Вычислительные технологии **Том 4, № 6, 1999**

АНАЛИЗ СЕТЕЙ С ЛОКАЛЬНОЙ И РЕГИОНАЛЬНОЙ ЗАВИСИМОСТЯМИ ВРЕМЕНИ ОБСЛУЖИВАНИЯ ОТ СОСТОЯНИЯ. ТОЧНЫЕ И ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ*

В. Г. Беляков, Н. А. Мирошниченко
Институт горного дела СО РАН
Новосибирск, Россия

This paper develops the methods of analysis of the closed non-homogeneous multiplicative queueing network models providing that service rate in each node is a strictly positive function of two variables: of the total number of customers of different classes in that node and of the total number of customers in the fixed set of service nodes. The basic analytic expressions are derived for convolution, coalesce computation, mean-value analysis, asymptotic expansions and decomposition methods.

Введение

Анализируя достижения, полученные в теории сетей массового обслуживания (СеМО) за последние десятилетия, можно выделить три фазы ее развития: наивную, формальную и критическую.

Наивная фаза охватывает период с середины 1950-х до середины 70-х годов. В это время разрабатываются простейшие сетевые модели (однородные и неоднородные мультипликативные сети), исследуются необходимые и достаточные условия мультипликативности, предпринимаются попытки аппроксимации марковскими сетями сетевых процессов обслуживания общего вида.

Период с конца 1970-х до середины 80-х годов приходится на вторую, формальную, фазу развития, когда предпочтение отдается вычислительным методам СеМО. Стимулом к разработке эффективных вычислительных методов послужили многочисленные приложения СеМО в качестве математических моделей вычислительных сетей и телекоммуникационных систем.

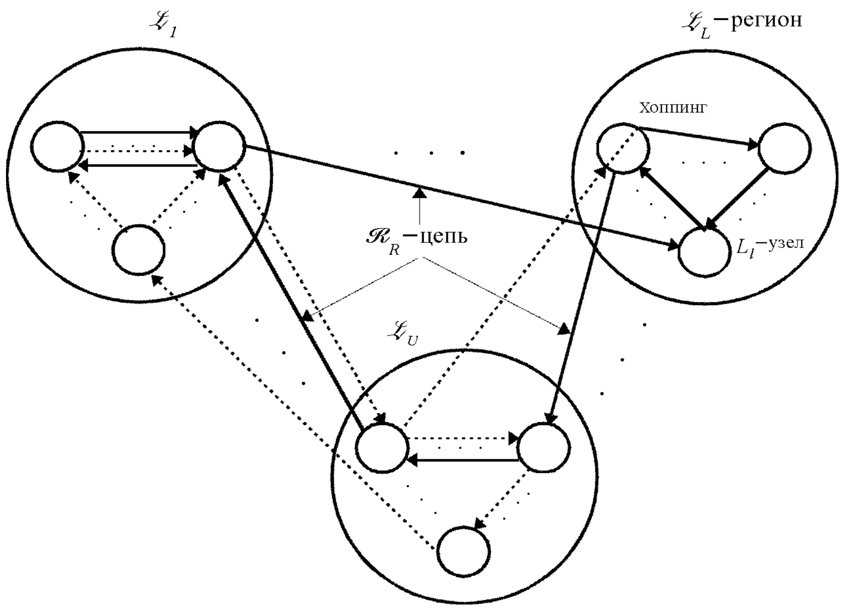
В настоящее время, в критической фазе, переосмысливаются границы применимости сетевых моделей обслуживания, оценивается адекватность их реалистическим постановкам задач системного анализа, исследуются такие тонкие свойства вероятностных процессов в сетях, как квазиобратимость, устойчивость, монотонность, чувствительность, эргодичность. Намечается переход от задач анализа к задачам синтеза и оптимального управления на сетях.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант №98–01–00721.

По своему содержанию данная статья более всего охватывает проблематику второй фазы с тем лишь уточнением, что исследуемый класс сетевых моделей позволяет подняться на новый уровень детализации за счет обеспечения возможности учета взаимного влияния узлов на скорость обработки неоднородных потоков требования. Эта проблема возникает при моделировании таких информационных систем различного назначения, как мобильные сети связи, в которых используются лазерные каналы с рассеянием, системы спутниковой навигации и передачи стандартов времени и частоты, распределенные системы геомониторинга. Отличительные свойства данных систем состоят в том, что они имеют большое число элементов, обменивающихся данными по ненадежным каналам, содержат коалиции функциональных компонентов, объединенных общими ресурсами, характеризуются наличием сложной зависимости производительности от нагрузки и изменением структуры данных в процессе работы.

Остановимся для примера на особенностях работы системы сейсмических наблюдений в структуре геомониторинга. На периферийных станциях геомониторинга должен осуществляться непрерывный автоматический контроль сейсмических сигналов. Метод контроля базируется на использовании сетевого грамматического анализа потоков сегментов сейсмограмм с целью распознавания в них сейсмического шума, случайных выбросов, дребезга и т. д.

