

Применение вспомогательного функционала качества для автоматического контроля оптимальности дискретного фильтра Калмана

И. В. Семушин¹, Ю. В. Цыганова^{1,†}, А. В. Цыганов²

¹Ульяновский государственный университет, Ульяновск, Россия

²Ульяновский государственный педагогический университет им. И. Н. Ульянова, Россия

[†]Контактный автор: Цыганова Юлия В., e-mail: tsyganovajv@gmail.com

Поступила 10 марта 2020 г., доработана 24 марта 2020 г., принята в печать 13 апреля 2020 г.

Предложен новый метод автоматического контроля оптимальности дискретного фильтра Калмана, основанный на равенстве нулю градиента вспомогательного функционала качества (ВФК) по параметрам адаптивного дискретного фильтра. Для вычисления градиента ВФК применяется численно устойчивый к ошибкам машинного округления алгоритм модифицированной взвешенной ортогонализации Грама — Шмидта (MWGS-ортогонализации). Алгоритм реализован на языке Matlab. Результаты проведенных численных экспериментов подтверждают эффективность предложенного метода.

Ключевые слова: автоматический контроль оптимальности, дискретный фильтр Калмана, вспомогательный функционал качества.

Цитирование: Семушин И.В., Цыганова Ю.В., Цыганов А.В. Применение вспомогательного функционала качества для автоматического контроля оптимальности дискретного фильтра Калмана. Вычислительные технологии. 2020; 25(3):77–87.

Введение

Рассмотрим класс динамических систем \mathfrak{S} , адекватно моделируемых в пространстве состояний в дискретном времени уравнениями калмановского типа:

$$\mathfrak{M}(\boldsymbol{\theta}) : \begin{cases} \mathbf{x}_t = F(\boldsymbol{\theta})\mathbf{x}_{t-1} + G(\boldsymbol{\theta})\mathbf{w}_{t-1}, \\ \mathbf{z}_t = H(\boldsymbol{\theta})\mathbf{x}_t + \mathbf{v}_t, \\ \bar{\mathbf{x}}_0(\boldsymbol{\theta}) \triangleq \mathbb{E}\{\mathbf{x}_0\}, \quad \Pi_0(\boldsymbol{\theta}) \triangleq \mathbb{E}\{[\mathbf{x}_0 - \bar{\mathbf{x}}_0(\boldsymbol{\theta})][\mathbf{x}_0 - \bar{\mathbf{x}}_0(\boldsymbol{\theta})]^\top\}, \\ \mathbb{E}\{\mathbf{w}_t\} = 0, \quad \mathbb{E}\{\mathbf{w}_t\mathbf{w}_t^\top\} = Q(\boldsymbol{\theta}) \geq 0, \\ \mathbb{E}\{\mathbf{v}_t\} = 0, \quad \mathbb{E}\{\mathbf{v}_t\mathbf{v}_t^\top\} = R(\boldsymbol{\theta}) > 0, \quad t = 1, \dots, N, \end{cases} \quad (1)$$

на интервале наблюдения $T_o = [1, N]$. Модель $\mathfrak{M}(\boldsymbol{\theta})$ параметризована по $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^p$, где $\boldsymbol{\theta}$ — модельный параметр, характеризующий режим функционирования исследуемой динамической системы \mathfrak{S} .

Предположим, что $\boldsymbol{\theta}$ принадлежит некоторой области определения $\mathcal{D}(\boldsymbol{\theta})$. Далее считаем, что динамическая система \mathfrak{S} , представленная моделью $\mathfrak{M}(\boldsymbol{\theta})$, функционирует в квазистационарном режиме и ее номинальному режиму работы соответствует

конкретное значение модельного параметра $\theta = \theta^*$. Поставим задачу контроля возможных внезапных нарушений номинального режима функционирования данной динамической системы.

В реальной ситуации, когда вектор состояния x_t недоступен для прямого наблюдения, по данным измерений z_t в каждый дискретный момент времени t приходится вычислять оценки \hat{x}_t вектора состояния с помощью алгоритма Калмана [1]. Зная структуру модели $\mathcal{M}(\theta)$, т. е. функциональные зависимости модельных матриц от параметра θ , можно строить адаптивный фильтр \mathcal{A}_{KF} в форме алгоритма Калмана, в котором матрицы-параметры фильтра также зависят от векторного, но уже настраиваемого параметра θ^1 . Положим в адаптивном фильтре $\theta = \theta^*$. При таком номинальном режиме работы системы \mathfrak{S} адаптивный фильтр \mathcal{A}_{KF} будет оптимальным в среднеквадратическом смысле. При нарушении номинального режима работы системы, что соответствует изменению значения векторного параметра θ в $\mathcal{M}(\theta)$, фильтр \mathcal{A}_{KF} потеряет свойство оптимальности. Решением задачи контроля оптимальности адаптивного фильтра \mathcal{A}_{KF} является построение специального решающего правила, которое должно быть включено в алгоритм адаптивной фильтрации.

