

Модель вскипающей жидкости

В. С. СУРОВ

Южно-Уральский государственный университет (НИУ), Челябинск, Россия

Контактный автор: Суров Виктор С. e-mail: surovvictor@gmail.com

Поступила 28 февраля 2019 г., доработана 9 октября 2019 г., принята в печать 24 октября 2019 г.

Представлена модель вскипающей жидкости, построенная на базе ранее предложенной автором обобщенно-равновесной модели смеси. В модели учтена сжимаемость жидкой фракции. Проведен характеристический анализ уравнений модели и показана их гиперболичность. Приведены расчетные формулы узлового метода характеристик, с использованием которого рассчитано течение при распаде произвольного разрыва во вскипающей жидкости.

Ключевые слова: односкоростная многокомпонентная смесь, фазовые превращения, гиперболическая система уравнений, узловой метод характеристик.

Цитирование: Суров В.С. Модель вскипающей жидкости. Вычислительные технологии. 2020; 25(1):39–48.

Введение

Взрывное вскипание жидкости, возникающее при резком падении давления, представляет теоретический и практический интерес в связи с возрастающими требованиями к обеспечению безопасности энергетических установок. Работы по исследованию течений вскипающей жидкости описаны в [1]. В рамках различных моделей численно исследовалось явление взрывного вскипания жидкости при снижении давления [2–6].

В работе представлена модель вскипающей жидкости, построенная на базе односкоростной гиперболической двухтемпературной модели из [7], с использованием которой проведен ряд расчетов. Показано, что при включении в обобщенно-равновесную (ОР) модель смеси фазовых превращений тип системы уравнений не меняется — она остается гиперболической. А это дает возможность при интегрировании уравнений использовать хорошо зарекомендовавшие себя численные методы решения гиперболических систем. В данной работе при интегрировании уравнений модели смеси применялся узловой метод характеристик (УМХ) [8, 9]. Использование УМХ дает возможность проводить расчеты при числах Куранта, превосходящих единицу. Кроме того, отметим, что описанный в работе одномерный УМХ естественным образом обобщается на многомерный случай, если применить процедуру расщепления по пространственным направлениям [10]. В качестве уравнений состояния воды и водяного пара использовались соотношения из [11, 12].

1. Модель вскипающей жидкости

Уравнения, описывающие одномерное течение парожидкостной смеси при наличии фазовых превращений в дивергентной форме, имеют вид

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \alpha_{st} \rho_{st}^0}{\partial t} + \frac{\partial \alpha_{st} \rho_{st}^0 u}{\partial x} &= J_m, & \frac{\partial \alpha_{st} \rho_{st}^0 u}{\partial t} + \frac{\partial \alpha_{st} (p + \rho_{st}^0 u^2)}{\partial x} &= f + J_m u, \\
\frac{\partial \alpha_{st} \rho_{st}^0 e_{st}}{\partial t} + \frac{\partial \alpha_{st} (p + \rho_{st}^0 e_{st}) u}{\partial x} &= f u + J_m e_{liq}, \\
\frac{\partial \alpha_{liq} \rho_{liq}^0}{\partial t} + \frac{\partial \alpha_{liq} \rho_{liq}^0 u}{\partial x} &= -J_m, & \frac{\partial \alpha_{liq} \rho_{liq}^0 u}{\partial t} + \frac{\partial \alpha_{liq} (p + \rho_{liq}^0 u^2)}{\partial x} &= -f - J_m u, \\
\frac{\partial \alpha_{liq} \rho_{liq}^0 e_{liq}}{\partial t} + \frac{\partial \alpha_{liq} (p + \rho_{liq}^0 e_{liq}) u}{\partial x} &= -f u - J_m e_{liq},
\end{aligned} \tag{1}$$

где J_m — интенсивность парообразования на единицу объема смеси; $e_k = \varepsilon_k + \frac{1}{2}u^2$ — удельная полная энергия k -й фракции ($k = st, liq$); $\varepsilon_{st} = \varepsilon_{st}(p, \rho_{st}^0)$ и $\varepsilon_{liq} = \varepsilon_{liq}(p, \rho_{liq}^0)$ — удельные внутренние энергии пара и жидкой фракции; f — плотность силы межфракционного взаимодействия [7], которая заранее неизвестна и определяется в процессе интегрирования системы (1). Заметим, что если в (1) опустить силы межфракционного взаимодействия, то система теряет свойство гиперболичности. Если просуммировать соответствующие законы сохранения по составляющим смесь фракциям, то получим законы сохранения массы, импульса и энергии для смеси в целом

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial (p + \rho u^2)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \rho e}{\partial t} + \frac{\partial (p + \rho e) u}{\partial x} = 0, \tag{2}$$

где $\rho = \alpha_{st} \rho_{st}^0 + \alpha_{liq} \rho_{liq}^0$ — плотность смеси; $e = \varepsilon + \frac{1}{2}u^2$ и $\varepsilon = \frac{1}{\rho}(\alpha_{st} \rho_{st}^0 \varepsilon_{st} + \alpha_{liq} \rho_{liq}^0 \varepsilon_{liq})$ — удельные полная и внутренняя энергии смеси. Уравнения (2) в квазилинейной форме имеют вид

$$\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{Du}{Dt} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad \frac{D\varepsilon}{Dt} - \frac{p}{\rho^2} \frac{D\rho}{Dt} = 0,$$