На производительность рассредоточенных в пространстве грамматических анализаторов существенное влияние оказывают такие факторы, как зависимость скорости обработки сегментов в узлах грамматической сети от суммарного числа пребывающих в ней сегментов, а также изменение назначения запросов к узлам по мере продвижения сегментов по грамматической сети. Для обеспечения возможности учета подобных особенностей при решении задач типа анализа задержки и оценивания производительности вводятся в рассмотрение ЛРХ-сети (см. рисунок).



Структура ЛРХ-сети.

ЛРХ-сети относятся к классу замкнутых неоднородных мультипликативных СеМО, характеризуемых наличием локальной (Л) зависимости интенсивности обслуживания (от общего числа требований в данном узле); региональной (Р) зависимости интенсивности обслуживания (от общего числа требований в заданном множестве узлов — регионе); хоппинга (Х) требований (изменением классов требований в моменты завершения обслуживания в узлах).

1. Параметры сетевой модели

ЛРХ-сеть определяется следующим образом:

$\mathcal{L} = \{l\}$, $\mathcal{K} = \{k\}$ — множества соответственно узлов и классов требований в сети, $\mathrm{card}\mathcal{L} = M$, $\mathrm{card}\mathcal{K} = K$, $l = \overline{1, M}$, $k = \overline{1, K}$;

$\{\mathcal{L}_L\}$ — разбиение $\mathcal{L}$ на подмножества узлов $\mathcal{L}_L$ (регионы) такие, что обслуживание в l-узле, $l \in \mathcal{L}_L$, может зависеть от текущего суммарного числа требований $\bar{n}_L$ в узлах из данного $\mathcal{L}_L$, $\mathrm{card}\mathcal{L}_L = u_L$, $\sum_L u_L = M$, $L = \overline{1, U}$;

$\{\mathcal{K}_R\}$ — разбиение $\mathcal{K}$ на подмножества классов $\mathcal{K}_R$ (цепи) такие, что любой k-класс, $k \in \mathcal{K}_R$, достижим в результате хоппинга любым q-классом из данной $\mathcal{K}_R$, $\mathrm{card}\mathcal{K}_R = \nu_R$, $\sum_R \nu_R = K$, $R = \overline{1, V}$;

$\Theta_{lk;sq}$ — вероятность перехода в s-узел требований k-класса после обслуживания в l-узле с изменением класса на q-й, $l, s = \overline{1, M}$, $k, q = \overline{1, K}$ ($\Theta_{lk;sq} = 0$, если k- и q-классы не принадлежат одной цепи);

$\mu_{L_l k}(\bar{n}_{L_l}, \bar{n}_L) = \alpha_{L_l}(\bar{n}_{L_l})\beta_L(\bar{n}_L)m_{L_l k}$ — интенсивность обслуживания требований k-класса в L_l-узле при условии, что $\bar{n}_{L_l}$ требований пребывает в данном узле и $\bar{n}_L$ требований — в регионе $\mathcal{L}_L$, α_{L_l} и β_L — соответственно локальная и региональная функции интенсивности, $m_{L_l k}$ — уровень интенсивности обслуживания, $n_{L_l k}$ — число требований k-класса в L_l-узле;

N_R — постоянное число требований в цепи $\mathcal{K}_R$;

D_l — дисциплина обслуживания в l-узле.

Всюду по тексту символ с верхней чертой означает сумму всех компонент соответствующего вектора (октаэдральную норму):

$$\bar{n}_{L_l} = \sum_k n_{L_l k}, \quad \bar{n}_L = \sum_{l,k} n_{L_l k}, \quad l = \overline{1, u_L}, \quad k = \overline{1, K}.$$

Кроме того, используются обозначения вида:

$$n_{L_l}! = \prod_k n_{L_l k}!, \quad x_{L_l}^{n_{L_l}} = \prod_k x_{L_l k}^{n_{L_l k}}, \quad k = \overline{1, K}.$$

В рамках общей модели ЛРХ-сети могут быть описаны всевозможные частные случаи, например, сеть с приоритетным обслуживанием, когда множество цепей разбивается на подмножества с закрепленным для каждого подмножества уровнем абсолютного приоритета, или сеть с управлением, когда в качестве функций интенсивности α_{L_l} и β_L используется семейство соответственным образом выбранных ступенчатых функций.

Как и для всякой мультипликативной сети, для рассматриваемой ЛРХ-сети свойство мультипликативности стационарного распределения вероятностей числа требований по узлам является инвариантным относительно типов функций распределения длительности обслуживания в узлах (на некотором фиксированном множестве значений дисциплин обслуживания в узлах).