Существует множество различных подходов к решению такой задачи контроля [2–5, и др.]. Например, в [6] изложены математические методы контроля на основе аналитической избыточности, в которых диагностику проводят с помощью проверки различных контрольных соотношений, которым должны удовлетворять промежуточные или окончательные результаты вычислений. Методы аналитической избыточности удобно применять для контроля оптимальности рекуррентных алгоритмов обработки информации, каким и является дискретный фильтр Калмана.

В данной работе предложен новый метод автоматического контроля номинального режима функционирования динамической системы \mathfrak{S} , основанный на сочетании таких двух ранее разработанных методов, как:

- 1) метод вспомогательного функционала качества (ВФК), который позволяет контролировать оптимальность адаптивного дискретного фильтра по критерию близости к нулю градиента ВФК по модельному параметру θ ;
- 2) численно эффективная модификация адаптивного фильтра, основанная на применении метода модифицированной взвешенной ортогонализации Грама — Шмидта, которая позволяет организовать численно устойчивые к ошибкам машинного округления вычисления в адаптивном фильтре.

1. Метод вспомогательного функционала качества

Метод вспомогательного функционала качества [5] разработан для решения задач идентификации, адаптации и контроля стохастических систем с управлением и фильтрацией. Формируемый ВФК является инструментальным показателем качества функционирования системы \mathfrak{S} , поскольку для него выполнены два важных условия:

- 1) зависимость только от процессов, доступных для прямого измерения;
- 2) эквивалентность (в среднеквадратической норме) целей функционирования по исходному (недоступному) функционалу качества (ИФК) и по вспомогательному (доступному) функционалу качества (ВФК).

¹В целях упрощения обозначений сохраняем для адаптивного фильтра то же обозначение θ , но подразумеваем, что это не тот θ , что в модели (1), а именно настраиваемый параметр фильтра, который можно было бы обозначать как $\hat{\theta}$.

В основу метода положена задача построить ВФК так, чтобы выполнялось равенство ВФК = ИФК + const, гарантирующее совпадение точек минимума для ИФК и ВФК². Условием существования такого ВФК является конструктивное свойство полной наблюдаемости модели $\mathfrak{M}(\theta)$.

Теорема 1 [7, 8]. *Эквимодалность ИФК вида $J_e(\theta) \triangleq \mathbb{E} \{ \mathbf{e}_t^\top \mathbf{e}_t \}$ и ВФК вида $J_\varepsilon(\theta) \triangleq \mathbb{E} \{ \varepsilon_t^\top \varepsilon_t \}$, т. е. равенство $\hat{\theta} \triangleq \arg \min_{\theta} J_e(\theta) = \arg \min_{\theta} J_\varepsilon(\theta) \triangleq \theta^*$ по параметру $\theta \in \mathcal{D}(\theta) \subset \mathbb{R}^p$ в некотором компактном множестве $\mathcal{D}(\theta)$ обеспечивается, если*

$$\varepsilon_t \triangleq \varepsilon_t(\theta) = \mathcal{S}(\mathbf{Z}_t^{t+\mathbb{S}-1}) - \hat{\mathbf{x}}_{t|t-1}, \quad (2)$$

где \mathbb{S} — максимальный индекс наблюдаемости системы, оценка предсказания $\hat{\mathbf{x}}_{t|t-1}$ получена от адаптивного фильтра, $\mathcal{S}(\cdot)$ — специальное матричное преобразование [5, 7], $\mathbf{Z}_t^{t+\mathbb{S}-1}$ — составной вектор измерений $[\mathbf{z}_t^\top | \mathbf{z}_{t+2}^\top | \dots | \mathbf{z}_{t+\mathbb{S}-1}^\top]^\top$, $\mathbf{e}_t \triangleq \mathbf{x}_t - \hat{\mathbf{x}}_{t|t-1}$ — ошибка оценивания вектора состояния \mathbf{x}_t .

2. Автоматический контроль оптимальности адаптивного фильтра

Вспомогательный функционал качества позволяет использовать его не только в качестве инструмента идентификации параметров модели динамической системы по измерительным данным, но и для автоматического контроля оптимальности адаптивного фильтра, а именно: условие близости к нулю градиента ВФК должно выполняться (с необходимостью и достаточностью) в точке, соответствующей оптимальному значению параметра θ^* адаптивного фильтра Калмана.

Предположим, что в текущий дискретный момент времени t значение параметра $\theta = \theta^*$. Тогда значение градиента ВФК теоретически равно нулю, и наоборот. Если затем в некоторый момент времени t_1 значение модельного параметра θ , соответствующее текущему режиму функционирования динамической системы \mathfrak{S} , изменится, а в алгоритме адаптивного фильтра значение модельного параметра θ останется равным θ^* , то значение градиента ВФК будет отлично от нуля с некоторым пороговым значением $\delta > 0$, что свидетельствует о потере алгоритмом дискретной фильтрации свойства оптимальности. Изложенная идея впервые была представлена в [9]. В настоящей работе она получает свое дальнейшее развитие.

Запишем простой критерий контроля оптимальности адаптивного фильтра:

$$\|\nabla_{\theta} \mathcal{J}_{\varepsilon}(\theta, t)\| < \delta, \quad (3)$$

где $\mathcal{J}_{\varepsilon}(\theta, t) = \frac{1}{t} \sum_{k=1}^t \varepsilon_k^\top(\theta) \varepsilon_k(\theta)$ — практическая оценка (осредненное значение) для ВФК³.