где $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x}$. Соответствующие законы сохранения для пара и жидкости примут вид

$$\begin{aligned}
\frac{D\rho_{st}}{Dt} + \rho_{st} \frac{\partial u}{\partial x} &= J_m, & \rho_{st} \frac{Du}{Dt} + \frac{\partial \alpha_{st} p}{\partial x} &= f, & \rho_{st} \frac{D\varepsilon_{st}}{Dt} + \alpha_{st} p \frac{\partial u}{\partial x} &= J_m (\varepsilon_{liq} - \varepsilon_{st}), \\
\frac{D\rho_{liq}}{Dt} + \rho_{liq} \frac{\partial u}{\partial x} &= -J_m, & \rho_{liq} \frac{Du}{Dt} + \frac{\partial \alpha_{liq} p}{\partial x} &= -f, & \rho_{liq} \frac{D\varepsilon_{liq}}{Dt} + \alpha_{liq} p \frac{\partial u}{\partial x} &= 0.
\end{aligned}$$

Здесь $\rho_k = \alpha_k \rho_k^0$ — приведенная плотность k -й фракции. Учитывая равенства

$$\begin{aligned}
\frac{D\varepsilon_{st}}{Dt} &= \frac{\partial \varepsilon_{st}}{\partial p} \frac{Dp}{Dt} + \frac{\partial \varepsilon_{st}}{\partial \rho_{st}^0} \frac{D\rho_{st}^0}{Dt}, & \frac{D\rho_{st}^0}{Dt} &= \left(J_m \frac{\varepsilon_{liq} - \varepsilon_{st}}{\alpha_{st} \rho_{st}^0} + \frac{p}{\rho \rho_{st}^0} \frac{D\rho}{Dt} - \frac{\partial \varepsilon_{st}}{\partial p} \frac{Dp}{Dt} \right) \left(\frac{\partial \varepsilon_{st}}{\partial \rho_{st}^0} \right)^{-1}, \\
\frac{D\alpha_{st}}{Dt} &= \frac{1}{\rho_{st}^0} \left(J_m + \frac{\alpha_{st} \rho_{st}^0}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} - \alpha_{st} \frac{D\rho_{st}^0}{Dt} \right), & \frac{D\varepsilon_{liq}}{Dt} &= \frac{\partial \varepsilon_{liq}}{\partial p} \frac{Dp}{Dt} + \frac{\partial \varepsilon_{liq}}{\partial \rho_{liq}^0} \frac{D\rho_{liq}^0}{Dt}, \\
\frac{D\rho_{liq}^0}{Dt} &= \left(\frac{p}{\rho \rho_{liq}^0} \frac{D\rho}{Dt} - \frac{\partial \varepsilon_{liq}}{\partial p} \frac{Dp}{Dt} \right) \left(\frac{\partial \varepsilon_{liq}}{\partial \rho_{liq}^0} \right)^{-1}, & \frac{D\alpha_{liq}}{Dt} &= -\frac{D\alpha_{st}}{Dt},
\end{aligned}$$

закон сохранения энергии для смеси в целом можно переписать как $\frac{Dp}{Dt} - c^2 \frac{D\rho}{Dt} = \Pi$, где

$$c = \sqrt{\frac{p \left(\alpha_{st} \frac{\rho_{liq}^0}{\rho_{st}^0} \frac{\partial \varepsilon_{liq}}{\partial \rho_{liq}^0} + \alpha_{liq} \frac{\rho_{st}^0}{\rho_{liq}^0} \frac{\partial \varepsilon_{st}}{\partial \rho_{st}^0} \right) - \rho_{liq}^0 \rho_{st}^0 \frac{\partial \varepsilon_{liq}}{\partial \rho_{liq}^0} \frac{\partial \varepsilon_{st}}{\partial \rho_{st}^0}}{\rho \left(\alpha_{liq} \rho_{st}^0 \frac{\partial \varepsilon_{liq}}{\partial p} \frac{\partial \varepsilon_{st}}{\partial \rho_{st}^0} + \alpha_{st} \rho_{liq}^0 \frac{\partial \varepsilon_{liq}}{\partial \rho_{liq}^0} \frac{\partial \varepsilon_{st}}{\partial p} \right)}}, \quad (3)$$

$$\Pi = J_m \frac{\partial \varepsilon_{liq}}{\partial \rho_{liq}^0} \left[\frac{(\rho_{st}^0 - \rho_{liq}^0) \frac{\partial \varepsilon_{st}}{\partial \rho_{st}^0} + (\varepsilon_{liq} - \varepsilon_{st}) \frac{\rho_{liq}^0}{\rho_{st}^0}}{\alpha_{liq} \rho_{st}^0 \frac{\partial \varepsilon_{liq}}{\partial p} \frac{\partial \varepsilon_{st}}{\partial \rho_{st}^0} + \alpha_{st} \rho_{liq}^0 \frac{\partial \varepsilon_{liq}}{\partial \rho_{liq}^0} \frac{\partial \varepsilon_{st}}{\partial p}} \right].$$

