambda(s)b^2(s) \\ -b'(s) - \varepsilon\lambda(s)b^2(s) & \lambda(s)b(s) + \varepsilon b(s)b'(s) \end{pmatrix},$$

где

$$b(s) = \frac{f'(s)}{8\sqrt{\rho(s)}}, \quad \lambda(s) = -\frac{f'(s)}{4}.$$

В частности,

$$||C|| = \max_{0\le s\le 1} \sqrt{\lambda_{\max}(C^*(s,\varepsilon)C(s,\varepsilon))} =$$

$$= \max_{0\le s\le 1} \sqrt{\frac{(b'(s) \pm \lambda(s)b(s))^2}{(1+\varepsilon^2 b^2(s))^2}} \le \max_{0\le s\le 1} \sqrt{2(\lambda^2(s)b^2(s) + b'^2(s))} = c_1.$$

3.3. Построение ф.м.р. для системы $\varepsilon y' = Ay$

Рассмотрим вновь квазидиагональную систему (3.4). Через $\hat\lambda_i(s,\varepsilon)$ обозначим собственные значения матрицы $\Lambda(s,\varepsilon)$. Столбцы $\eta_i(s,\varepsilon), i = 1,2$, фундаментальной матрицы решений для (3.4) можно искать в виде

$$\eta_i(s,\varepsilon) = \alpha_i(s,\varepsilon)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^s \hat\lambda_i(\tau,\varepsilon)d\tau\right), \quad i = 1,2. \tag{3.5}$$

Тогда вектора $\alpha_i(s,\varepsilon)$, $i = 1,2$, находятся как решения дифференциальных уравнений:

$$\varepsilon\alpha_i'(s,\varepsilon) = [\Lambda(s,\varepsilon) - \hat\lambda_i(s,\varepsilon)I]\alpha_i(s,\varepsilon) + \varepsilon^2 C(s,\varepsilon)\alpha_i(s,\varepsilon), \quad i = 1,2. \tag{3.6}$$

В нашем случае $\hat\lambda_1 = -\sqrt{\rho} - \dfrac{\varepsilon\rho'}{4\rho}$, $\hat\lambda_2 = \sqrt{\rho} - \dfrac{\varepsilon\rho'}{4\rho}$.

От системы (3.6) перейдем к интегральному уравнению. Для начала заметим, что системам

$$\varepsilon\tilde\alpha_i' = [\Lambda - \hat\lambda_i I]\tilde\alpha_i, \quad i = 1,2$$

(в развернутом виде

$$\varepsilon\tilde\alpha_1' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2\sqrt{\rho} \end{pmatrix}\tilde\alpha_1, \quad \varepsilon\tilde\alpha_2' = \begin{pmatrix} -2\sqrt{\rho} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\tilde\alpha_2),$$

соответствуют фундаментальные матрицы решений

$$X_1(s,t,\varepsilon) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \exp\left(\dfrac{1}{\varepsilon}\displaystyle\int\limits_t^s 2\sqrt{\rho(\tau)}d\tau\right) \end{pmatrix},$$

$$X_2(s,t,\varepsilon) = \begin{pmatrix} \exp\left(-\dfrac{1}{\varepsilon}\displaystyle\int\limits_t^s 2\sqrt{\rho(\tau)}d\tau\right) - & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

причем $X_1(s,s,\varepsilon) = X_2(s,s,\varepsilon) = I$. Далее зададим значения компонент векторов $\alpha_i(s,\varepsilon)$, $i = 1,2$, в некоторой точке a. Ниже мы обсудим, как выбрать точку a и значения компонент векторов. Сейчас можно утверждать, что $\alpha_1(s,\varepsilon)$ (решение системы (3.6)) находится как решение интегрального уравнения

$$\alpha_1(s,\varepsilon)=\alpha_1(a,\varepsilon)+\varepsilon\int\limits_a^s X_1(s,t,\varepsilon)C(t,\varepsilon)\alpha_1(t,\varepsilon)dt. \tag{3.7}$$

Действительно,

$$\varepsilon\alpha_1'(s,\varepsilon)=\varepsilon^2X_1(s,s,\varepsilon)C(s,\varepsilon)\alpha_1(s,\varepsilon)+\varepsilon\int\limits_a^s(X_1)_s(s,t,\varepsilon)C(t,\varepsilon)\alpha_1(t,\varepsilon)dt=$$

$$=\varepsilon^2C(s,\varepsilon)\alpha_1(s,\varepsilon)+[\Lambda(s,\varepsilon)-\hat\lambda_1(s,\varepsilon)I](\alpha_1(s,\varepsilon)-\alpha_1(a,\varepsilon))=$$
$$=\varepsilon^2C(s,\varepsilon)\alpha_1(s,\varepsilon)+[\Lambda(s,\varepsilon)-\hat\lambda_1(s,\varepsilon)I]\alpha_1(s,\varepsilon)$$

при условии, что $[\Lambda(s)-\hat\lambda_1(s,\varepsilon)I])\alpha_1(a,\varepsilon)=0$. Для этого достаточно взять $\alpha_1(a,\varepsilon)=(\mathrm{const}\ 0)^*$.

Далее для существования решения (3.7) необходимо, чтобы отображение $\alpha\to\varepsilon\int\limits_a^s X_1(s,t,\varepsilon)C(t,\varepsilon)\alpha(t,\varepsilon)dt$ было сжимающим. Для этого, в частности, матрица $X_1(s,t,\varepsilon)$ должна быть ограничена сверху по норме. Рассмотрим интервал интегрирования $[a,s]$. Если $a\le s$, то $a\le t\le s$ и, следовательно, функция $\exp(\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_t^s 2\sqrt{\rho(\tau)})$ не ограничена. Если же наоборот $s\le a$, то $s\le t\le a$, и тогда $\int\limits_t^s 2\sqrt{\rho(\tau)}d\tau\le 0$, $||X_1||\le 1$. Следовательно, достаточно взять $a=1$ и $\alpha_1(1,\varepsilon)=(1\ 0)^*$.

Аналогично, рассматривая $\alpha_2(s,\varepsilon)$, получаем, что надо взять $a=0$ и $\alpha_2(0,\varepsilon)=(0\ 1)^*$.