Тогда

$$\nabla_{\theta} \mathcal{J}_{\varepsilon}(\theta, t) = \frac{2}{t} \sum_{k=1}^t S_k(\theta) \varepsilon_k(\theta), \quad (4)$$

²Это свойство названо в [7] эквимодалностью функционалов качества.

³Строгое обоснование выбора порога δ в решающем правиле (3) может быть дано отдельно с привлечением статистической теории различения гипотез. Здесь мы ограничиваемся приближенным — инженерным — подходом.

где $S_k(\boldsymbol{\theta})$ — матрица чувствительности размера $p \times n$, при этом ее (ij) -й элемент

$$s_k^{(ij)}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\partial \varepsilon_k^{(j)}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i} = -\frac{\partial \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}^{(j)}}{\partial \theta_i}, \quad i = 1, \dots, p, \quad j = 1, \dots, n. \quad (5)$$

Таким образом, проверка критерия оптимальности (3) требует вычисления оценок вектора состояния $\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}$ и их частных производных $\frac{\partial \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}}{\partial \theta_i}$ по элементам θ_i модельного векторного параметра $\boldsymbol{\theta}$ в адаптивном дискретном фильтре \mathcal{A}_{KF} .

3. Расширенный адаптивный LD-фильтр с автоматическим контролем оптимальности

Хорошо известно, что проблема ошибок машинного округления является неустранимой ввиду ограниченной разрядности представления вещественных чисел с плавающей запятой в памяти компьютера. Поэтому при решении практических задач, связанных с вычислениями на ЭВМ, эта проблема всегда учитывается и рассматриваются пути ее возможных решений. Из проведенных ранее теоретических [10] и практических исследований [1, гл. 7] известно, что стандартный алгоритм Калмана не является численно устойчивым по отношению к ошибкам округления. Поэтому в данной работе для повышения численной устойчивости алгоритма автоматического контроля оптимальности предлагается вместо адаптивного фильтра \mathcal{A}_{KF} в форме стандартного алгоритма Калмана использовать его численно устойчивую LD-модификацию, основанную на прямой процедуре модифицированной взвешенной ортогонализации Грама — Шмидта (MWGS — Modified Weighted Gram-Schmidt orthogonalization) [11].

В недавней работе [12] построен численно эффективный алгоритм (см. алгоритм 3) вычисления градиента ВФК в терминах адаптивного LD-фильтра, дополненного возможностью вычисления функций чувствительности $(\hat{\mathbf{x}}_{t|t-1})'_{\theta_i}$, $i = 1, \dots, p$, необходимых для практической реализации (3)–(5). Алгоритм 3 был применен для решения задачи идентификации неизвестных параметров математической модели дискретной линейной стохастической системы по данным измерений [12]. Предлагаемый здесь метод автоматического контроля оптимальности адаптивного фильтра расширяет функциональность указанного алгоритма в следующих направлениях:

1) вместо адаптивного LD-фильтра, представленного в [12], построим его расширенную модификацию, отличающуюся тем, что оценки вектора состояния и функции чувствительности оценок вычисляются с помощью численно устойчивой процедуры MWGS-ортогонализации. Такая модификация позволяет свести к минимуму количество операций матричного обращения;

2) новый расширенный адаптивный LD-фильтр будет дополнен возможностью проверки критерия оптимальности непосредственно в терминах величин, вычисляемых в самом фильтре.

3.1. Расширенный LD-фильтр

LD-алгоритмы фильтрации основаны на применении прямой процедуры модифицированной взвешенной ортогонализации Грама — Шмидта. Основными преимуществами алгоритмов являются устойчивость по отношению к ошибкам машинного округления,

отсутствие операции извлечения квадратного корня, избавление от операции матричного обращения, компактная и однородная структура, ориентированность на параллельные вычисления.

Отличие данного класса алгоритмов заключается в том, что они используют представление ковариационной матрицы P_t в виде матричного произведения LDL^T , где L — нижняя треугольная матрица с единицами на диагонали, D — диагональная матрица. Для любой квадратной положительно определенной матрицы такое представление существует и может быть получено с помощью модифицированного разложения Холецкого [13].

Особенность расширенного LD-алгоритма заключается в том, что все величины дискретного фильтра помещаются в блочную матрицу и обрабатываются единообразно с помощью взвешенных ортогональных преобразований. Предположим, что имеются так называемые предмассивы A и D_w . Применяя к ним прямую процедуру MWGS-ортогонализации, получим постмассивы L и D_β , такие что

$$A^T = LB^T \quad \text{и} \quad A^T D_w A = LD_\beta L^T, \quad (6)$$

где B — матрица MWGS-преобразования.

Рассмотрим LD-фильтр, представленный в [12] (алгоритм 1) и построим его расширенную модификацию.

Алгоритм 1. eLD-KF (расширенный LD-фильтр Калмана)

▷ Инициализация. $\hat{\mathbf{x}}_0 = \bar{\mathbf{x}}_0$ и $P_0 = \Pi_0$, $\Pi_0 > 0$. Применяя модифицированное разложение Холецкого, найти $\{L_{P_0}, D_{P_0}\}$, $\{L_R, D_R\}$, $\{L_Q, D_Q\}$. Положить $\hat{\mathbf{z}}_0 = (L_{P_0} D_{P_0})^{-1} \hat{\mathbf{x}}_0$.