Здесь c — адиабатическая скорость звука. Таким образом, система уравнений модели жидкости при наличии фазовых превращений в квазилинейной форме принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} &= 0, & \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} + \rho c_a^2 \frac{\partial u}{\partial x} &= \Pi, & \frac{\partial \rho_{st}^0}{\partial t} + u \frac{\partial \rho_{st}^0}{\partial x} + G_{st} \frac{\partial u}{\partial x} &= I_{st}, \\ \frac{\partial \alpha_{st}}{\partial t} + u \frac{\partial \alpha_{st}}{\partial x} + K_{st} \frac{\partial u}{\partial x} &= L_{st}, & \frac{\partial \rho_{liq}^0}{\partial t} + u \frac{\partial \rho_{liq}^0}{\partial x} + G_{liq} \frac{\partial u}{\partial x} &= I_{liq}, \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} G_{st} &= \left(\frac{p}{\rho_{st}^0} - \rho c^2 \frac{\partial \varepsilon_{st}}{\partial p} \right) \left(\frac{\partial \varepsilon_{st}}{\partial \rho_{st}^0} \right)^{-1}, & I_{st} &= \left(J_m \frac{\varepsilon_{liq} - \varepsilon_{st}}{\alpha_{st} \rho_{st}^0} - \Pi \frac{\partial \varepsilon_{st}}{\partial p} \right) \left(\frac{\partial \varepsilon_{st}}{\partial \rho_{st}^0} \right)^{-1}, \\ K_{st} &= \alpha_{st} \left(1 - \frac{G_{st}}{\rho_{st}^0} \right), & L_{st} &= \frac{J_m - \alpha_{st} I_{st}}{\rho_{st}^0}, \\ G_{liq} &= \left(\frac{p}{\rho_{liq}^0} - \rho c^2 \frac{\partial \varepsilon_{liq}}{\partial p} \right) \left(\frac{\partial \varepsilon_{liq}}{\partial \rho_{liq}^0} \right)^{-1}, & I_{liq} &= -\Pi \frac{\partial \varepsilon_{liq}}{\partial p} \left(\frac{\partial \varepsilon_{liq}}{\partial \rho_{liq}^0} \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (5)$$

Характеристическое уравнение системы (4), получающееся из выражения

$$\begin{vmatrix} \lambda - u & -\rho & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - u & -\frac{1}{\rho} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\rho c^2 & \lambda - u & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -G_{st} & 0 & \lambda - u & 0 & 0 \\ 0 & -K_{st} & 0 & 0 & \lambda - u & 0 \\ 0 & -G_{liq} & 0 & 0 & 0 & \lambda - u \end{vmatrix} = 0,$$

где $\lambda = dx/dt$, имеет только действительные корни: $\lambda_{1,2} = u \pm c$, $\lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6 = u$. Характеристические соотношения вдоль характеристических направлений $dx/dt = u \pm c$ системы (4) могут быть получены из уравнения

$$\begin{vmatrix} \lambda - u & -\rho & 0 & 0 & 0 & -u \frac{d\rho}{dt} - \rho \frac{du}{dt} \\ 0 & \lambda - u & -\frac{1}{\rho} & 0 & 0 & -u \frac{du}{dt} - \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} \\ 0 & -\rho c^2 & \lambda - u & 0 & 0 & \Pi - u \frac{d\rho}{dt} - \rho c^2 \frac{du}{dt} \\ 0 & -G_{st} & 0 & \lambda - u & 0 & I_{st} - u \frac{d\rho_{st}^0}{dt} - G_{st} \frac{du}{dt} \\ 0 & -K_{st} & 0 & 0 & \lambda - u & L_{st} - u \frac{d\alpha_{st}}{dt} - K_{st} \frac{du}{dt} \\ 0 & -G_{liq} & 0 & 0 & 0 & I_{liq} - u \frac{d\rho_{liq}^0}{dt} - G_{liq} \frac{du}{dt} \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель, получим выражения

$$(u \pm c)(dp \pm \rho c du) = \pm \Pi dt, \quad (6)$$

справедливые на характеристических направлениях $\lambda = u \pm c$. Вдоль траекторной характеристики $\lambda = u$ выполняются равенства

$$dp = c^2 d\rho + \Pi dt, \quad d\rho_{st}^0 = G_{st} \frac{d\rho}{\rho} + I_{st} dt, \quad d\alpha_{st} = K_{st} \frac{d\rho}{\rho} + L_{st} dt, \quad d\rho_{liq}^0 = G_{liq} \frac{d\rho}{\rho} + I_{liq} dt, \quad (7)$$

которые непосредственно следуют из системы (4).

Поскольку рассматривались относительно небольшие давления (до 10 атм), в качестве уравнений состояния воды и водяного пара использовались упрощенные соотношения из [11]:

$$\varepsilon_{liq} = \varepsilon_{liq0} + c_{v,liq} T + S_1, \quad p = S_2 + \rho_{liq}^0 R T_{liq} S_3. \quad (8)$$

Здесь

$$S_1 = \frac{A}{d\rho_{liq0}\delta} \exp\left(d \left[1 - \left(\frac{\rho_{liq}^0}{\rho_{liq0}}\right)^{-\delta}\right]\right) - \frac{K}{\rho_{liq0}\xi} \left(\frac{\rho_{liq}^0}{\rho_{liq0}}\right)^\xi,$$

$$S_2 = A \left(\frac{\rho_{liq}^0}{\rho_{liq0}}\right)^{1-\delta} \exp\left(d \left[1 - \left(\frac{\rho_{liq}^0}{\rho_{liq0}}\right)^{-\delta}\right]\right) - K \left(\frac{\rho_{liq}^0}{\rho_{liq0}}\right)^{1+\xi},$$

$$S_3 = a^{(0)} + (1 - a^{(0)}) \exp\left[-\left(\frac{\rho_{liq}^0}{\rho_{liq0}}\right)^{1.7}\right] + a^{(1)} \exp\left[-\left(\frac{\rho_{liq}^0}{\rho^{(1)}}\right)^{-3.5}\right] + a^{(2)} \exp\left[-\left(\frac{\rho_{liq}^0}{\rho^{(1)}}\right)^{-5}\right],$$