Итак,

$$\alpha_1(s,\varepsilon)=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\varepsilon\int\limits_1^s X_1(s,t,\varepsilon)C(t,\varepsilon)\alpha_1(t,\varepsilon)dt=e_1+T_\varepsilon^1\alpha_1(s,\varepsilon),$$

$$\alpha_2(s,\varepsilon)=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+\varepsilon\int\limits_0^s X_2(s,t,\varepsilon)C(t,\varepsilon)\alpha_2(t,\varepsilon)dt=e_2+T_\varepsilon^2\alpha_2(s,\varepsilon). \tag{3.7$'$}$$

Как было отмечено выше, для существования решений (3.7′) необходимо, чтобы операторы T_ε^i, $i=1,2$, были сжимающими, т. е.

$$||T_\varepsilon^i\overline{\alpha}-T_\varepsilon^i\overline{\overline{\alpha}}||\le\xi||\overline{\alpha}-\overline{\overline{\alpha}}||\quad \text{для любых функций}\quad \overline{\alpha},\overline{\overline{\alpha}}\in C[0,1],$$

причем $0<\xi<1$. Очевидно,

$$||T_\varepsilon^1\overline{\alpha}-T_\varepsilon^1\overline{\overline{\alpha}}||=\varepsilon\left\|\int\limits_1^s X_1\cdot C\cdot(\overline{\alpha}-\overline{\overline{\alpha}})dt\right\|\le\varepsilon||C||\cdot||\overline{\alpha}-\overline{\overline{\alpha}}||.$$

Аналогично для T_ε^2

$$||T_\varepsilon^2\overline{\alpha}-T_\varepsilon^2\overline{\overline{\alpha}}||\le\varepsilon||C||\cdot||\overline{\alpha}-\overline{\overline{\alpha}}||.$$

Необходимое условие сжимаемости

$$\varepsilon||C||\le\varepsilon c_1<1. \tag{3.8}$$

3.4. Свойства матрицы $[\alpha_1, \alpha_2]$

Обозначим через $[\alpha_1, \alpha_2]$ матрицу, где α_i — i-й столбик матрицы. В данном разделе приведем свойства, которыми обладает эта матрица.

Напомним, что

$$\varepsilon\alpha_1' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2\sqrt{\rho} \end{pmatrix}\alpha_1 + \varepsilon^2 C\alpha_1, \quad \alpha_1(1,\varepsilon) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\varepsilon\alpha_2' = \begin{pmatrix} -2\sqrt{\rho} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\alpha_2 + \varepsilon^2 C\alpha_2, \quad \alpha_2(0,\varepsilon) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Обозначим

$$\alpha_2^{\perp}(s,\varepsilon) = \begin{pmatrix} \alpha_2^2 \\ \alpha_2^1 \end{pmatrix}(s,\varepsilon).$$

Тогда

$$\varepsilon(\alpha_2^{\perp})' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2\sqrt{\rho} \end{pmatrix}\alpha_2^{\perp} + \frac{\varepsilon^2}{1+\varepsilon^2 b^2}\begin{pmatrix} c_{22} & c_{21} \\ c_{12} & c_{11} \end{pmatrix}\alpha_2^{\perp}.$$

Свойство 1. *Для детерминанта матрицы* $[\alpha_1, \alpha_2]$ *справедлива формула*

$$\det[\alpha_1,\alpha_2](s,\varepsilon) = \alpha_1^1(0,\varepsilon)(1+\varepsilon^2 b^2(s)).$$

Доказательство. По определению, $\det[\alpha_1,\alpha_2](s,\varepsilon) = \alpha_1^1\alpha_2^2 - \alpha_1^2\alpha_2^1$. Продифференцируем это выражение по s (точка означает дифференцирование по s):

$$(\det[\alpha_1,\alpha_2])' = \dot\alpha_1^1\alpha_2^2 + \alpha_1^1\dot\alpha_2^2 - \dot\alpha_1^2\alpha_2^1 - \alpha_1^2\dot\alpha_2^1 = \left(\dot\alpha_1^1\alpha_2^2 - \alpha_2^1\dot\alpha_1^2\right) + \left(\dot\alpha_2^2\alpha_1^1 - \alpha_1^2\dot\alpha_2^1\right) =$$

$$= \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon^2 b^2}\left(c_{11}\alpha_1^1 + c_{12}\alpha_1^2\right)\alpha_2^2 - \left(\frac{2\sqrt{\rho}}{\varepsilon}\alpha_1^2 + \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon^2 b^2}\left(c_{21}\alpha_1^1 + c_{22}\alpha_1^2\right)\right)\alpha_2^1 +$$

$$+ \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon^2 b^2}\left(c_{21}\alpha_2^1 + c_{22}\alpha_2^2\right)\alpha_1^1 - \alpha_1^2\left(-\frac{2\sqrt{\rho}}{\varepsilon}\alpha_1^2 + \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon^2 b^2}\left(c_{11}\alpha_2^1 + c_{12}\alpha_2^2\right)\right) =$$

$$= \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon^2 b^2}\left(c_{11}\alpha_1^1\alpha_2^2 - c_{22}\alpha_1^2\alpha_2^1 + c_{22}\alpha_1^1\alpha_1^2 - c_{11}\alpha_1^2\alpha_2^1\right) = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon^2 b^2}(c_{11}+c_{22})\det[\alpha_1,\alpha_2].$$

Поскольку

$$c_{11} + c_{22} = (-\lambda b + \varepsilon b b' + \lambda b + \varepsilon b b') = 2\varepsilon b b',$$

то

$$(\det[\alpha_1,\alpha_2])' = \frac{2\varepsilon^2 b b'}{1+\varepsilon^2 b^2}\det[\alpha_1\alpha_2].$$

Следовательно,

$$\det[\alpha_1\alpha_2](s,\varepsilon) = \hat C(1+\varepsilon^2 b^2(s)).$$

Постоянную $\hat C$ находим из условия

$$\hat C = \det[\alpha_1\alpha_2](0,\varepsilon) = \det\begin{pmatrix} \alpha_1^1(0,\varepsilon) & 0 \\ \alpha_1^2(0,\varepsilon) & 1 \end{pmatrix} = \alpha_1^1(0,\varepsilon).$$

С другой стороны,

$$\hat C = \det[\alpha_1,\alpha_2](1,\varepsilon) = \det\begin{pmatrix} 1 & \alpha_2^1(1,\varepsilon) \\ 0 & \alpha_2^2(1,\varepsilon) \end{pmatrix} = \alpha_2^2(1,\varepsilon).$$

Значит, $\alpha_1^1(0,\varepsilon)=\alpha_2^2(1,\varepsilon)$.

Следующее утверждение устанавливает связь между α_1 и α_2.

Свойство 2.

$$\alpha_1^1(s,\varepsilon)=\alpha_2^2(1-s,\varepsilon),\quad \alpha_1^2(s,\varepsilon)=\alpha_2^1(1-s,\varepsilon).$$

Иными словами, $\alpha_1(s,\varepsilon)=\alpha_2^{\perp}(1-s,\varepsilon)$.