▷ Для $t = 1, \dots, N$ выполнить

▷ Экстраполяция. Вычислить $\{L_{P_{t|t-1}}, D_{P_{t|t-1}}\}$ и $\hat{\mathbf{z}}_{t|t-1}$:

Для пары предмассивов

$$\mathcal{D}_{t-1} = \text{diag}\{D_{P_{t-1}}, D_Q\}, \quad \mathcal{W}_{t-1} = \begin{bmatrix} (FL_{P_{t-1}}) & (GL_Q) \\ \hat{\mathbf{z}}_{t-1}^\top & 0 \end{bmatrix} \quad (7)$$

выполнить MWGS-ортогонализацию столбцов матрицы \mathcal{W}_{t-1} относительно весовой матрицы \mathcal{D}_{t-1} и получить пару постмассивов

$$\mathcal{D}_{t|t-1}^\dagger = \text{diag}\{D_{P_{t|t-1}}, \gamma\}, \quad \mathcal{W}_{t|t-1}^\dagger = \begin{bmatrix} L_{P_{t|t-1}} & 0 \\ \hat{\mathbf{z}}_{t|t-1}^\top & 1 \end{bmatrix}, \quad (8)$$

где скаляр γ является побочным результатом вычислений.

▷ Фильтрация. Вычислить $\{L_{P_t}, D_{P_t}\}$ и $\hat{\mathbf{z}}_t$:

Для пары предмассивов

$$\mathcal{D}_{t|t-1} = \text{diag}\{D_R, D_{P_{t|t-1}}, 1\}, \quad \mathcal{W}_{t|t-1} = \begin{bmatrix} L_R & (HL_{P_{t|t-1}}) & 0 \\ 0 & L_{P_{t|t-1}} & 0 \\ 0 & \hat{\mathbf{z}}_{t|t-1}^\top & 1 \end{bmatrix} \quad (9)$$

выполнить MWGS-ортогонализацию столбцов матрицы $\mathcal{W}_{t|t-1}$ относительно весовой матрицы $\mathcal{D}_{t|t-1}$ и получить пару постмассивов

$$\mathcal{D}_t^\dagger = \text{diag}\{D_{C_t}, D_{P_t}, \alpha\}, \quad \mathcal{W}_t^\dagger = \begin{bmatrix} L_{C_t} & 0 & 0 \\ (K_t L_{C_t}) & L_{P_t} & 0 \\ \boldsymbol{\tau}^\top & \hat{\mathbf{z}}_t^\top & 1 \end{bmatrix}, \quad (10)$$

где подстрока $\boldsymbol{\tau}^\top$ и скаляр α являются побочными результатами вычислений.

▷ КОНЕЦ.

Замечание 1. Алгоритм 1 алгебраически эквивалентен стандартному алгоритму Калмана.

Замечание 2. В любой момент дискретного времени t оценки предсказания $\hat{\mathbf{x}}_{t|t-1}$ и фильтрации $\hat{\mathbf{x}}_t$ вектора состояния \mathbf{x}_t можно легко получить согласно выражениям

$$\hat{\mathbf{x}}_{t|t-1} = L_{P_{t|t-1}} D_{P_{t|t-1}} \hat{\mathbf{z}}_{t|t-1} \quad \text{и} \quad \hat{\mathbf{x}}_t = L_{P_t} D_{P_t} \hat{\mathbf{z}}_t. \quad (11)$$

3.2. Расширенный адаптивный LD-фильтр

Для построения расширенного адаптивного LD-фильтра с автоматическим контролем оптимальности применим полученный ранее результат.

Лемма 1 [11]. Пусть элементы матриц $\{A, D_w\}$ являются дифференцируемыми функциями по скалярному параметру θ . Рассмотрим матричное преобразование (6). При известных матрицах производных A'_θ и $(D_w)'_\theta$ значения производных элементов матриц $\{L, D_\beta\}$ при $\theta = \hat{\theta}$ можно вычислить как

$$L'_\theta = L (\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_2 + \mathcal{U}_0^\top) D_\beta^{-1} \quad \text{и} \quad (D_\beta)'_\theta = 2\mathcal{D}_0 + \mathcal{D}_2, \quad (12)$$

где \mathcal{L}_0 , \mathcal{D}_0 , \mathcal{U}_0 — соответственно строго нижняя треугольная, диагональная и строго верхняя треугольная части матричного произведения $B^\top D_w A'_\theta L^{-\top}$, а матрицы \mathcal{D}_2 и \mathcal{L}_2 — соответственно диагональная и строго нижняя треугольная части матричного произведения $B^\top (D_w)'_\theta B$.

Далее используем метод (12), позволяющий вычислять значения производных в матричном LD-преобразовании, для построения расширенного адаптивного LD-фильтра с автоматическим контролем оптимальности. Полученный результат представлен ниже.