Все известные методы анализа стационарного состояния СеМО и соответствующие им вычислительные алгоритмы являются чувствительными к факту зависимости интенсивностей обслуживания в узлах от текущего состояния сети. Исторически развиваясь из методов анализа СеМО с постоянными интенсивностями обслуживания, данные методы в одних случаях критичны к размерности сети (методы конволюции, анализа средних значений), в других — ограничены по спектру допустимых зависимостей обслуживания от состояния сети (методы соединенных вычислений, асимптотического разложения, лучевой аппроксимации), и наконец — подчинены дополнительным ограничениям на множества возможных значений сетевых параметров (методы декомпозиции, диффузионной аппроксимации).

Как известно, с учетом свойства мультипликативности ЛРХ-сети ненормированное стационарное распределение вероятностей числа требований $n_L = [n_{L_l k}]$ региона $\mathcal{L}_L$ представляется в виде:

$$f_L(n_L) = B_L(\bar{n}_L) \prod_{l=1}^{u_L} A_{L_l}(\bar{n}_{L_l}) \frac{\bar{n}_{L_l}!}{n_{L_l}!} x_{L_l}^{n_{L_l}} = B_L(\bar{n}_L) \prod_{l=1}^{u_L} \varphi_{L_l}(n_{L_l}) x_{L_l}^{n_{L_l}}, \tag{1}$$

где

$$A_{L_l}(\bar{n}_{L_l}) = \prod_{\nu=1}^{\bar{n}_{L_l}} [\alpha_{L_l}(\nu)]^{-1}, \;\; B_L(\bar{n}_L) = \prod_{\nu=1}^{\bar{n}_L} [\beta_L(\nu)]^{-1}, \;\; \varphi_{L_l}(n_{L_l}) = A_{L_l}(\bar{n}_{L_l}) \frac{\bar{n}_{L_l}!}{n_{L_l}!},$$

$x_{L_l k} = e_{L_l k}/m_{L_l k}$, $e_R = [e_{L_l R_r}]$ — вектор коэффициентов передачи для цепи $\mathcal{K}_R$, определяемый как решение уравнения баланса $e_R T_R = e_R$ для марковской цепи, описывающей перемещение требований по узлам сети, $L, S = \overline{1, U}$, $l = \overline{1, u_L}$, $s = \overline{1, u_S}$, $r, t = \overline{1, \nu_R}$, $T_R = [\Theta_{L_l R_r; S_s R_t}]$.

Стационарное распределение вероятностей состояния мультипликативной ЛРХ-сети

$$P(n) = [G(N, M)]^{-1} \prod_{L=1}^{U} B_L(\bar{n}_L) \prod_{L=1}^{u_L} \varphi_{L_l}(n_{L_l}) x_{L_l}^{n_{L_l}},$$

где $G(N, M)$ — нормализующая константа,

$$G(N, M) = \sum_{n \in \sigma(N, M)} \prod_{L=1}^{U} B_L(\bar{n}_L) \prod_{l=1}^{u_L} \varphi_{L_l}(n_{L_l}) x_{L_l}^{n_{L_l}}, \tag{2}$$

определяемая на пространстве состояний сети:

$$\sigma(N, M) = \big\{ n = [n_{L_l R_r}] | n_{L_l R_r} \geq 0, \sum_{L_l} \sum_{r \in Q_{L_l R}} n_{L_l R_r} = N_R, \;\; R = \overline{1, V} \big\},$$

$Q_{L_l R} \subseteq \mathcal{K}_R$ — множество классов из $\mathcal{K}_R$, для которых доступен L_l-узел.

В статье особое внимание уделяется получению точных и приближенных аналитических результатов для совместных и маргинальных распределений вероятностей состояния ЛРХ-сети, соответствующих известным методам анализа СеМО. Вследствие того что совместные и маргинальные распределения вероятностей ($P(n)$, $P(n_L)$, $P(n_{L_l k})$, $\ldots$), а также моменты распределения и связанные с ними характеристики сети представляются через систему функций разбиения типа $G(\eta, m)$, $\eta \leq N$, $m \leq M$ (2), полученные результаты имеют отношение к методам вычисления прежде всего вышеупомянутой системы функций $\{G(\eta, m)\}$.

Рамки журнальной публикации позволяют сформулировать лишь важнейшие результаты, полученные авторами в области вычислительных методов ЛРХ-сетей. Они представлены в виде нижеописанных утверждений 1 – 6.

Утверждение 1 [метод конволюции]. *Имеет место следующая рекуррентная формула*:

$$g(\nu, L) = \sum_{\eta_L \in \xi(\nu, R)} B_L(\eta_L) G_L(\eta_L, u_L) g(\nu - \eta_L, L-1), \tag{3}$$

$$g(N, U) = G(N, M),$$

где

$$G_L(\eta_L, u_L) = \sum_{\eta_L \in \sigma(\eta_L, u_L)} \prod_{l=1}^{u_L} \varphi_{L_l}(n_{L_l}) x_{L_l}^{n_{L_l}}, \quad g(\nu, 0) = \begin{cases} 1, & \nu = [O_R], \\ 0, & \nu > [O_R], \end{cases}$$

$$\nu = [\nu_R], \quad \eta_L = [\eta_{LR}], \quad \xi(\nu, R) = \{\eta_L |\, 0 \le \eta_{LR} \le \nu_R,\ R = \overline{1, V}\}.$$

Конволюционная схема расчета СеМО, подобная [1], на основе использования системы функций разбиения типа (2), определенных на некоторых $\sigma(\eta, m)$, $\eta \le N$, ($\eta_R \le N_R$, $R = \overline{1, V}$), $m \le M$, применима теоретически для любых положительных действительных матриц $\alpha = [\alpha_{L_l}(\nu)]$, $\beta = [\beta_L(\nu)]$, $\nu = \overline{0, \bar{N}}$, $L = \overline{1, U}$, $l = \overline{1, u_L}$.