Доказательство. Коэффициенты $c_{ij}(s)$ матрицы $C(s)$ обладают свойствами:

$$b(s)=\frac{\rho'}{8\rho\sqrt{\rho}}(s)=-\frac{\rho'}{8\rho\sqrt{\rho}}(1-s)=-b(1-s),$$

$$\lambda(s)=-\frac{\rho'}{4\rho}(s)=\frac{\rho'}{4\rho}(1-s)=-\lambda(1-s),$$

$$b'(s)=\frac{\rho''}{8\rho^{3/2}}(s)-\frac{3(\rho')^2}{16\rho^{5/2}}(s)=\frac{\rho''}{8\rho^{3/2}}(1-s)-\frac{3(\rho')^2}{16\rho^{5/2}}(1-s)=b'(1-s),$$

$$-(\lambda b)(s)=-(\lambda b)(1-s),\quad \varepsilon(b'b)(s)=-\varepsilon(b'b)(1-s),$$

$$(-\lambda b+\varepsilon b'b)(s)=-(\lambda b+\varepsilon b'b)(1-s),\quad \text{т. е.}\quad c_{11}(s)=-c_{22}(1-s),$$

$$(b'-\varepsilon\lambda b^2)(s)=(b'+\varepsilon\lambda b^2)(1-s),\quad \text{т. е.}\quad c_{12}(s)=-c_{21}(1-s).$$

Поэтому

$$\varepsilon(\alpha_2^{\perp}(s,\varepsilon))'=\begin{pmatrix}0&0\\0&-2\sqrt{\rho}\end{pmatrix}\alpha_2^{\perp}(s,\varepsilon)+\frac{\varepsilon^2}{1+\varepsilon^2b^2}\begin{pmatrix}c_{22}&c_{21}\\c_{12}&c_{11}\end{pmatrix}\alpha_2^{\perp}(s,\varepsilon),$$

$$\alpha_2^{\perp}(0,\varepsilon)=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},$$

$$\varepsilon(\alpha_2^{\perp}(1-s,\varepsilon))'=\begin{pmatrix}0&0\\0&2\sqrt{\rho(s)}\end{pmatrix}\alpha_2^{\perp}(1-s,\varepsilon)+\varepsilon^2C(s)\alpha_2^{\perp}(1-s,\varepsilon).$$

Начальные данные и уравнения совпали, следовательно, совпадают и решения. Значит,

$$\alpha_1^1(s,\varepsilon)=\alpha_2^2(1-s,\varepsilon),\quad \alpha_1^2(s,\varepsilon)=\alpha_2^1(1-s,\varepsilon).$$

3.5. Построение матрицы Грина

Прежде всего введем обозначения:

$$e_0(\varepsilon,s)=\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^s\sqrt{\rho(\tau)}d\tau\right),\quad e_1(\varepsilon,s)=\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_s^1\sqrt{\rho(\tau)}d\tau\right),$$

$$e(\varepsilon)=\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^1\sqrt{\rho(\tau)}d\tau\right)=e_0(\varepsilon,s)e_1(\varepsilon,s),\quad v_i=\frac{1}{\varepsilon}T_\varepsilon^i\alpha_i,\quad i=1,2,$$

$$c(\varepsilon)=\alpha_1^1(0,\varepsilon)+\alpha_1^2(0,\varepsilon)=1+\varepsilon v_1^1(0,\varepsilon)+\varepsilon v_1^2(0,\varepsilon),\quad D(\varepsilon)=e^2(\varepsilon)c^2(\varepsilon)-1.$$

В силу свойства 2

$$c(\varepsilon)=\alpha_2^1(1,\varepsilon)+\alpha_2^2(1,\varepsilon)=1+\varepsilon v_2^1(1,\varepsilon)+\varepsilon v_2^2(1,\varepsilon).$$

Вспоминая замены (3.3), (3.5), можем утверждать, наконец, что мы построили ф.м.р. для системы $\varepsilon y' = Ay$:

$$\overline{Y}(s,\varepsilon) = [B + \varepsilon BB_1](s)[\alpha_1, \alpha_2](s,\varepsilon) \begin{pmatrix} e_0^{-1}(s,\varepsilon) & 0 \\ 0 & e_0(s,\varepsilon) \end{pmatrix} \frac{1}{\rho(s)^{1/4}}.$$

Замечание 3.1. Аналогично описанному выше, мы можем искать η_i, $i = 1, 2$, в виде

$$\eta_i(s,\varepsilon) = \alpha_i(s,\varepsilon)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_1^s \hat{\lambda}_i(\tau,\varepsilon)d\tau\right).$$

Тогда ф.м.р. для системы $\varepsilon y' = Ay$ имеет вид

$$\overline{\overline{Y}}(s,\varepsilon) = [B + \varepsilon BB_1](s)[\alpha_1, \alpha_2](s,\varepsilon) \begin{pmatrix} e_1(s,\varepsilon) & 0 \\ 0 & e_1^{-1}(s,\varepsilon) \end{pmatrix} \frac{1}{\rho(s)^{1/4}}.$$

Матрицы $\overline{Y}, \overline{\overline{Y}}$ связаны соотношением

$$\overline{Y} = \overline{\overline{Y}} \begin{pmatrix} e^{-1}(\varepsilon) & 0 \\ 0 & e(s) \end{pmatrix}.$$

Из общей теории обыкновенных дифференциальных уравнений известно, что матрица Грина для краевой задачи

$$\begin{cases} y' = Ay, \\ Py(0) = 0, \\ Qy(1) = 0 \end{cases}$$

строится так:

$$G(s,t) = \begin{cases} Y(s)Z(t) \quad \text{при} \quad s \le t, \\ Y(s)Z(t) + Y(s)Y^{-1}(t) \quad \text{при} \quad t \le s, \end{cases}$$

где $Y(s)$ — любая ф.м.р. для системы $y' = Ay$, а $Z(t)$ находится как решение алгебраической системы

$$\begin{bmatrix} PY(0) \\ QY(1) \end{bmatrix} Z(t) = -\begin{pmatrix} 0 \\ QY(1) \end{pmatrix} Y^{-1}(t).$$

Таким образом, матрица Грина существует, если матрица

$$\begin{bmatrix} PY(0) \\ QY(1) \end{bmatrix}$$

невырождена, при этом сама матрица Грина не зависит от выбора ф.м.р.