Алгоритм 2. eLD-KF-AC

(адаптивный eLD-KF с автоматическим контролем оптимальности)

▷ Инициализация.

1. Установить текущее значение модельного параметра $\hat{\theta} \in \mathbb{R}^p$.
2. Положить начальные значения $P_0 = \Pi_0(\hat{\theta})$, $\hat{\mathbf{x}}_0 = \bar{\mathbf{x}}_0(\hat{\theta})$; $(P_0)'_{\hat{\theta}_i}$, $(\hat{\mathbf{x}}_0)'_{\hat{\theta}_i}$, $i = 1, \dots, p$.
3. Вычислить $\hat{F} = F(\hat{\theta})$, $\hat{G} = G(\hat{\theta})$, $\hat{Q} = Q(\hat{\theta})$, $\hat{H} = H(\hat{\theta})$, $\hat{R} = R(\hat{\theta})$; $(F)'_{\hat{\theta}_i}$, $(G)'_{\hat{\theta}_i}$, $(Q)'_{\hat{\theta}_i}$, $(H)'_{\hat{\theta}_i}$, $(R)'_{\hat{\theta}_i}$, $i = 1, \dots, p$.
4. Найти с помощью LDL^\top разложения факторы Холецкого $\{L_{P_0}, D_{P_0}\}$, $\{L_{\hat{Q}}, D_{\hat{Q}}\}$, $\{L_{\hat{R}}, D_{\hat{R}}\}$; $\{(L_{P_0})'_{\hat{\theta}_i}, (D_{P_0})'_{\hat{\theta}_i}\}$, $\{(L_{\hat{Q}})'_{\hat{\theta}_i}, (D_{\hat{Q}})'_{\hat{\theta}_i}\}$, $\{(L_{\hat{R}})'_{\hat{\theta}_i}, (D_{\hat{R}})'_{\hat{\theta}_i}\}$, $i = 1, \dots, p$.
5. Вычислить $\hat{\mathbf{z}}_0 = (L_{P_0} D_{P_0})^{-1} \hat{\mathbf{x}}_0$; $(\hat{\mathbf{z}}_0)'_{\hat{\theta}_i}$, $i = 1, \dots, p$.

▷ Для $t = 1, \dots, N$ выполнить

▷ Экстраполяция.

1. Заполнить предмассивы $\{A = \mathcal{W}_{t-1}, D_w = \mathcal{D}_{t-1}\}$ согласно (7) и заполнить предмассивы значений производных $\{A'_{\hat{\theta}_i}, (D_w)'_{\hat{\theta}_i}\}$.
2. Выполнить вычисления согласно (12) и получить постмассивы (8) $\{L = \mathcal{W}_{t|t-1}^\dagger, D_\beta = \mathcal{D}_{t|t-1}^\dagger\}$ и постмассивы значений производных $\{L'_{\hat{\theta}_i}, (D_\beta)'_{\hat{\theta}_i}\}$.
3. Извлечь из постмассивов LD-факторы Холецкого $\{L_{P_{t|t-1}}, D_{P_{t|t-1}}\}$, значения их производных $\{(L_{P_{t|t-1}})'_{\hat{\theta}_i}, (D_{P_{t|t-1}})'_{\hat{\theta}_i}\}$ и вектор LD-оценки состояния $\hat{\mathbf{z}}_{t|t-1}$ и его значения производных $(\hat{\mathbf{z}}_{t|t-1})'_{\hat{\theta}_i}$ для $i = 1, \dots, p$.

▷ Вычисление градиента ВФК.

1. Вычислить вектор оценки $\hat{\mathbf{x}}_{t|t-1}$ согласно (11) и значения его производных $(\hat{\mathbf{x}}_{t|t-1})'_{\hat{\theta}_i}$ для $i = 1, \dots, p$.
2. Вычислить $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ согласно (2) и $(\boldsymbol{\varepsilon}_t)'_{\hat{\theta}_i}$ согласно (5) для $i = 1, \dots, p$.
3. Вычислить значение градиента ВФК $\nabla_{\boldsymbol{\theta}} \mathcal{J}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(\hat{\boldsymbol{\theta}}, t)$ согласно (4).
4. Проверить критерий (3).

▷ Фильтрация.

1. Заполнить предмассивы $\{A = \mathcal{W}_{t|t-1}, D_w = \mathcal{D}_{t|t-1}\}$ согласно (9) и заполнить предмассивы значений производных $\{A'_{\hat{\theta}_i}, (D_w)'_{\hat{\theta}_i}\}$.
2. Выполнить вычисления согласно (12) и получить постмассивы (10) $\{L = \mathcal{W}_t^\dagger, D_\beta = \mathcal{D}_t^\dagger\}$ и постмассивы значений производных $\{L'_{\hat{\theta}_i}, (D_\beta)'_{\hat{\theta}_i}\}$.
3. Извлечь из постмассивов LD-факторы Холецкого $\{L_{P_t}, D_{P_t}\}$, значения их производных $\{(L_{P_t})'_{\hat{\theta}_i}, (D_{P_t})'_{\hat{\theta}_i}\}$, вектор LD-оценки состояния $\hat{\mathbf{z}}_t$ и значения его производных $(\hat{\mathbf{z}}_t)'_{\hat{\theta}_i}$ для $i = 1, \dots, p$.