Утверждение 2 [метод соединенных вычислений]. *Для ЛХ-сети имеет место следующая рекуррентная формула:*

$$G(N, M) = \frac{1}{N_R} \sum_{\nu \in \xi(N - \Delta_R, R)} J_R(\nu, M)\, G(N - \Delta_R - \nu, M),$$

где $J_R(\nu, M)$ — оригинал, соответствующий изображению

$$\mathcal{H}_{LR}(z) = \frac{1}{h_L(z)} \frac{\partial h_L(z)}{\partial z_R},$$

в котором z-преобразование

$$h_L(z) = \sum_{m=0}^{\infty} B_L(m) \left(\sum_{l=1}^{u_L} \sum_{R=1}^{V} Z_R \sum_{k \in \mathcal{K}_R} x_{L_l k} \right)^m$$

представимо в конечном виде через элементарные и специальные функции в том случае, когда все локальные функции интенсивности $\alpha_{L_l}(m)$, $L = \overline{1, U}$, $l = \overline{1, u_L}$ принадлежат фиксированному множеству $\mathcal{T}$:

$$\mathcal{T} = \Big\{ \delta_m \tau^m \prod_{j=1}^{q} z_m^{i_j},\ i_j = \pm 1,\ \ \lambda_m^{q_1} \tau_m^{q_2} s_m / s_{m+1},\ \ z_m / (\lambda_m^2 + 1/s_m),\ \ \lambda_m (1 + \lambda_m^{q_1} / s_m^{q_2}),\ \ c_{m0} / (c_{m1} \tau_m^q),$$

$$\prod_{j=1}^{q} (1 + \lambda_{mj})^{-1},\ \ \lambda_{m1} (\lambda_{m1} + q) / (1 + 1/m)^{\lambda_{m2}},\ \ \lambda_m / \lambda_{m1},\ \ 1/\tau_m^2,\ \ \lambda_m \sqrt{\tau_m} \Big\}, \tag{4}$$

здесь

$$s_m = \sum_{j=1}^{p_m} (p_1 j + p_2)^r, \quad c_{mp} = \sum_{j=0}^{p_1} p_{2j} (m + p)^j, \quad z_m = \prod_{j=1}^{p_1} (p_1 m + p_2 + j),$$

$$\lambda_m = p_1 + t, \quad \tau_m = 1 + 1/\lambda, \quad \delta_m = d(m)/d(m+1),$$

p, q, r — целые, t — целое или действительное число, $p, t \geq 0$, $d(m)$ — действительная функция натурального аргумента m. Кроме того, используются следующие обозначения:

$$\Delta_R = [\delta_{RP}], \quad P = \overline{1, V}, \quad \delta_{RP} \text{ — },$$

$$\nu_L = [\nu_{LR}], \;\; z = [z_R], \;\; R = \overline{1, V}, \;\; \nu_{LR} = \sum_{l=1}^{u_L} \sum_{k \in \mathcal{K}_R} n_{L_l k}, \;\; |z| < 1.$$

Возможно расширение данного результата на класс ЛРХ-сетей при определенных ограничениях на локальную зависимость. В частности, если в качестве $A_{L_l}(\bar{n}_{L_l})$ использовать функции

$$A_{L_l}(\bar{n}_{L_l}) = \{(\bar{n}_L!)^{c_{L_l}}/\bar{n}_{L_l}!\}, \; \{[\prod_{s=1}^{\bar{n}_{L_l}}(s + \sum_{m=1}^{l-1} \bar{n}_{L_l})]/\bar{n}_{L_l}!\}, \quad \sum\nolimits_l c_{L_l} = 1, \quad l = \overline{1, u_L},$$

то в качестве региональных функций β_L можно выбирать элементы из $\mathcal{T}$ (4).

Суть метода соединенных вычислений состоит в том, что здесь вместо структурных элементов типа функций разбиения $g(\nu, L)$ (3), связанных с отдельными узлами, вводятся элементы h_L, соответствующие целым регионам. Для этого пришлось отказаться от возможности использования в качестве α и β любых положительных действительных функций целочисленного аргумента, а ограничиться некоторым фиксированным множеством $\mathcal{T}$ (4). Другая сложность связана с необходимостью инвертирования z-преобразования $\mathcal{H}_{LR}(z)$.