$A = 0.6726 \cdot 10^9$ Па, $d = 11.55$, $K = 1.15 \cdot 10^9$ Па, $\delta = 0.3333$, $\xi = 0.85$, $\rho_{liq0} = 998.23$ кг/м³, $\varepsilon_{liq0} = 1.2381 \cdot 10^6$ Дж/кг, $c_{v,liq} = 4.15 \cdot 10^3$ Дж/(кг·К), $a^{(0)} = 2.95$, $\rho^{(0)} = 0.5273\rho_{liq0}$, $a^{(1)} = 2.408$, $\rho^{(1)} = 1.0904\rho_{liq0}$, $a^{(2)} = 12.151$, $\rho^{(2)} = 1.3927\rho_{liq0}$, $R = 461.7$ Дж/(кг·К);

$$\varepsilon_{st} = c_{v,st} T_{st} + \varepsilon_{st}^{ch}, \quad p = R \rho_{st}^0 T_{st}, \quad (9)$$

где $c_{v,st} = 1.43 \cdot 10^3$ Дж/(кг·К), $\varepsilon_{st}^{ch} = 1.93 \cdot 10^6$ Дж/кг.

В [12] применялись более простые уравнения состояния для воды и водяного пара:

$$\varepsilon_{liq} = \frac{(p + \gamma p_{liq})(1 - \rho_{liq}^0 b_{liq})}{\rho_{liq}^0 (\gamma_{liq} - 1)} + q_{liq}, \quad T_{liq} = \frac{(p + p_{liq})(1 - \rho_{liq}^0 b_{liq})}{c_{v,liq} \rho_{liq}^0 (\gamma_{liq} - 1)},$$

$$\varepsilon_{st} = \frac{p}{\rho_{st}^0 (\gamma_{st} - 1)} + q_{st}, \quad T_{st} = \frac{p}{c_{v,st} \rho_{st}^0 (\gamma_{st} - 1)}, \quad (10)$$

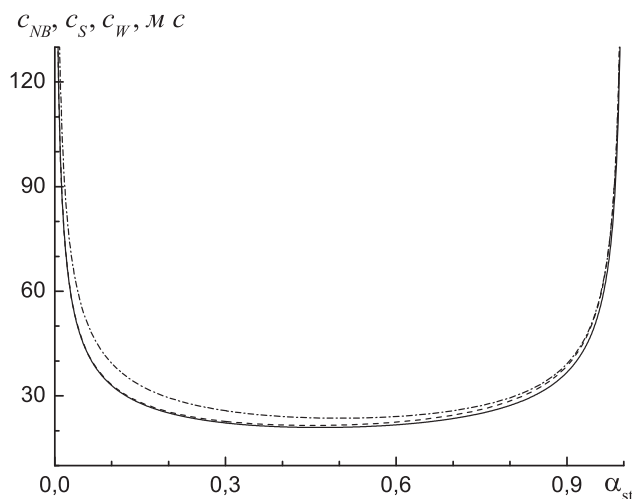


Рис. 1. Зависимости скоростей звука от объемной доли пара: c_{NB} — сплошная кривая, c_S — штриховая, c_W — штрихпунктирная

Fig. 1. The dependence of the speed of sound on the volume fraction of steam: c_{NB} — solid curve, c_S — dashed, c_W — dash-dotted

где $\gamma_{liq} = 1.19$, $p_{liq} = 7.028 \cdot 10^8$ Па, $b_{liq} = 6.61 \cdot 10^{-4}$ м³/кг, $q_{liq} = -1.177788 \cdot 10^6$ Дж/кг, $b_{liq} = 6.61 \cdot 10^{-4}$ м³/кг, $c_{v,liq} = 4.15 \cdot 10^3$ Дж/(кг · К), $\gamma_{st} = 1.47$, $q_{st} = 2.077616 \cdot 10^6$ Дж/кг, $c_{v,st} = 0.955 \cdot 10^3$ Дж/(кг · К).

На рис. 1 приведены зависимости $c_{NB}(\alpha_{st})$ и $c_S(\alpha_{st})$ для пароводяной смеси при нормальных условиях, рассчитанные по формуле (3) с использованием уравнений состояния (8), (9) и (10) соответственно, а также кривая $c_W(\alpha_{st})$, вычисленная с помощью формулы Вуда [13]

$$\frac{1}{\rho c_W^2} = \frac{\alpha_{st}}{\rho_{st}^0 c_{st}^2} + \frac{\alpha_{liq}}{\rho_{liq}^0 c_{liq}^2},$$

где $c_{st} = \sqrt{\frac{\gamma_{st} p}{\rho_{st}^0}}$, $c_{liq} = \sqrt{\frac{\gamma_{liq}(p + p_{liq})}{\rho_{liq}^0(1 - b_{liq}\rho_{liq}^0)}}$. Из представленных данных видно, что скорости звука в смеси, рассчитанные с использованием уравнений состояния (8)–(10), оказываются близкими между собой, но несколько меньшими, чем дает формула Вуда. Заметим, однако, что при решении задач с фазовыми превращениями необходимо применять уравнения состояния (8), (9) вместо (10), поскольку они дают значительную погрешность при вычислении удельной внутренней энергии жидкой фракции. В случае применения (10) приходится искусственно завышать удельную теплоемкость жидкости.