Возвращаясь к нашему случаю, замечаем, что в систему входит параметр ε; это означает, что матрица Грина G и вспомогательная матрица Z будут зависеть от ε. Выберем в качестве ф.м.р. $\overline{Y}(s,\varepsilon)$. Тогда

$$\begin{bmatrix} P\overline{Y}(0,\varepsilon) \\ Q\overline{Y}(1,\varepsilon) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c(\varepsilon) & 1 \\ e^{-1}(\varepsilon) & e(\varepsilon)c(\varepsilon) \end{bmatrix}.$$

Следовательно,

$$\det \begin{bmatrix} P\overline{Y}(0,\varepsilon) \\ Q\overline{Y}(1,\varepsilon) \end{bmatrix} = c^2(\varepsilon)e(\varepsilon) - e^{-1}(\varepsilon).$$

Очевидно, необходимым условием существования $G(s,t,\varepsilon)$ является неравенство нулю функции $D(\varepsilon)$:

$$D(\varepsilon) = c^2(\varepsilon)e^2(\varepsilon) - 1 \neq 0. \tag{3.9}$$

Вычисляя $Z(t,\varepsilon)$, находим $G(s,t,\varepsilon)$:

$$G(s,t,\varepsilon) = \begin{cases} \dfrac{\rho(t)^{1/4}}{\rho(s)^{1/4}}\gamma(s,\varepsilon)\mathcal{M}\gamma^{-1}(t,\varepsilon)\dfrac{e_0(s,\varepsilon)}{e_0(t,\varepsilon)}, & s \le t, \\ \\ \dfrac{\rho(t)^{1/4}}{\rho(s)^{1/4}}\gamma(s,\varepsilon)\hat{\mathcal{M}}\gamma^{-1}(t,\varepsilon)\dfrac{e_0(t,\varepsilon)}{e_0(s,\varepsilon)}, & t \le s, \end{cases} \tag{3.10}$$

где

$$\gamma(s,\varepsilon) = [B(s) + \varepsilon B(s)B_1(s)][\alpha_1,\alpha_2](s,\varepsilon), \quad M = \begin{bmatrix} e^2(\varepsilon)c(\varepsilon) & -1 \\ -1 & c(\varepsilon) \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{M} = M\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}M^{-1} = \begin{pmatrix} e^2(\varepsilon)c(\varepsilon) & -1 \\ -1 & c(\varepsilon) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c(\varepsilon) & 1 \\ 1 & e^2(\varepsilon)c(\varepsilon) \end{pmatrix}\frac{1}{D(\varepsilon)} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & e^2(\varepsilon)c(\varepsilon) \\ -c(\varepsilon) & -e^2(\varepsilon)c^2(\varepsilon) \end{pmatrix}\frac{1}{D(\varepsilon)},$$

$$\hat{\mathcal{M}} = M\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}M^{-1} = \begin{pmatrix} e^2(\varepsilon)c(\varepsilon) & -1 \\ -1 & c(\varepsilon) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c(\varepsilon) & 1 \\ 1 & e^2(\varepsilon)c(\varepsilon) \end{pmatrix}\frac{1}{D(\varepsilon)} =$$

$$= \begin{pmatrix} e^2(\varepsilon)c^2(\varepsilon) & e^2(\varepsilon)c(\varepsilon) \\ -c(\varepsilon) & -1 \end{pmatrix}\frac{1}{D(\varepsilon)}.$$

Выясним, для каких ε имеем $D(\varepsilon) \neq 0$. Нам нужно, чтобы $c^2(\varepsilon) \neq \dfrac{1}{e^2(\varepsilon)}$ или $c(\varepsilon) \neq \pm\dfrac{1}{e(\varepsilon)}$. Поскольку точные значения для $\alpha_1^1(0,\varepsilon)$, $\alpha_1^2(0,\varepsilon)$ неизвестны, можно лишь указать область возможных значений $c(\varepsilon)$. Оценку значений $c(\varepsilon)$ проведем следующим образом. По определению v_i, имеем

$$||v_i|| = \frac{1}{\varepsilon}||T_\varepsilon^i\alpha_i|| \le ||C|| \cdot ||\alpha_i|| \le c_1||e_i + \varepsilon v_i|| \le c_1(1 + \varepsilon||v_i||), \quad i = 1, 2.$$

Отсюда получаем

$$||v_i|| \le \frac{c_1}{1 - c_1\varepsilon}, i = 1, 2.$$

Далее, поскольку

$$-||v_i|| \le v_i^j \le ||v_i||, \quad i = 1, 2, j = 1, 2,$$

то

$$1 - 2\varepsilon||v_1|| \le c(\varepsilon) = 1 + \varepsilon(v_1^1(0,\varepsilon) + v_1^2(0,\varepsilon)) \le 1 + 2\varepsilon||v_1||.$$

Окончательная оценка для $c(\varepsilon)$ выглядит следующим образом:

$$\frac{1 - 3\varepsilon c_1}{1 - \varepsilon c_1} \le c(\varepsilon) \le \frac{1 + \varepsilon c_1}{1 - \varepsilon c_1}.$$

Очевидно $c(0) = 1$. При малых ε значения $c(\varepsilon)$ близки к единице. В то же время при $\varepsilon \to 0$ функция $e^{-1}(\varepsilon)$ стремится к нулю, причем гораздо быстрее, чем $c(\varepsilon)$ стремится

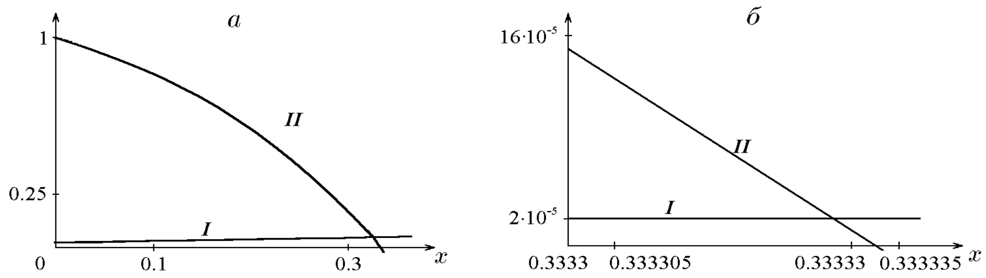

Рис. 4.

к 1. Таким образом, мы можем выбрать некоторое число $d < 1/3$ (рис. 4) такое, что для любого $0 < \varepsilon \le \varepsilon_1 = \frac{d}{1}$ выполнено условие (3.9). На рисунке кривая I — график функции $\exp\left(-c_1 \int\limits_0^1 \sqrt{\rho(\tau)}d\tau/x\right)$, кривая II — график функции $\frac{1-3x}{1-x}$.

Помимо этого заметим, что для любого $0 < \varepsilon \le \varepsilon_1$ верно $\varepsilon c_1 \le d < 1$, т. е. выполнено условие сжимаемости (3.8).

И наконец, поскольку функция $\frac{1-3x}{1-x}$ — убывающая по x на отрезке $[0, 1/3]$, то

$$\min_{0\le\varepsilon\le\varepsilon_1} \frac{1-3\varepsilon c_1}{1-\varepsilon c_1} = \frac{1-3\varepsilon_1 c_1}{1-\varepsilon_1 c_1} = \frac{1-3d}{1-d}.$$

Тогда мы имеем равномерную оценку

$$\frac{1}{c(\varepsilon)} \le \frac{1-d}{1-3d} \quad \text{для всех} \quad \varepsilon \in [0, \varepsilon_1], \tag{3.11}$$

которая понадобится нам в дальнейшем.