В конкретных случаях данный метод позволяет на порядок по сравнению с методом конволюции повысить насыщенность сети $N = [N_R]$ [2].

Утверждение 3 [метод анализа средних]. *В ЛРХ-сети с насыщенностью $\nu = [\nu_R]$, $R = \overline{1, V}$ для совместного распределения вероятностей $P(\bar{n}_{L_l}; \bar{n}_L|\nu)$ и математического ожидания длительности пребывания требований k-класса, $k \in \mathcal{K}_R$, в L_l-узле $Eu_{L_l k}(\nu)$ имеют место рекуррентные формулы:*

$$P(\bar{n}_{L_l}; \bar{n}_L|\nu) = \frac{1}{\alpha_{L_l}(\bar{n}_{L_l})\beta_L(\bar{n}_L)} \sum_{R,k} \frac{\lambda_{L_l}(\nu)}{m_{L_l k}} P(\bar{n}_{L_l} - 1; \bar{n}_L - 1|\nu - \Delta_R), \tag{5}$$

$$Eu_{L_l k}(\nu) = \frac{1}{m_{L_l k}} \sum_{\bar{n}_L=1}^{\bar{N}} \frac{1}{\beta_L(\bar{n}_L)} \sum_{\bar{n}_{L_l}=1}^{\bar{n}_L} \frac{\bar{n}_{L_l}}{\alpha_{L_l}(\bar{n}_{L_l})} P(\bar{n}_{L_l} - 1; \bar{n}_L - 1|\nu - \Delta_R), \tag{6}$$

где $\lambda_{L_l k}(\nu)$ — интенсивность входящего в L_l-узел потока требований k-класса:

$$\lambda_{L_l k}(\nu) = \nu_R / \sum_{S_s, q} \frac{e_{S_s q}}{e_{L_l k}} Eu_{S_s q}(\nu),$$

$$S = \overline{1, U}, \quad s = \overline{1, u_S}, \quad R = \overline{1, V}, \quad k, q \in \mathcal{K}_R, \quad (S_s, q) \neq (L_l, k). \tag{7}$$

Непосредственно используя подходы из [1], можно показать, что итеративный процесс по ν (ν=$[O_R]$, $[O_R + \delta_{VR}], \ldots,$ $[N_R - \delta_{1R}]$, $[N_R]$) решения системы уравнений (5)–(7) упрощается для ЛХ-сети, состоящей из l-узлов, $l = \overline{1, M}$, следующих типов: одноприборные узлы с постоянными интенсивностями обслуживания ($w_l = 1$, $\alpha_l(\bar{n}_l) \equiv 1 \to Eu_{lk}(\nu) = [1 + E\bar{n}_l(\nu - \Delta_R)]/m_{lk}$); узлы с неограниченным числом приборов ($w_l = \bar{\nu}$, $\alpha_l(\bar{n}_l) = \bar{n}_l \to$

$Eu_{lk}(\nu) = 1/m_{lk}$); многоприборные узлы ($1 < w_l < \bar{\nu}$, $\alpha_l(\bar{n}_l) = \min(\bar{n}_l, w_l) \to Eu_{lk}(\nu) = [1 + E\bar{n}_l(\nu - \Delta_R) + \sum_z (w_l - z)P_l(z-1|\nu - \Delta_R)]/(m_{lk}w_l)$, $z = \overline{1, w_l}$); одноприборные узлы с дробно-линейными локальными функциями интенсивности ($w_l = 1$, $\alpha_l(\bar{n}_l) = \bar{n}_l/(a_l + b_l\bar{n}_l)$, $a_l, b_l > 0 \to Eu_{lk}(\nu) = [a_l + b_l + b_l E\bar{n}_l(\nu - \Delta_R)]/m_{lk}$).

Очевидно, данный метод не столь критичен к росту насыщенности N, как предыдущие. Однако, как показывает опыт, в практических задачах математического моделирования телекоммуникационных сетей насыщенность даже в несколько тысяч требований, разбитых на сотни классов, не является предельной. В этих случаях на помощь приходит метод асимптотического разложения, который позволяет получить представление функций разбиения в виде разложения по степеням некоторого большого параметра Z, пропорционального размерности сети.

Важным ограничением на конфигурацию ЛРХ-сети в данном методе является обязательное наличие узла с бесконечным числом приборов в каждой замкнутой цепи $\mathcal{K}_R$ сети. Это обеспечивает сходимость пропускной способности цепи при бесконечном увеличении числа требований в ней. Таким образом, каждый L_l-узел ЛРХ-сети может иметь одну из двух дисциплин обслуживания: $D_{L_l} = FCFS$ (обслуживание в порядке поступления — First-Come-First-Served) или $D_{L_l} = IS$ (обслуживание бесконечным числом приборов — Infinite-Servers).