2. Методика численных расчетов и результаты вычислений

Для численного интегрирования уравнений (4) применялся УМХ. При его использовании достаточно определить значения искомых величин в узле (x_k, t_{n+1}) по известным значениям этих величин в узлах, находящихся на n -м временном слое. Применялась следующая итерационная процедура. Полагалось, что на “нулевой” итерации ($\nu = 0$) значения искомых переменных в точке (x_k, t_{n+1}) совпадают с их значениями в точке (x_k, t_n) , при этом характеристические направления $dx/dt = u$, $dx/dt = u \pm c$ аппроксимируются выражениями

$$x_k - x_C^\nu = u^\nu \Delta t, \quad x_k - x_L^\nu = (u^\nu + c^\nu) \Delta t, \quad x_k - x_R^\nu = (u^\nu - c^\nu) \Delta t,$$

где $\Delta t = t_{n+1} - t_n$. Точки пересечения полученных характеристических направлений с прямой $t = t_n$ (рис. 2) определяются соотношениями

$$x_L^\nu = x_k - (u^\nu + c^\nu) \Delta t, \quad x_C^\nu = x_k - u^\nu \Delta t, \quad x_R^\nu = x_k - (u^\nu - c^\nu) \Delta t. \quad (11)$$

Параметры $(\rho, u, p, \rho_{st}^0, \alpha_{st}, \rho_{liq}^0)^{(1)}$ в найденных точках $(x_L, x_C, x_R)^{(0)}$ находятся интерполяцией по их известным значениям в узлах (x_{k-1}, x_k, x_{k+1}) . Перепишем соотношения (6), (7) в конечно-разностном виде:

$$\begin{aligned} p^{\nu+1}(x_k, t_{n+1}) - p^\nu(x_L, t_n) + (\rho c)_L^\nu (u^{\nu+1}(x_k, t_{n+1}) - u^\nu(x_L, t_n)) &= \left(\frac{\Pi}{u+c} \right)_L^\nu \Delta t, \\ p^{\nu+1}(x_k, t_{n+1}) - p^\nu(x_C, t_n) - (c^2)_C^\nu (\rho^{\nu+1}(x_k, t_{n+1}) - \rho^\nu(x_C, t_n)) &= \Pi_C^\nu \Delta t, \\ (\rho_{st}^0)^{\nu+1}(x_k, t_{n+1}) - (\rho_{st}^0)^\nu(x_C, t_n) - \left(\frac{G_{st}}{\rho} \right)_C^\nu (\rho^{\nu+1}(x_k, t_{n+1}) - \rho^\nu(x_C, t_n)) &= (I_{st})_C^\nu \Delta t, \\ \alpha_{st}^{\nu+1}(x_k, t_{n+1}) - \alpha_{st}^\nu(x_C, t_n) - \left(\frac{K_{st}}{\rho} \right)_C^\nu (\rho^{\nu+1}(x_k, t_{n+1}) - \rho^\nu(x_C, t_n)) &= (L_{st})_C^\nu \Delta t, \\ (\rho_{liq}^0)^{\nu+1}(x_k, t_{n+1}) - (\rho_{liq}^0)^\nu(x_C, t_n) - \left(\frac{G_{liq}}{\rho} \right)_C^\nu (\rho^{\nu+1}(x_k, t_{n+1}) - \rho^\nu(x_C, t_n)) &= (I_{liq})_C^\nu \Delta t, \\ p^{\nu+1}(x_k, t_{n+1}) - p^\nu(x_R, t_n) - (\rho c)_R^\nu (u^{\nu+1}(x_k, t_{n+1}) - u^\nu(x_R, t_n)) &= \\ &= - \left(\frac{\Pi}{u-c} \right)_R^\nu \Delta t. \end{aligned} \quad (12)$$

Решая систему (12) при $\nu = 0$ относительно переменных $(\rho, u, p, \rho_{st}^0, \alpha_{st}, \rho_{liq}^0)^{(1)}$, найдем уточненные значения искомых функций в точке (x_k, t_{n+1}) . Затем по этим данным из выражений (11) вычисляются новые координаты $(x_L, x_C, x_R)^{(1)}$, которые, в свою очередь,