▷ КОНЕЦ.

Замечание 3. Для применения алгоритма 2 необходимо предварительно преобразовать модель $\mathfrak{M}(\boldsymbol{\theta})$ (1) к стандартному наблюдаемому виду [14].

Замечание 4. Новый алгоритм 2 дополняет расширенный адаптивный LD-фильтр возможностью автоматического контроля оптимальности посредством вычисления градиента ВФК и проверки его близости к нулю. Следовательно, можно считать, что данный метод наиболее выгоден с точки зрения одновременного оценивания вектора состояния системы и скорейшего обнаружения изменения режима функционирования динамической системы \mathfrak{S} , зависящего от векторного параметра $\boldsymbol{\theta}$.

4. Численный пример

Рассмотрим дискретную линейную стохастическую систему второго порядка, представленную в пространстве состояний [8]. Состояние \mathbf{x}_t динамической системы изменяется в дискретном времени согласно уравнению состояния

$$\mathbf{x}_t = \begin{bmatrix} 1 & \Delta \\ 0 & e^{-\Delta/\tau} \end{bmatrix} \mathbf{x}_{t-1} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mathbf{w}_{t-1}, \quad \mathbf{w}_t \sim N(0, 1).$$

Для измерения в каждый момент дискретного времени $t = \Delta k$, $k = 1, \dots, N$, доступен только первый элемент вектора состояния \mathbf{x}_t :

$$\mathbf{z}_t = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_t + \mathbf{v}_t, \quad \mathbf{v}_t \sim N(0, 1),$$

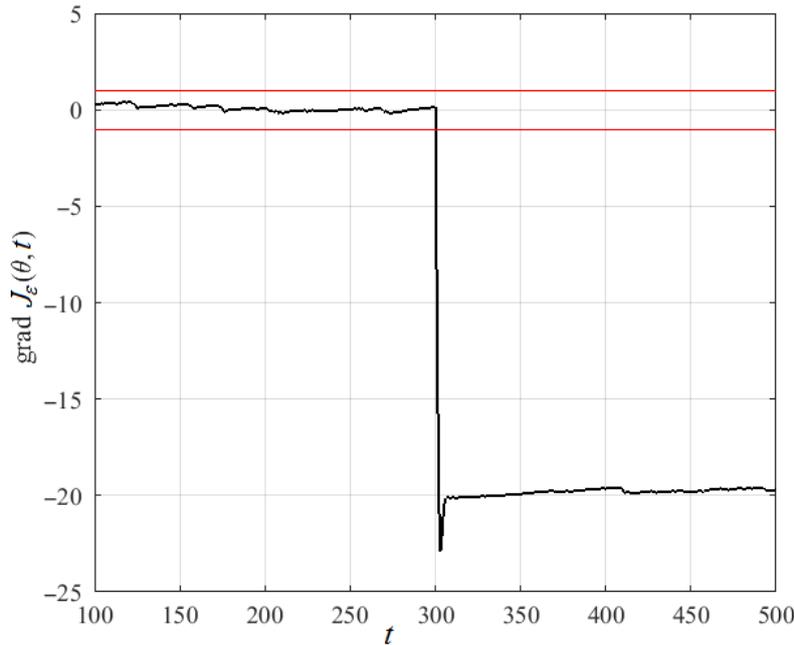
где \mathbf{v}_t — случайная погрешность измерений.

Требуется по данным наблюдений \mathbf{z}_t внутреннего состояния системы \mathbf{x}_t определить факт потери алгоритмом дискретной фильтрации свойства оптимальности вследствие изменения значения модельного параметра $\boldsymbol{\theta} = \tau$.

Для применения алгоритма 2 предварительно перейдем к стандартной наблюдаемой модели $\mathfrak{M}_*(\boldsymbol{\theta})$ [14], определяемой матрицами-параметрами

$$F_* = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -e^{-\Delta/\tau} & 1 + e^{-\Delta/\tau} \end{bmatrix}, \quad G_* = \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta \end{bmatrix}, \quad H_* = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix},$$

которые будем использовать в алгоритме 2.



Значения градиента ВФК до и после изменения значения модельного параметра $\theta = \tau$ в дискретный момент $t = 300$ /
 The values of the API gradient before and after change of the model parameter $\theta = \tau$ at a discrete time instant $t = 300$

Вычислительные эксперименты проведем на языке Matlab. Сгенерируем последовательность измерений при условии, что на временном интервале $T_o = [1, 500]$ в дискретный момент времени $t = 300$ значение модельного параметра $\theta = \tau$ меняется с $\tau^* = 10$ на $\hat{\tau} = 1$. Применим алгоритм 2 для обнаружения факта потери свойства оптимальности алгоритмом фильтрации. На рисунке представлены результаты компьютерного моделирования. Видно, что решающее правило (3) позволяет практически сразу же обнаружить изменение значения параметра θ .