Предварительно разобьем множество $\{L_l\}$ $L = \overline{1, U}$, $l = \overline{1, u_L}$, на три подмножества:

$$\mathcal{M}_1 = \{L_l,\ L = \overline{1, U-2},\ l = \overline{1, u_L} \,|\, \mu_{L_l k} = \alpha_{L_l}(n_{L_l})\beta_L(\bar{n}_L)m_{L_l},\ D_{L_l} = FCFS\},$$

$$\mathcal{M}_2 = \{L_l,\ L = U-1,\ l = \overline{1, u_L} \,|\, \mu_{L_l k} = m_{L_l},\ D_{L_l} = FCFS\},$$

$$\mathcal{M}_3 = \{L_l,\ L = U,\ l = \overline{1, u_L} \,|\, \mu_{L_l k} = n_{L_l k}m_{L_l k},\ D_{L_l} = IS\},$$

и в соответствии с данным разбиением введем следующие переменные:

$$X_{1R}(t) = \sum_{L_l \in \mathcal{M}_1} t_{L_l} \sum_{k \in \mathcal{K}_R} x_{L_l k}, \quad X_{2R}(\tau) = \sum_{L_l \in \mathcal{M}_2} \tau_{L_l} \sum_{k \in \mathcal{K}_R} x_{L_l k}, \quad X_{3R} = \sum_{L_l \in \mathcal{M}_1} \sum_{k \in \mathcal{K}_R} x_{L_l k},$$

$$C(N, t, \tau) = \prod_{R=1}^{V} [X_{1R}(t) + X_{2R}(\tau) + X_{3R}]^{N_R}, \quad C^{(\nu)}(N, 0, \tau) = \frac{\partial^\nu}{\partial t^\nu} C(N, t, \tau)_{|t=0},$$

где $t = [t_{L_l}]$ и $\tau = [\tau_{Q_q}]$ — действительные, а $\nu = [\nu_{L_l}]$ — целочисленные векторы $L_l \in \mathcal{M}_1$, $Q_q \in \mathcal{M}_2$, $\mathcal{M}_{12} = \mathcal{M}_1 \bigcup \mathcal{M}_2$.

Утверждение 4 [интегральное представление функции разбиения $G(N, M)$]. *Для нормализующей константы $G(N, M)$ ЛРХ-сети имеет место интегральное представление*

$$G(N, M) = \frac{1}{N!} \int\limits_{\tau \geq 0} e^{-\bar{\tau}} \sum_{\bar{\nu}=0}^{\bar{N}} \sum_{\nu \in \zeta(\bar{\nu}, \bar{u})} \{ \prod_{L=1}^{U-2} B_L(\bar{\nu}_L) \prod_{l=1}^{u_L} A_{L_l}(\nu_{L_l}) \} C^{(\nu)}(N, 0, \tau) d\tau,$$

$$\zeta(\bar{\nu}, \bar{u}) = \big\{\nu = [\nu_{L_l}],\ L = \overline{1, U-2},\ l = \overline{1, u_L} \,|\, \nu_{L_l} \geq 0,\ \sum_{L_l \in \mathcal{M}_1} \nu_{L_l} = \bar{\nu}\big\}, \quad \bar{u} = \sum_{L=1}^{U-2} u_L. \qquad (8)$$

Таким образом, осуществлен переход к известной схеме, основанной на асимптотическом разложении интегрального представления (8) [3].

Предварительно определим параметр Z, характеризующий размерность сети, и параметры ω_{L_l}, характеризующие степень загрузки L_l-узлов:

$$Z = \max_{L_l, R} X_{3R} / \sum_{k \in \mathcal{K}_R} x_{L_l k}, \quad L_l \in \mathcal{M}_{12}, \ \ R = \overline{1, V},$$

$$\omega_{L_l} = 1 - \frac{\bar{\omega}_{L_l} \sum\limits_{k=1}^{K} e_{L_l k}}{X_{3R_{|k \in \mathcal{K}_R}}}, \quad \bar{\omega}_{L_l} = \begin{cases} m_{L_l}^{-1} \lim\limits_{a,b \to \infty} [\alpha_{L_l}(a)]^{-1} [\beta_L(b)]^{-1}, \text{ если } L_l \in \mathcal{M}_1, \\ m_{L_l}^{-1}, \text{ если } L_l \in \mathcal{M}_2, \end{cases}$$

а также функцию $\gamma_{L_l}(\bar{n}_{L_l})$ как мультипликативную компоненту $f_L(n_L)$ (1), связанную с L_l-узлом, ее преобразование $\hat{\gamma}_{L_l}(\bar{n}_{L_l})$ и функцию $g(\mathcal{N}, \bar{u})$ типа функции разбиения (3):

$$\gamma_{L_l}(\bar{n}_{L_l}) = \bar{n}_{L_l}! A_{L_l}(\bar{n}_{L_l}) \prod_{t=1}^{\bar{n}_{L_l}} [\beta_L(s_{L_l} + 1)]^{-1}, \quad s_{L_l} = \sum_{t=1}^{l-1} \bar{n}_{L_l}, \quad L_l \in \mathcal{M}_1,$$

$$\hat{\gamma}_{L_l}(\bar{n}_{L_l}) = \sum_{t=0}^{\infty} \gamma_{L_l}(\bar{n}_{L_l} + t)(1 - \omega_{L_l})^t / t!, \quad L_l \in \mathcal{M}_1,$$

$$g(\mathcal{N}, \bar{u}) = \sum_{n \in \sigma(\mathcal{N}, \bar{u})} \prod_{L_l \in \mathcal{M}_{12}} \rho_{L_l}(\bar{n}_{L_l}) \prod_{R,k} \frac{z_{L_l k}^{n_{L_l k}}}{n_{L_l k}!}, \quad R = \overline{1, V}, \ k \in \mathcal{K}_R, \tag{9}$$