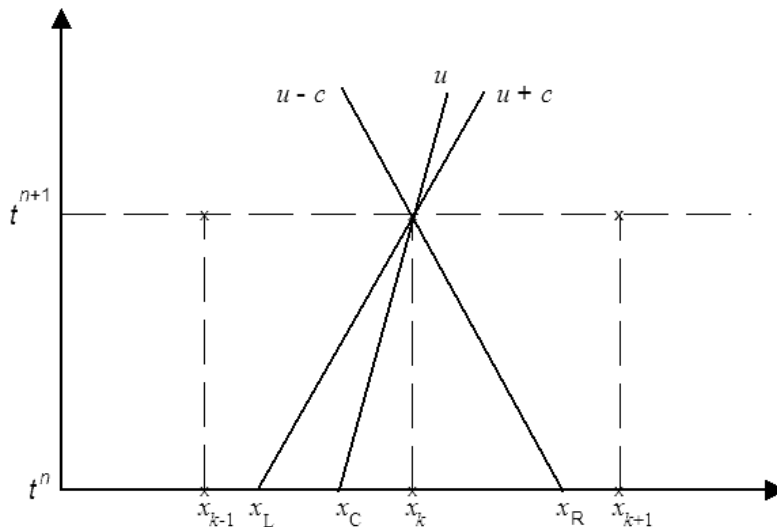


Рис. 2. Расчетная схема для УМК Fig. 2. The computational scheme for UMK

используются для определения $(\rho, u, p, \rho_{st}^0, \alpha_{st}, \rho_{liq}^0)^{(2)}$ из (12), где необходимо положить $\nu = 1$. Описанный итерационный процесс продолжается вплоть до сходимости.

При постановке граничных условий также используется характеристический подход. Например, если на левой границе известна зависимость давления от времени $P(x_1, t)$, то остальные переменные определяются из соотношений

$$\begin{aligned}
 P(x_1, t_{n+1}) - p^\nu(x_R, t_n) - (\rho c)_R^\nu (u^{\nu+1}(x_1, t_{n+1}) - u^\nu(x_R, t_n)) &= - \left(\frac{\Pi}{u - c} \right)_R^\nu \Delta t, \\
 P(x_1, t_{n+1}) - p^\nu(x_C, t_n) - (c^2)_C^\nu (\rho^{\nu+1}(x_1, t_{n+1}) - \rho^\nu(x_C, t_n)) &= \Pi_C^\nu \Delta t, \\
 (\rho_{st}^0)^{\nu+1}(x_1, t_{n+1}) - (\rho_{st}^0)^\nu(x_C, t_n) - \left(\frac{G_{st}}{\rho} \right)_C^\nu (\rho^{\nu+1}(x_1, t_{n+1}) - \rho^\nu(x_C, t_n)) &= (I_{st})_C^\nu \Delta t, \\
 \alpha_{st}^{\nu+1}(x_1, t_{n+1}) - \alpha_{st}^\nu(x_C, t_n) - \left(\frac{K_{st}}{\rho} \right)_C^\nu (\rho^{\nu+1}(x_1, t_{n+1}) - \rho^\nu(x_C, t_n)) &= (L_{st})_C^\nu \Delta t, \\
 (\rho_{liq}^0)^{\nu+1}(x_1, t_{n+1}) - (\rho_{liq}^0)^\nu(x_C, t_n) - \left(\frac{G_{liq}}{\rho} \right)_C^\nu (\rho^{\nu+1}(x_1, t_{n+1}) - \rho^\nu(x_C, t_n)) &= (I_{liq})_C^\nu \Delta t.
 \end{aligned}$$