Заключение

Предложен новый метод автоматического контроля оптимальности дискретного фильтра Калмана, основанный на свойствах численной устойчивости прямой процедуры MWGS-преобразования к ошибкам машинного округления и равенстве нулю градиента вспомогательного функционала качества по модельному векторному параметру θ в расширенной LD-модификации адаптивного дискретного фильтра Калмана. Достоинства полученного решения заключаются в следующем:

1) выбор структуры адаптивного фильтра в виде расширенного LD-алгоритма, дополненного возможностью вычисления функций чувствительности по модельному векторному параметру θ адаптивного фильтра, позволяет существенно снизить влияние ошибок машинного округления на результаты вычислений;

2) применение метода ВФК позволяет контролировать оптимальность адаптивного дискретного фильтра по условию равенства нулю градиента ВФК в точке минимума, что соответствует оптимальному значению θ^* модельного параметра θ в адаптивном фильтре;

3) вычисление градиента ВФК в адаптивном расширенном LD-фильтре не требует существенных вычислительных затрат, и такой метод контроля можно использовать в режиме реального времени.

Данная работа содержит новый алгоритм eLD-KF-AC (алгоритм 2), включающий все аспекты представленного вычислительного метода автоматического контроля оптимальности дискретного фильтра Калмана. Результаты работы найдут применение при решении задач совместного контроля и идентификации параметров в классе дискретных линейных стохастических систем, представимых уравнениями в пространстве состояний.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и Правительства Ульяновской области в рамках научных проектов № 18-47-730001 p_a и № 18-41-732002 p_мк.

Список литературы

- [1] **Grewal M.S., Andrews A.P.** Kalman filtering: Theory and practice using MATLAB. Second Edition. John Wiley & Sons; 2001: 410.
- [2] Обнаружение изменения свойств сигналов и динамических систем / Под ред. М. Бассвиль, А. Банвениста: пер. с англ. И.Б. Вильховченко и др. М.: Мир; 1989: 278.
- [3] **Tse L.L.** Sequential analysis: Some classical problems and new challenges. *Statistica Sinica*. 2001; 11(1):303–408.
- [4] **Ширяев А.Н.** Вероятностно-статистические методы в теории принятия решений. 2-е изд., новое. М.: МЦНМО; 2014: 144.
- [5] **Семушин И.В., Цыганова Ю.В., Куликова М.В. и др.** Адаптивные системы фильтрации, управления и обнаружения: коллективная монография. Ульяновск: УлГУ; 2011: 298.
- [6] **Голован А.А., Мироновский Л.А.** Алгоритмический контроль фильтра Калмана. Автоматика и телемеханика. 1993; (7):173–185.
- [7] **Semushin I.V.** Adaptation in stochastic dynamic systems — Survey and new results II. *Intern. Journal of Communication Network and System Sciences*. 2011; 4(4):266–285.
- [8] **Цыганова Ю.В.** Вычисление градиента вспомогательного функционала качества в задаче параметрической идентификации стохастических систем. *Автоматика и телемеханика*. 2011; (9):142–160.
- [9] **Семушин И.В., Цыганова Ю.В., Цыганов А.В.** Адаптивный LD-фильтр с автоматическим контролем оптимальности по методу вспомогательного функционала качества. XIII Всерос. совещание по проблемам управления ВСПУ-2019: Труды [Электронный ресурс] 17–20 июня 2019 г., Москва. Под общ. ред. Д.А. Новикова. Электронные текстовые данные. (614 файлов: 217 МБ). М.: ИПУ РАН; 2019:527–531.
- [10] **Verhaegen M., Van Dooren P.** Numerical aspects of different Kalman filter implementations. *IEEE Transactions on Automatic Control*. 1986; AC-31(10):907–917.
- [11] **Цыганова Ю.В., Цыганов А.В.** О вычислении значений производных в LD-разложении параметризованных матриц. *Известия Иркутского гос. ун-та. Сер.: Математика*. 2018; (23):64–79.

- [12] Semushin I.V., Tsyganova J.V., Tsyganov A.V. Numerically efficient LD-computations for the auxiliary performance index based control optimization under uncertainties. IFAC Papers-Online. 2018; 51(32):568–573.
- [13] Голуб Дж., Ван Лоун Ч. Матричные вычисления. М.: Мир; 1999: 548.
- [14] Semushin I.V., Tsyganova J.V. Adaptation in stochastic dynamic systems — Survey and new results IV: Seeking minimum of API in parameters of data. Intern. Journal of Communication Networks and System Sciences. 2013; (6):513–518.

Вычислительные технологии, 2020, том 25, № 3, с. 77–87. © ИВТ СО РАН, 2020
Computational Technologies, 2020, vol. 25, no. 3, pp. 77–87. © ICT SB RAS, 2020

ISSN 1560-7534
eISSN 2313-691X

COMPUTATIONAL TECHNOLOGIES

DOI:10.25743/ICT.2020.25.3.009

Application of the auxiliary performance index for automatic optimality control of discrete Kalman filter

SEMUSHIN INNOKENTIY V.¹, TSYGANOVA YULIA V.^{1,*}, TSYGANOV ANDREY V.²

¹Ul'yanovsk State University, 432017, Ul'yanovsk, Russia

²Ul'yanovsk State University of Education, 432071, Ul'yanovsk, Russia

*Corresponding author: Tsyganova Yulia V., e-mail: tsyganovajv@gmail.com

Received March 10, 2020, revised March 24, 2020, accepted April 13, 2020

Abstract

The paper proposes a new method for automatic control of the nominal operating mode of a dynamic stochastic system, based on a combination of two previously developed methods: the auxiliary performance index (API) method and the LD modification of an adaptive filter numerically robust to roundoff errors.