где

$$z_{L_l k} = Z x_{L_l k} / X_{3R}, \quad \rho_{L_l}(\bar{n}_{L_l}) = \begin{cases} \hat{\gamma}_{L_l}(\bar{n}_{L_l}), \text{ если } L_l \in \mathcal{M}_1, \\ \bar{n}_{L_l}!, \text{ если } L_l \in \mathcal{M}_2. \end{cases}$$

Утверждение 5. *Если в ЛРХ-сети для всех L_l-узлов, $L_l \in \mathcal{M}_{12}$, при $N_R \to \infty$, $R = \overline{1, V}$ выполняется условие $\omega_{L_l} > 0$, то справедливо асимптотическое разложение*

$$G(N, M) \approx \frac{X_3^N}{N!} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\mathcal{G}_i}{Z^i},$$

в котором $\mathcal{G}_i$ представляются как линейные комбинации функций разбиения типа (9):

$$\mathcal{G}_i = \sum_{j=1}^{a_i} b_{ij} \sum_{k=1}^{i} \sum_{R_1, \ldots, R_k} \left\{ \prod_{l=1}^{k} \frac{N_{R_l}}{z} \right\} g\left(\sum_{m=1}^{k} c_{jm} \Delta_{R_m}, \bar{u} \right), \quad \sum_m c_{jm} \le 2i,$$

$$\Delta_{R_m} = [\delta_{R_m R}], \quad R = \overline{1, V}, \quad R_1, \ldots, R_k = \overline{1, V}.$$

В случае, когда доминирующим параметром, определяющим размерность пространства состояний (2) конкретной сетевой модели, является не насыщенность N, а число узлов M, эффективной в вычислительном отношении является декомпозиция ЛРХ-сети на основе теории укрупнения марковских цепей при известных ограничениях на интенсивность обмена требованиями между регионами [4].

Пусть $\Pi =< \alpha, \beta, m, T >$ — четверка введенных выше параметров исходной СеМО, обозначаемой далее как $\Gamma(N, M, \Pi)$. Предполагая заданной структуру региональной зависимости интенсивности обслуживания, рассмотрим совокупность замкнутых сетей

$\Gamma^*_L(\eta_L, u_L, \Pi^*_L)$, $l = \overline{1,U}$ и $\hat\Gamma(N, M, \hat\Pi)$, для которых соответствующие четверки определяются следующим образом ($t = \overline{1, u_L}$, $s = \overline{1,U}$, $c, k, q = \overline{1,K}$):

$$\alpha^*_{L_l}(\nu) = \alpha_{L_l}(\nu),\ \ \beta^*_L(\nu) \equiv 1,\ \ m^*_{L_lk} = \beta_L(\bar\eta_L)m_{L_lk}, \quad \Theta^*_{L_lk;L_sq} = \frac{\Theta_{L_lk;L_sq}}{\sum\limits_{t,c}\Theta_{L_lk;L_tc}},$$

$$\hat\alpha_L(\bar{\mathcal{N}}_L) = \frac{\hat\omega_{Lk;Sq}(\bar{\mathcal{N}}_L)}{\hat\omega_{Lk;Sq}(1)},\ \ \hat\beta(\bar N) \equiv 1,\ \ \hat m_{Lk} = \sum_{S,q}\hat\omega_{Lk;Sq}(1), \quad \hat\Theta_{Lk;Sq} = \frac{\hat\omega_{Lk;Sq}(1)}{\sum\limits_{S,q}\hat\omega_{Lk;Sq}(1)}, \qquad (10)$$

где функции $\hat\omega_{Lk;Sq}(\bar{\mathcal{N}}_L)$, используемые в выражениях для параметров сети $\hat\Gamma(N, M, \hat\Pi)$ (10), вычисляются посредством стационарных распределений вероятностей $P^*_{L_l}(\nu|\eta_L)$ числа требований ν в L_l-узле сети $\Gamma^*_L(\eta_L, u_L, \Pi^*_L)$ с насыщенностью η_L:

$$\hat\omega_{Lk;Sq}(\bar{\mathcal{N}}_L) = \sum_{\eta_L\in\zeta(\bar{\mathcal{N}}_L,V)}\beta_L(\bar{\mathcal{N}}_L)\sum_{l=1}^{u_L}\sum_{\nu=1}^{\bar{\mathcal{N}}_L}P^*_{L_l}(\nu|\eta_L)\alpha_{L_l}(\nu)m_{L_lk}\sum_{s=1}^{u_S}\Theta_{L_lk;L_sq}.$$