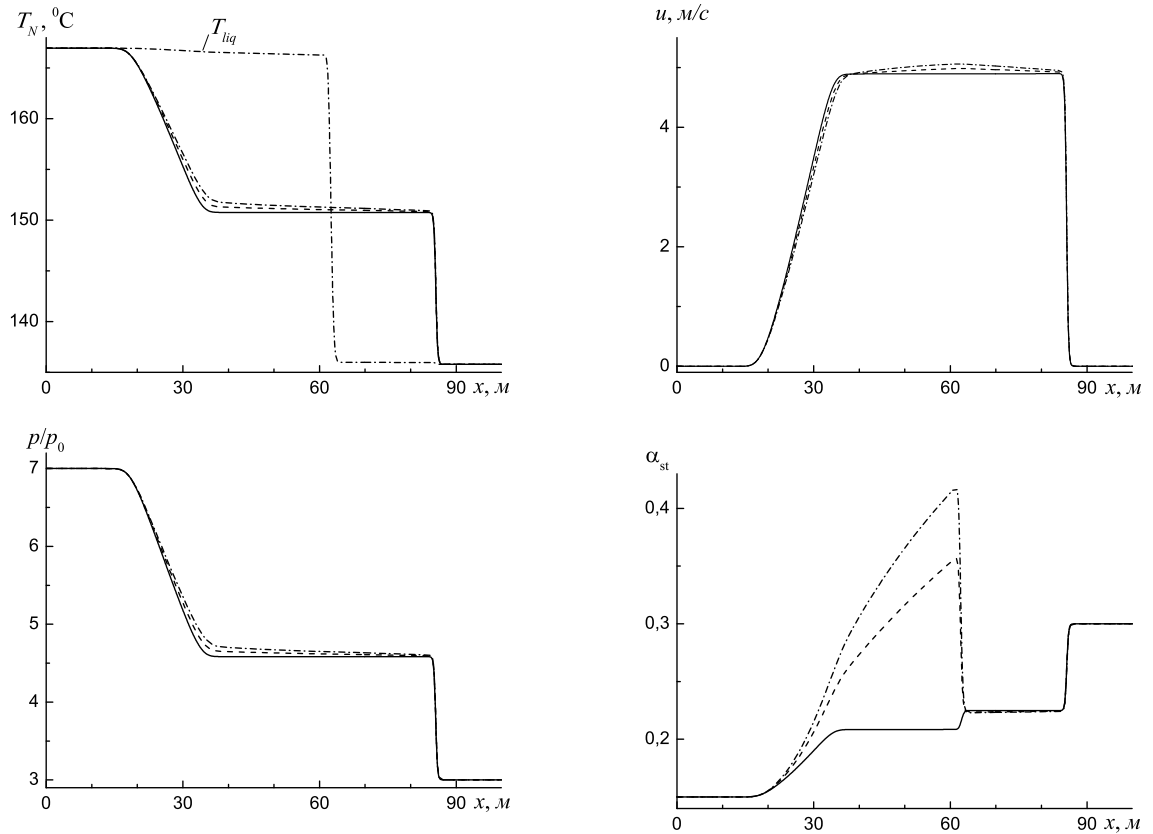


Рис. 3. Зависимости параметров при распаде произвольного разрыва к моменту времени $t = 0.5$ с: сплошные кривые — без учета фазового превращения ($\beta = 0$), штриховые и штрихпунктирные — при его наличии для $\beta = 0.02$ и 0.04

Fig. 3. The dependences of the parameters in the breaking of an arbitrary shock at specific time $t = 0.5$ s: solid curves — excluding phase transformation ($\beta = 0$), dashed and dashed-dotted lines, with phase transformation, for $\beta = 0.02$ and 0.04

Для иллюстрации применения описанного выше численного метода рассмотрена задача Римана при следующих значениях параметров на момент времени $t = 0$: “слева” от диафрагмы ($x < 50$ м) — $p_L = 0.7$ МПа, $u_L = 0$, $(\alpha_{st})_L = 0.15$, $(T_{liq})_L = 440$ К; “справа” от нее ($x > 50$ м) — $p_L = 0.3$ МПа, $u_L = 0$, $(\alpha_{st})_L = 0.3$, $(T_{liq})_L = 408.8$ К. Температура насыщения определялась из выражения

$$T_N(p) = T_{**} - \frac{T_*}{\ln(p/p_*)},$$

где $p_* = 20.2 \cdot 10^9$ Па, $T_* = 4200$ К, $T_{**} = 31$ К. Интенсивность фазового перехода вода—пар находилась из соотношения

$$J_m = \alpha_{liq} \beta (T_{liq} - T_N(p)).$$

В расчетах полагалось, что фазовый переход в процессе кипения происходит в условиях перегретого состояния, когда температура жидкости превышает температуру насыщения: $T_{liq} - T_N(p) > \Delta T$, где ΔT — перегрев жидкости. В момент времени $t = 0$ диафрагма мгновенно удалялась, при этом реализовался режим течения с ударной волной, движущейся вправо, и волной разрежения, перемещающейся влево.

На рис. 3 представлены данные численных расчетов течения, полученные к моменту времени $t = 0.5$ с, выполненные как при учете парообразования ($\beta = 0.02, 0.04$; $\Delta t = 1$ К), так и при его отсутствии ($\beta = 0$). Расчеты выполнены на сетке из 1000 узлов. Как видно из представленных рисунков, интенсивное парообразование происходит в области жидкости, расположенной слева от контактной границы, где температура жидкости превышает температуру насыщения. Учет фазового превращения приводит к значительному росту концентрации пара в волне разгрузки, а также к небольшому увеличению как скорости движения смеси, так и давления. Концентрация паровой фракции за фронтом ударного скачка уменьшается. Отметим также, что температура жидкой фракции T_{liq} в рассматриваемом временном интервале практически не меняется, поскольку не учитывался межфракционный теплообмен.

Таким образом, представлена модель вскипающей жидкости, базирующаяся на обобщенно-равновесной модели смеси, в которой учтен фазовый переход из жидкой фракции в паровую. Показана гиперболичность уравнений модели. Получено аналитическое выражение для скорости перемещения малых возмущений во вскипающей жидкости. Описан метод интегрирования уравнений модели, основанный на методе характеристик, с использованием которого выполнен расчет задачи Римана во вскипающей жидкости.

Список литературы

- [1] Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. М.: Наука; 1987: 360.
- [2] Гофман Г.В., Крошилин А.Е., Нигматулин Б.И. Нестационарное волновое течение вскипающей жидкости из сосудов. Теплофизика высоких температур. 1981; 19(6):1240–1250.
- [3] Downar-Zapolski P., Bilicky Z., Bolle L., Franco J. The non-equilibrium relaxation model for one-dimensional liquid flow. Intern. J. Multiphase Flow. 1996; 22(3):473–483.
- [4] Алексеев М.В., Лежнин С.И., Прибатурин Н.А., Сорокин А.Л. Генерация ударно-волновых и вихревых структур при истечении струи вскипающей воды. Теплофизика и аэромеханика. 2014; 21(6):795–798.