3.6. Некоторые дополнительные оценки

В этом разделе получим оценку нормы $\left\| \int\limits_0^1 \frac{G(s,t,\varepsilon)}{\varepsilon} dt \right\|$, которая затем будет использована для доказательства сжимаемости оператора

$$y \to \int\limits_0^1 \frac{G(s,t,\varepsilon)}{\varepsilon} F(t, y(t,\varepsilon), \varepsilon)dt$$

(см. раздел 3.3).

Разобьем процесс получения нужной нам оценки на несколько шагов.

1. Выражение (3.10) перепишем следующим образом:

$$G(s,t,\varepsilon) = \begin{cases} \dfrac{1}{(\rho(s)\rho(t))^{1/4}} \gamma(s,\varepsilon)\mathcal{M}\gamma^{-1}(t,\varepsilon)\rho(t)^{1/2} \dfrac{e_0(s,\varepsilon)}{e_0(t,\varepsilon)}, & s \le t, \\[2ex] \dfrac{1}{(\rho(s)\rho(t))^{1/4}} \gamma(s,\varepsilon)\hat{\mathcal{M}}\gamma^{-1}(t,\varepsilon)\rho(t)^{1/2} \dfrac{e_0(t,\varepsilon)}{e_0(s,\varepsilon)}, & t \le s. \end{cases} \tag{3.10$'$}$$

Последовательно оценим нормы матриц, входящих в $(3.10')$.

2. Получим оценки для норм матриц $\mathcal{M}, \hat{\mathcal{M}}$. Заметим, что

$$\mathcal{M}^*\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 1+c^2 & e^2(\varepsilon)c(\varepsilon)(1+c^2(\varepsilon)) \\ e^2(\varepsilon)c(\varepsilon)(1+c^2(\varepsilon)) & e^4(\varepsilon)c(\varepsilon)2(1+c^2(\varepsilon)) \end{pmatrix} \frac{1}{D(\varepsilon)^2}.$$

Поскольку

$$\lambda_1(\mathcal{M}^*\mathcal{M}) = 0, \quad \lambda_2(\mathcal{M}^*\mathcal{M}) = \frac{(1+c^2(\varepsilon))(1+e^4(\varepsilon)c^2(\varepsilon))}{(e^2(\varepsilon)c^2(\varepsilon)-1)^2},$$

то

$$||\mathcal{M}||^2 = \lambda_{\max}(\mathcal{M}^*\mathcal{M}).$$

Аналогично для $\hat{\mathcal{M}}$ получаем

$$\lambda_1(\hat{\mathcal{M}}^*\hat{\mathcal{M}}) = 0, \quad \lambda_2(\hat{\mathcal{M}}^*\hat{\mathcal{M}}) = \frac{(1+c^2(\varepsilon))(1+e^4(\varepsilon)c^2(\varepsilon))}{(e^2(\varepsilon)c^2(\varepsilon)-1)^2}.$$

Поэтому

$$||\hat{\mathcal{M}}||^2 = \lambda_{\max}(\hat{\mathcal{M}}^*\hat{\mathcal{M}}) = ||\mathcal{M}||^2.$$

3. Оценим норму матрицы $B+\varepsilon BB_1$. Очевидно, что

$$||B+\varepsilon BB_1||^2 \le ||B||^2||I+\varepsilon B_1||^2,$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\sqrt{\rho} & \sqrt{\rho} \end{pmatrix}, \quad B^*B = \begin{pmatrix} 1+\rho & 1-\rho \\ 1-\rho & 1+\rho \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\lambda_1(B^*B) = 2, \quad \lambda_2(B^*B) = 2\rho, \quad \text{и} \quad ||B||^2 = 2.$$

4. Найдем $||I+\varepsilon B_1||^2$. Так как

$$I+\varepsilon B_1 = \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon b(s) \\ -\varepsilon b(s) & 1 \end{pmatrix},$$

то

$$(I+\varepsilon B_1)^*(I+\varepsilon B_1) = \begin{pmatrix} 1+\varepsilon^2b^2(s) & 0 \\ 0 & 1+\varepsilon^2b^2(s) \end{pmatrix}$$

и, следовательно,

$$\lambda_{1,2} = 1+\varepsilon^2b^2(s), \quad ||I+\varepsilon B_1||^2 = 1+\varepsilon^2b^2(\theta),$$

где θ — точка максимума функции $b(s)$.

5. Оценим $||[\alpha_1,\alpha_2]||^2$:

$$||[\alpha_1,\alpha_2]||^2 \le ||\alpha_1||^2 + ||\alpha_2||^2 \le \frac{2}{1-\varepsilon c_1}.$$

6. Используя свойство 1, находим определитель матрицы $\gamma(t,\varepsilon)$:

$$\det\gamma(t,\varepsilon) = \det B(t)\ \det[I+\varepsilon B_1(t,\varepsilon)]\ \det[\alpha_1\alpha_2](t,\varepsilon) = 2\sqrt{\rho(t)}\alpha_1^1(0,\varepsilon)(1+\varepsilon^2b^2(t))^2.$$

С помощью рассуждений, аналогичных использованным в разделе 3.4 при оценке $c(\varepsilon)$, получаем:

$$\frac{1-2\varepsilon c_1}{1-\varepsilon c_1} \le \alpha_1^1(0) \le \frac{1}{1-\varepsilon c_1}.$$

Следовательно,

$$\det\gamma(t,\varepsilon) \ge 2\sqrt{\delta}\frac{1-2\varepsilon c_1}{1-\varepsilon c_1}(1+\varepsilon^2 b^2(t))^2.$$

7. Далее, в силу оценок, полученных выше в 2, 3, 4, 5, при $s \le t$ имеем

$$\left\|\frac{\gamma(s,\varepsilon)\mathcal{M}\gamma^{-1}(t,\varepsilon)}{(\rho(s)\rho(t))^{1/4}}\right\| \le \frac{1}{\sqrt{\delta}}||\mathcal{M}||\cdot|||\gamma(s,\varepsilon)|||\cdot\left|\left|\left|\frac{\gamma(t,\varepsilon)}{|\det\gamma(t,\varepsilon)|}\right|\right|\right|,$$

поэтому

$$\left\|\frac{\gamma(s,\varepsilon)\mathcal{M}\gamma^{-1}(t,\varepsilon)}{(\rho(s)\rho(t))^{1/4}}\right\| \le \frac{2(1+\varepsilon^2 b^2(\theta))}{\delta(1-2\varepsilon c_1)}\sqrt{\frac{(1+c^2(\varepsilon))(1+c^2(\varepsilon)e^4(\varepsilon))}{(e^2(\varepsilon)c^2(\varepsilon)-1)}}.$$