Без потери общности предположим, что все сети Γ, Γ^*_L и $\hat\Gamma$ имеют эквивалентные разбиения $\{\mathcal{K}_R\}$, $R = \overline{1,V}$, множества классов требований, и определим:

$$\hat s(\eta, K) = \{\mathcal{N} = [\mathcal{N}_{Lk}]\,|\,\mathcal{N}_{Lk} \ge 0, \sum_{k\in\mathcal{K}_R}\mathcal{N}_{Lk} = \eta_{LR},\ L = \overline{1,U},\ R = \overline{1,V}\}.$$

Утверждение 6. *Если для всех* $n \in \sigma(N, M)$ *матрицы* $\Omega(n) = [\omega_{L_lk;S_sq}(\bar n_{L_l}, \bar n_L)]$, $\omega_{L_lk;S_sq}(\bar n_{L_l}, \bar n_L) = \mu_{L_lk}(\bar n_{L_l}, \bar n_L)\Theta_{L_lk;S_sq}$ $(L, S = \overline{1,U},\ l = \overline{1,u_L},\ s = \overline{1,u_S},\ k, q = \overline{1,K})$ *имеют почти блочно-диагональную структуру:*

$$\sum_{s=\overline{1,u_L},q=\overline{1,K}}\omega_{L_lk;S_sq}(\bar n_{L_l}, \bar n_L) >> \sum_{\substack{S=\overline{1,U},s=\overline{1,u_S},\\ q=\overline{1,K},S\ne L}}\omega_{L_lk;S_sq}(\bar n_{L_l}, \bar n_L), \qquad (11)$$

то стационарные распределения вероятностей состояний исходной сети $\Gamma(N, M, \Pi)$ *представляются через стационарные распределения вероятностей состояний сетей* $\Gamma^*_L(\eta_L, u_L, \Pi^*_L)$ *и* $\hat\Gamma(N, M, \hat\Pi)$ *в виде*

$$P(n) = \sum_{\substack{\eta\in\vartheta(N,U),\\ \mathcal{N}\in\hat s(\eta,K)}}\hat P(\mathcal{N})\prod_{L=1}^{U}P^*_L(n_L|\eta_L) + o(\epsilon),$$

где ϵ *равно максимуму правой части неравенства (11) по всем парам* $(L_l, k) \in \mathcal{L}\times\mathcal{K}$ *и состояниям* $n \in \sigma(N, M)$.

В заключение отметим следующее.

1. Необходимость разработки широкого спектра вычислительных методов ЛРХ-сетей вызвана стремлением охватить круг задач, возникающих при моделировании телекоммуникационных систем и вычислительных сетей. При этом методы конволюции, анализа средних и декомпозиции позволяют исследовать ЛРХ-сети с локальными и региональными функциями интенсивности обслуживания общего вида, методы соединенных вычислений

и декомпозиции — ЛРХ-сети с большим числом узлов M, а методы асимптотического разложения и приближенного анализа средних — ЛРХ-сети с большой насыщенностью N и большим числом классов требований K и уровней абсолютных приоритетов P. Что касается методической погрешности, то, как следует из содержания статьи, она равна нулю для методов конволюции, соединенных вычислений и анализа средних, имеет известную аналитическую оценку для методов асимптотического разложения и декомпозиции и является статистической для приближенного метода анализа средних.

2. По методам анализа СеМО, развитым в данной статье применительно к ЛРХ-сетям, имеется обширная библиография, которая в достаточно полном объеме представлена и классифицирована, например, в [5]. Таким образом, соотнесение в тексте полученных авторами результатов с известными вычислительными методами фактически играет роль дополнительной ссылки на соответствующий библиографический материал.

Список литературы

[1] Митрофанов Ю. И., Беляков В. Г. К исследованию замкнутых сетей массового обслуживания большой размерности. *Автоматика и телемеханика*, №7, 1981, 61–69.

[2] Dai T. V. An analysis of closed queueing networks with product form solution. *INFOR*, **27**, No. 3, 1989, 360–373.

[3] Mitra D., McKenna J. Asymptotic expansions for closed markovian networks with state-dependent service rates. *J. ACM*, **33**, No. 3, 1986, 568–592.

[4] Митрофанов Ю. И., Беляков В. Г. Метод декомпозиции при моделировании вычислительных структур. В кн.: “Вопросы кибернетики. Процессы адаптации в информационно-вычислительных сетях”. ВИНИТИ, М., 1982, 97–115.

[5] Уолрэнд Дж. Введение в теорию сетей массового обслуживания. Мир, М., 1993.

Поступила в редакцию 30 ноября 1998 г.,
в переработанном виде 12 мая 1999 г.