- [5] Болотнова Р.Х., Бузина В.А., Галимзянов М.Н., Шагапов В.Ш. Гидродинамические особенности процессов истечения вскипающей жидкости. Теплофизика и аэромеханика. 2012; 19(6):719–730.
- [6] Болотнова Р.Х., Бузина В.А. Пространственное моделирование нестационарной стадии истечения вскипающей жидкости из камер высокого давления. Вычислительная механика сплошных сред. 2014; 7(4):343–352.
- [7] Сузов В.С. Односкоростная модель гетерогенной среды с гиперболическим адиабатическим ядром. Журн. вычисл. математики и матем. физики. 2008; 48(6):1111–1125.
- [8] Сузов В.С. Об одном варианте метода характеристик для расчета течений односкоростной многокомпонентной смеси. Инженерно-физический журнал. 2010; 83(2):345–350.
- [9] Сузов В.С., Березанский И.В. К расчету течений односкоростной вязкой теплопроводной смеси узловым методом характеристик. Вычисл. технологии. 2014; 19(4):107–116.
- [10] Сузов В.С. Гетерогенные среды. Гиперболические модели и методы расчета. Матер. XXI Междунар. конф. по вычисл. механике и современным прикладным программным системам. М.: Изд-во МАИ, 2019:350–352.
- [11] Нигматулин Р.И., Болотнова Р.Х. Широкодиапазонное уравнение состояния воды и пара. Упрощенная форма. Теплофизика высоких температур. 2011; 49(2):310–313.
- [12] Saurel R., Boivin P., Lemetayer O. A general formulation for cavitating, boiling and evaporating flows. Computers and Fluids. 2016; (128):53.
- [13] Wallis G.B. One-dimensional two-phase flow. New York: McGraw-Hill; 1969: 408.

Boiling liquid model

SUROV VICTOR S.

South Ural State University (NRU), Chelyabinsk, 454080, Russia

Corresponding author: Surov Victor S., e-mail: surovvictor@gmail.com

Received February 28, 2019, revised October 9, 2019, accepted October 24, 2019

Abstract

A model of a boiling liquid is presented, built on the basis of a one-speed two-temperature mixture model previously proposed by the author, in which the forces of interfractional interaction are taken into account. The liquid fraction was considered compressible. A characteristic analysis of the equations of the model is carried out and their hyperbolicity is shown. Relations for characteristic directions and differential relations along these lines are written. An analytical formula for calculating the speed of sound in a boiling liquid is obtained. It is noted that the speed of sound in a liquid when taking into account phase transformations is somewhat lower than is predicted by the Wood formula. The calculation formulas of the iterative algorithm of the nodal method of characteristics are presented, which implies that the flow is calculated during the decay of an arbitrary rupture in a boiling liquid. In the calculations, it was assumed that the phase transition during the boiling process occurs under conditions of an overheated state, when the temperature of

the liquid exceeds the saturation temperature. It is shown that taking phase transformation into account leads to a significant increase in the vapor concentration in the unloading wave, as well as to a small increase in both the speed of the mixture and pressure. The concentration of the vapor fraction behind the shock front decreases.

Keywords: single-speed multicomponent mixture, phase transformations, hyperbolic system of equations, nodal method of characteristics.

Citation: Surov V.S. Boiling liquid model. Computational Technologies. 2020; 25(1):39–48. (In Russ.)

References

1. Nigmatulin R.I. Dinamika mnogofaznykh sred [Dynamics of multiphase media]. Moscow: Nauka; 1987: 360. (In Russ.)
2. Gofman G.V., Kroshilin A.E., Nigmatulin B.I. Nonsteady wave emission of effervescing liquid from vessels. High Temperature. 1981; 19(6):897–905.
3. Downar-Zapolski P., Bilicky Z., Bolle L., Franco J. The non-equilibrium relaxation model for one-dimensional liquid flow. Intern. J. Multiphase Flow. 1996; 22(3):473–483.
4. Alekseev M.V., Lezhnin S.I., Pribaturin N.A., Sorokin A.L. Generation of shockwave and vortex structures at the outflow of a boiling water jet. Thermophysics and Aeromechanics. 2014; 21(6): 763–766.
5. Bolotnova R.Kh., Buzina V.A., Galimzyanov M.N., Shagapov V.Sh. Hydrodynamic features of processes for boiling fluid flow. Thermophysics and Aeromechanics. 2012; 19(6):719–730. (In Russ.)
6. Bolotnova R.Kh., Buzina V.A. Spatial modeling of the nonstationary processes of boiling liquid outflows from high pressure vessels. Computational Continuum Mechanics. 2014; 7(4):343–352. (In Russ.)
7. Surov V.S. One-velocity model of a heterogeneous medium with a hyperbolic adiabatic kernel. Comput. Mathematics and Math. Physics. 2008; 48(6):1048–1062.
8. Surov V.S. On a variant of the method of characteristics for calculating one-velocity flows of a multi-component mixture. J. of Engineering Physics and Thermophysics. 2010; 83(2): 366–372.
9. Surov V.S., Berezansky I.V. The calculation of the flow of single-speed viscous and heat mixture by using the nodular method of characteristics. Comput. Technologies. 2014; 19(4): 107–116. (In Russ.)
10. Surov V.S. Heterogeneous medium. Hyperbolic models and calculation methods. Proc. of the XXI Intern. Conf. on Comput. Mechanics and Modern Applied Software Systems. Moscow: MAI; 2019:350–352. (In Russ.)
11. Nigmatulin R.I., Bolotnova R.Kh. Wide-range equation of state of water and steam: simplified form. High Temperature. 2011; 49(2):303–306.
12. Saurel R., Boivin P., Lemetayer O. A general formulation for cavitating, boiling and evaporating flows. Computers and Fluids. 2016; (128):53.
13. Wallis G.B. One-dimensional two-phase flow. New York: McGraw-Hill; 1969: 408.