8. В силу оценки, полученной в 2, при переходе через прямую $s=t$ будем иметь то же самое неравенство:

$$\left\|\frac{\gamma(s,\varepsilon)\hat{\mathcal{M}}\gamma^{-1}(t,\varepsilon)}{(\rho(s)\rho(t))^{1/4}}\right\| \le \frac{2(1+\varepsilon^2 b^2(\theta))}{\delta(1-2\varepsilon c_1)}\sqrt{\frac{(1+c^2(\varepsilon))(1+c^2(\varepsilon)e^4(\varepsilon))}{(e^2(\varepsilon)c^2(\varepsilon)-1)}}.$$

9. Введем в рассмотрение следующую функцию:

$$g(\varepsilon) = \frac{2(1+\varepsilon^2 b^2(\theta))}{\delta(1-2\varepsilon c_1)}\sqrt{\frac{(1+c^2(\varepsilon))(1+e^4(\varepsilon)c^2(\varepsilon))}{(e^2(\varepsilon)c^2(\varepsilon)-1)^2}}.$$

Тогда

$$\left|\left|\left|\int\limits_0^1 \frac{G(s,t,\varepsilon)}{\varepsilon}dt\right|\right|\right| \le g(\varepsilon)\int\limits_0^1 \left\{\begin{array}{ll} \dfrac{\sqrt{\rho(t)}}{\varepsilon}\dfrac{e_0(s,\varepsilon)}{e_0(t,\varepsilon)}, & s\le t, \\ \dfrac{\sqrt{\rho(t)}}{\varepsilon}\dfrac{e_0(t,\varepsilon)}{e_0(s,\varepsilon)}, & t \le s \end{array}\right\} dt.$$

Вычислим интеграл, входящий в это неравенство справа:

$$\int\limits_0^1 \left\{\begin{array}{ll} \dfrac{\sqrt{\rho(t)}}{\varepsilon}\dfrac{e_0(s,\varepsilon)}{e_0(t,\varepsilon)}, & s\le t, \\ \dfrac{\sqrt{\rho(t)}}{\varepsilon}\dfrac{e_0(t,\varepsilon)}{e_0(s,\varepsilon)}, & t \le s \end{array}\right\} dt = \int\limits_s^1 \frac{\sqrt{\rho(t)}}{\varepsilon}\frac{e_0(s,\varepsilon)}{e_0(t,\varepsilon)}dt + \int\limits_0^s \frac{\sqrt{\rho(t)}}{\varepsilon}\frac{e_0(t,\varepsilon)}{e_0(s,\varepsilon)}dt =$$

$$= e_0(s,\varepsilon)\int\limits_s^1 \frac{\sqrt{\rho(t)}}{\varepsilon}e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t\sqrt{\rho(\tau)}d\tau}dt + \frac{1}{e_0(s,\varepsilon)}\int\limits_0^s \frac{\sqrt{\rho(t)}}{\varepsilon}e^{\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t\sqrt{\rho(\tau)}d\tau}dt =$$

$$= e_0(s,\varepsilon)\int\limits_s^1 \sigma'(t,\varepsilon)e^{-\sigma(t,\varepsilon)}dt + \frac{1}{e_0(s,\varepsilon)}\int\limits_0^s \sigma'(t,\varepsilon)e^{\sigma(t,\varepsilon)}dt =$$

$$= e_0(s,\varepsilon)\int\limits_{\sigma(s,\varepsilon)}^{\sigma(1,\varepsilon)} e^{-v}dv + \frac{1}{e_0(s,\varepsilon)}\int\limits_{\sigma(0,\varepsilon)}^{\sigma(s,\varepsilon)} e^{v}dv =$$

$$= e_0(s,\varepsilon)\left(-e^{-\sigma(1,\varepsilon)} + e^{-\sigma(s,\varepsilon)}\right) + \frac{1}{e_0(s,\varepsilon)}(e^{\sigma(s,\varepsilon)} - e^{\sigma(0,\varepsilon)}) =$$

$$= 2 - \frac{e_0(s,\varepsilon)}{e(\varepsilon)} - \frac{1}{e_0(s,\varepsilon)} = 2 - \frac{e_0(s,\varepsilon)+e_1(s,\varepsilon)}{e(\varepsilon)},$$

где

$$\sigma(s,\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^s \sqrt{\rho(\tau)}d\tau, \quad \sigma(0,\varepsilon)=0, \quad e^{\sigma(0,\varepsilon)}=1, \quad e^{\sigma(1,\varepsilon}=e(\varepsilon), \quad e^{\sigma(s,\varepsilon)}=e_0(s,\varepsilon).$$

10. Далее нам понадобятся равномерные по s и ε оценки. Поэтому найдем

$$\max_{0\le s\le 1}\left(2 - \frac{e_0(s,\varepsilon)+e_1(s,\varepsilon)}{e(\varepsilon)}\right) = 2 - \min_{0\le s\le 1}\frac{(e_0(s,\varepsilon)+e_1(s,\varepsilon))}{e(\varepsilon)}.$$

Поскольку

$$(e_0(s,\varepsilon)+e_1(s,\varepsilon))' = \frac{\sqrt{\rho(s)}}{\varepsilon}(e_0(s,\varepsilon)-e_1(s,\varepsilon)) = 0 \quad \text{при} \quad s=\frac{1}{2}$$

и

$$\begin{cases} e_0(s,\varepsilon) < e_1(s,\varepsilon) \quad \text{при} \quad s<\dfrac{1}{2}, \\ e_0(s,\varepsilon) > e_1(s,\varepsilon) \quad \text{при} \quad s>\dfrac{1}{2}, \end{cases}$$

то $s=\dfrac{1}{2}$ — точка минимума. Следовательно,

$$2 - \min_{0\le s\le 1}\frac{e_0(s)+e_1(s)}{e(\varepsilon)} = 2\left(1 - \frac{1}{e(\varepsilon/2)}\right) < 2 \quad \text{для любого} \quad \varepsilon.$$

Преобразовав агрегат $\sqrt{\dfrac{(1+c^2(\varepsilon))(1+e^4(\varepsilon)c^2(\varepsilon))}{(e^2(\varepsilon)c^2(\varepsilon)-1)^2}}$ и применив (3.11), получим следующую равномерную по ε оценку:

$$\sqrt{\frac{(1+c^2(\varepsilon))(e^4(\varepsilon)+c^2(\varepsilon))}{(e^2(\varepsilon)c^2(\varepsilon)-1)^2}} = \sqrt{\frac{(1+c^2(\varepsilon))(e^{-4}(\varepsilon)+c^2(\varepsilon))}{(e^{-2}(\varepsilon)-c^2(\varepsilon))^2}} \le \sqrt{\frac{(1+c^2(\varepsilon))(\omega+c^2(\varepsilon))}{c^4(\varepsilon)}} =$$

$$= \sqrt{\left(1+\frac{1}{c^2(\varepsilon)}\right)\left(1+\frac{\omega}{c^2(\varepsilon)}\right)} \le \sqrt{\left(1+\left(\frac{1-d}{1-3d}\right)^2\right)\left(1+\omega\left(\frac{1-d}{1-3d}\right)^2\right)} \text{ для любого } 0<\varepsilon\le\varepsilon_1,$$