The API method was previously developed to solve the problems of identification, adaptation, and control of stochastic systems with control and filtering.

We suggest using the API not only as a tool for identifying the parameters of the stochastic system model from the measurement data but also for automatically monitoring the optimality of the adaptive filter, namely, the condition that the API gradient is close to zero should be satisfied (with the necessity and sufficiency) at the point corresponding to the optimal value of the vector parameter in the adaptive Kalman filter.

The main result is the new eLD-KF-AC algorithm (extended LD Kalman-like adaptive filtering algorithm with automatic optimality control). The advantages of the obtained solution are as follows:

1) the choice of the adaptive filter structure in the form of an extended LD algorithm can significantly reduce the effect of machine roundoff errors on the calculation results when supplemented by the ability to calculate the sensitivity functions by the system vector parameter of the adaptive filter;

2) the application of the API method allows controlling the optimality of the adaptive filter by the condition that the API gradient is zero at the minimum point, which corresponds to the optimal value of the parameter in the adaptive filter;

3) the calculation of the API gradient in the adaptive extended LD filter does not require significant computational costs and such a control method can be carried out in real-time.

The results of the work will be applied to solving problems of joint control and identification of parameters in the class of discrete-time linear stochastic systems represented by equations in the state-space form.

Keywords: automatic optimality control, discrete Kalman filter, auxiliary performance index.

Citation: Semushin I.V., Tsyganova Yu.V., Tsyganov A.V. Application of the auxiliary performance index for automatic optimality control of discrete Kalman filter. *Computational Technologies*. 2020; 25(3):77–87. (In Russ.)

Acknowledgements. The reported study was funded by RFBR and the government of Ul'yanovsk region according to the research projects No. 18-47-730001 and No. 18-41-732002.

References

1. Grewal M.S., Andrews A.P. Kalman filtering: Theory and practice using MATLAB. Second Edition. John Wiley & Sons; 2001: 410.
2. Basseville M., Benveniste A. Detection of abrupt changes in signals and dynamical systems. *Lecture Notes in Control and Inform. Sci.* 1985; (77): 373. DOI: <https://doi.org/10.1007/BFb0006385>
3. Tse L.L. Sequential analysis: Some classical problems and new challenges. *Statistica Sinica*. 2001; 11(1):303–408.
4. Shiryaev A.N. Veroyatnostno-statisticheskie metody v teorii prinyatiya resheniy [Probabilistic Statistical methods in decision making theory]. 2-e izd., novoe. Moscow: MTsNMO; 2014: 144. (In Russ.)
5. Semushin I.V., Tsyganova Yu.V., Kulikova M.V. et al. Adaptivnye sistemy fil'tratsii, upravleniya i obnaruzheniya: kollektivnaya monografiya [Adaptive systems of filtering, control and fault detection]. Ul'yanovsk: UIGU; 2011: 298. (In Russ.)
6. Golovan A.A., Mironovskii L.A. Algorithmic control of a Kalman filter. *Automation and Remote Control*. 1993; 54(7):1183–1194.
7. Semushin I.V. Adaptation in stochastic dynamic systems — Survey and new results II. *Intern. Journal of Communication Network and System Sciences*. 2011; 4(4):266–285.
8. Tsyganova Yu.V. Computing the gradient of the auxiliary quality functional in the parametric identification problem for stochastic systems. *Automation and Remote Control*. 2011; 72(9):1925–1940.
9. Semushin I.V., Tsyganova Yu.V., Tsyganov A.V. Adaptive LD-filter with automatic optimality control by the method of auxiliary performance index. *Proc. of the XIII ALL-Russian Meeting on Control Problems VSPU-2019: Proc.* [Electronic resource] June 17–20, 2019, Moscow. Ed. by D.A. Novikov. Electronic text data (614 files: 217 Mb). Moscow: ICS RAS; 2019:527–531. (In Russ.)
10. Verhaegen M., Van Dooren P. Numerical aspects of different Kalman filter implementations. *IEEE Transactions on Automatic Control*. 1986; AC-31(10):907–917.
11. Tsyganova Yu.V., Tsyganov A.V. On the computation of derivatives within LD factorization of parametrized matrices. *The Bulletin of Irkutsk State Univ. Ser.: Mathematics*. 2018; (23):64–79. (In Russ.)
12. Semushin I.V., Tsyganova J.V., Tsyganov A.V. Numerically efficient LD-computations for the auxiliary performance index based control optimization under uncertainties. *IFAC Papers-Online*. 2018; 51(32):568–573.
13. Golub G., Van Loan C.F. *Matrix Computations*. 3 ed. JHU Press; 1996: 308.
14. Semushin I.V., Tsyganova J.V. Adaptation in stochastic dynamic systems — Survey and new results IV: Seeking minimum of API in parameters of data. *Intern. Journal of Communication Networks and System Sciences*. 2013; (6):513–518.