где

$$\omega = e^{-4}(\varepsilon_1).$$

Если ε^* — некоторое фиксированное число и $\varepsilon^* \leq \varepsilon_1$, то для любого $0 < \varepsilon \leq \varepsilon^*$ верно следующее:

$$g(\varepsilon) \leq \frac{2}{\delta}\frac{(1+\varepsilon^{*2}b^2(\theta))}{(1-2d)}\sqrt{\left(1+\left(\frac{1-d}{1-3d}\right)^2\right)\left(1+\omega\left(\frac{1-d}{1-3d}\right)^2\right)}.$$

Окончательно получаем

$$\left\|\int_0^1 \frac{G(s,t,\varepsilon)}{\varepsilon}dt\right\| \leq \mathcal{G}(\varepsilon^*) \quad \text{для любого} \quad 0 < \varepsilon \leq \varepsilon^*,$$

где

$$\mathcal{G}(\varepsilon^*) = \frac{4}{\delta}\frac{(1+\varepsilon^{*2}b^2(\theta))}{(1-2d)}\sqrt{\left(1+\left(\frac{1-d}{1-3d}\right)^2\right)\left(1+\omega\left(\frac{1-d}{1-3d}\right)^2\right)}.$$

3.7. Завершение доказательства теоремы

Чтобы завершить доказательство теоремы 1, надо доказать, что существует такая пара — число ε_0 и постоянная K, что для всех $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ оператор T, определенный формулой

$$(Ty)(s) = \int_0^1 \frac{G(s,t,\varepsilon)}{\varepsilon}F(t,y(t,\varepsilon),\varepsilon)dt,$$

отображает шар $B_{0,K\varepsilon} = \{y \in C[0,1] : ||y|| \leq K\varepsilon\}$ в себя и является сжимающим. Иными словами,

$$1.\ ||Ty|| \leq K\varepsilon \quad \text{для любых функций} \quad y \in B_{0,K\varepsilon},$$

$$2.\ ||T\overline{y} - T\overline{\overline{y}}|| \leq \xi||\overline{y} - \overline{\overline{y}}|| \quad \text{для любых функций} \quad \overline{y}, \overline{\overline{y}} \in B_{0,K\varepsilon},$$

причем $0 < \xi < 1$. Понятно, что ε_0 не может быть больше ε_1, выбранного в разделе 3.5. и обеспечивающего выполнение условий (3.8), (3.9). Таким образом, предполагая, что $\varepsilon_0 \leq \varepsilon_1$, мы можем использовать равномерные по ε оценки, полученные в предыдущем пункте, заменив ε^* на ε_0.

Заметим, что

$$F^2 = \rho(e^{y^1} - y^1 - 1) = \rho\frac{e^{\nu y^1}}{2}(y^1)^2, \quad 0 < \nu < 1.$$

Тогда для любого $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$

$$||Ty|| = \left\|\int_0^1 \frac{G(s,t,\varepsilon)}{\varepsilon}F(t,y(t,\varepsilon),\varepsilon)dt\right\| \leq \mathcal{G}(\varepsilon_0)||F|| \leq \mathcal{G}(\varepsilon_0)\left(||f'|| + K^2\varepsilon_0\frac{e^{K\varepsilon_0}}{2}\right)\varepsilon$$

и требование 1 выполнено, если

$$\mathcal{G}(\varepsilon_0)\left(||f'|| + K^2\varepsilon_0\frac{e^{K\varepsilon_0}}{2}\right) \leq K.$$

Далее, для любых $\overline{y}, \overline{\overline{y}} \in B_{0,K\varepsilon}$ справедлива оценка

$$||T\overline{y} - T\overline{\overline{y}}|| \leq \mathcal{G}(\varepsilon_0)||(\overline{y}^1)^2 - (\overline{\overline{y}}^1)^2||\frac{e^{K\varepsilon_0}}{2} \leq$$

$$\leq \mathcal{G}(\varepsilon_0)||\overline{y}^1 - \overline{\overline{y}}^1||\ ||\overline{y}^1 + \overline{\overline{y}}^1||\frac{e^{K\varepsilon}}{2} \leq \mathcal{G}(\varepsilon_0)K\varepsilon_0 e^{K\varepsilon_0}||\overline{y} - \overline{\overline{y}}||.$$

Требование 2 выполнено, если

$$\mathcal{G}(\varepsilon_0)e^{K\varepsilon_0}K\varepsilon_0 < 1.$$

Итак, нам нужно доказать, что существует пара (ε_0, K), удовлетворяющая одновременно двум неравенствам:

$$\mathcal{G}(\varepsilon_0)\left(||f'|| + K^2\varepsilon_0\frac{e^{K\varepsilon_0}}{2}\right) \leq K, \quad \mathcal{G}(\varepsilon_0)e^{K\varepsilon_0}K\varepsilon_0 < 1.$$

Заметим, что для этого достаточно одновременного выполнения неравенств

$$\mathcal{G}(\varepsilon_0)||f'|| \leq \frac{K}{2}, \tag{3.12}$$

$$\mathcal{G}(\varepsilon_0)e^{K\varepsilon_0}K\varepsilon_0 < 1. \tag{3.13}$$

Для краткости записи введем постоянную g_1 следующим образом:

$$g_1 = \frac{4}{\delta(1-2d)}\sqrt{\left(1 + \left(\frac{1-d}{1-3d}\right)^2\right)\left(1 + \omega\left(\frac{1-d}{1-3d}\right)^2\right)}.$$

Тогда

$$\mathcal{G}(\varepsilon_0) = g_1(1 + \varepsilon_0^2 b^2(\theta)).$$

Обозначим через ψ функцию от ε_0, K:

$$\psi(\varepsilon_0, K) = g_1(1 + \varepsilon_0^2 b^2(\theta))K\varepsilon_0 e^{K\varepsilon_0},$$

а через $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ — следующие множества:

$$\Gamma_1 = \{(\varepsilon_0, K) : K - \text{любое}, 0 < \varepsilon_0 \leq \varepsilon_1\},$$

Γ_2 — множество точек (ε_0, K), удовлетворящих неравенству (3.12),

$$\Gamma_3 = \{(\varepsilon_0, K) : \varepsilon_0, K > 0, \psi(\varepsilon_0, K) = \hat{c}, 0 \leq \hat{c} < 1\}.$$

Перейдем теперь к анализу неравенств (3.12), (3.13). Понятно, что Γ_2 — это “внутренность” параболы

$$K(\varepsilon_0) = 2g_1||f'||(1 + \varepsilon_0^2 b^2(\theta)),$$

а Γ_3 — множество точек (ε_0, K), удовлетворяющих неравенству (3.13).

Заметим, что прямые $K = 0$ и $\varepsilon_0 = 0$ лежат в Γ_3. Поскольку $\psi_0(\varepsilon_0, K)$ — непрерывная по ε_0 функция, то можно утверждать, что при достаточно малых ε_0 значения $\psi(\varepsilon_0, K)$ также мало отличаются от нуля. Таким образом,

$$\Gamma_1 \cap \Gamma_2 \cap \Gamma_3 \neq \emptyset,$$

что и требовалось доказать.

Можно рассуждать и по-другому. С этой целью выясним, какой вид имеют кривые $\psi(\varepsilon_0, K) = \hat{c}$, $0 \le \hat{c} < 1$, образующие множество Γ_3. Поскольку

$$d\psi = \psi_{\varepsilon_0} d\varepsilon_0 + \psi_K dK =$$

$$= Ke^{K\varepsilon_0}[2g_1 b^2(\theta)\varepsilon_0^2 + g_1 b^2(\theta)\varepsilon_0^2(1 + K\varepsilon_0)]d\varepsilon_0 + \varepsilon_0 e^{K\varepsilon_0} g_1(1 + \varepsilon_0^2 b^2(\theta))(1 + K\varepsilon_0)dK = 0,$$

то

$$\frac{dK}{d\varepsilon_0} = -\frac{K}{\varepsilon_0}\left[1 + \frac{2b^2(\theta)\varepsilon_0^2}{(1 + \varepsilon_0^2 b^2(\theta))(1 + K\varepsilon_0)}\right]. \tag{3.14}$$

Значит, интегральные кривые $K(\varepsilon_0)$ выглядят как “возмущенные” гиперболы $K(\varepsilon_0) = \mathrm{const}/\varepsilon_0$. Из уравнения (3.14) видно, что при малых ε_0 эти возмущения малы, и мы снова приходим к утверждению

$$\Gamma_1 \cap \Gamma_2 \cap \Gamma_3 \neq \emptyset.$$

Рис. 5 иллюстрирует наши рассуждения.

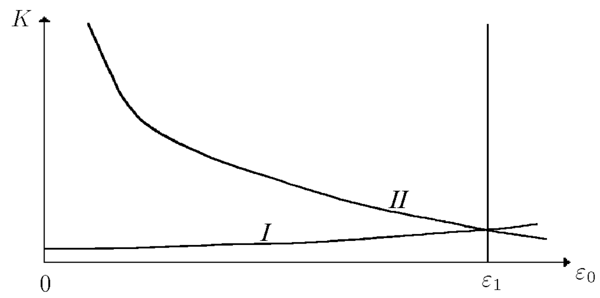

Рис. 5.

Здесь кривая I — график функции $K(\varepsilon_0) = 2g_1||f'||(1 + \varepsilon_0^2 b^2(\theta))$, кривая II задана уравнением $\psi(K, \varepsilon_0) = g_1(1 + \varepsilon_0^2 b^2(\theta))K\varepsilon_0 e^{\varepsilon_0 K} = \hat{c}$, $\hat{c} < 1$ — некоторая постоянная.

Теорема доказана.

3.8. Пример

В качестве иллюстрации к теореме рассмотрим случай конкретного сглаживания $\rho(s) \in C^2$ и вычислим ε_0 по заданному δ.

Возьмем $l = 1/6$, $\mu = 1/12$. На участках $[l - \mu/2, l + \mu/2]$ и $[1 - l - \mu/2, 1 - l + \mu/2]$ сглаживание производится с помощью полинома

$$\rho(s) = a_1\left(\frac{s - l}{\mu/2}\right)^5 + a_2\left(\frac{s - l}{\mu/2}\right)^3 + a_3\left(\frac{s - l}{\mu/2}\right) + a_4,$$

где

$$a_1 = -\frac{3}{16}(1 - \delta), \quad a_2 = \frac{5}{8}(1 - \delta), \quad a_3 = -\frac{15}{16}(1 - \delta), \quad a_4 = \frac{1 + \delta}{2}.$$

При таком выборе коффициентов

$$\rho(l - \mu/2) = \rho(1 - l + \mu/2) = 1, \quad \rho(l + \mu/2) = \rho(1 - l - \mu/2) = \delta,$$

$$\rho'(l-\mu/2) = \rho'(l+\mu/2) = \rho'(1-l-\mu/2) = \rho'(1-l+\mu/2) = 0,$$
$$\rho''(l-\mu/2) = \rho''(l+\mu/2) = \rho''(1-l-\mu/2) = \rho''(1-l+\mu/2) = 0$$

и функция $\rho(s)$ действительно принадлежит $C^2[0,1]$.

По результатам численных расчетов получаем:

δ	$\frac{85}{100}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{4}{100}$	$\frac{4}{1000}$
c_1	6,72	20,2	115	580,4	1900	30230
$b^2(\theta)$	0,057	0,41	6,83	76,35	434,66	23974
$\|\|f'\|\|$	1,83	4,58	14,06	29,55	46,27	116
ε_0	$4{,}4 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-3}$	$8{,}69 \cdot 10^{-5}$	$5 \cdot 10^{-6}$	$5{,}26 \cdot 10^{-7}$	$2 \cdot 10^{-9}$

Список литературы

[1] Blokhin A. M., Iohrdanidy A. A., Krymskikh D. A. *Numerical investigation of the hydrodynamic model equations for charge transport in semiconductors.* Preprint No. 26. Sobolev Inst. of Math. Siberian Branch of the Russian Acad. of Sci., Novosibirsk, 1995.

[2] Blokhin A. M., Iohrdanidy A. A., Merazhov I. Z. *Numerical investigation of the gas dynamic model equations for charge transport in semiconductors.* Preprint No. 33. Sobolev Inst. of Math. Siberian Branch of the Russian Acad. of Sci., Novosibirsk, 1996.

[3] Gardner C. L., Jerome J. W., Rose D. J. Numerical methods for hydrodynamic device model: subsonic flow. *IEEE Trans. Computer-aided Design*, **8**, No. 5, 1989, 501–507.

[4] Gardner C. L. Numerical simulation of a steady-state electron shock wave in a submicrometer semiconductor device. *IEEE Trans. Electron Devices*, **38**, No. 2, 1991, 392–398.

[5] Anile A. M., Maccora C., Pidatella R. M. Simulation of $n^+ - n - n^+$ devices by hydrodynamical model: subsonic and supersonic flows. *COMPEL*, **14**, No. 1, 1995, 1–18.

[6] Мизохата С. *Теория уравнений с частными производными.* Мир, М., 1977.

[7] Васильева А. Б., Бутузов В. Ф. *Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений.* Наука, М., 1973.

[8] Ломов С. А. *Введение в общую теорию сингулярных возмущений.* Наука, М., 1981.

Поступила в редакцию 7 декабря 1998 г.