

Оптимизация времени поиска случайных импульсных источников с заданной точностью

А. Л. Резник¹, А. В. Тузиков², А. А. Соловьев¹, А. В. Торгов¹, В. А. Ковалев²

¹Институт автоматики и электрометрии СО РАН, Новосибирск, Россия

²Объединенный Институт проблем информатики НАН Беларуси, Минск, Республика Беларусь

Контактный автор: Резник Александр Л., e-mail: reznik@iae.nsk.su

Поступила 25 марта 2019 г., доработана 18 ноября 2019 г., принята в печать 4 декабря 2019 г.

Исследуются вопросы построения быстродействующих алгоритмов обнаружения и локализации точечных источников, имеющих случайное распределение и обнаруживающих себя в случайные моменты времени генерацией мгновенных дельта-импульсов. Поиск осуществляется системой, включающей одно либо несколько приемных устройств, и выполняется с соблюдением требований по точности локализации. Предполагается, что все приемные устройства имеют произвольно перестраиваемые во времени окна обзора. Оптимальной считается процедура, которая в статистическом плане (т. е. по ансамблю реализаций) минимизирует среднее время локализации. Показано, что даже при сравнительно невысоких требованиях к точности локализации оптимальная процедура состоит из нескольких этапов, каждый из которых заканчивается в момент регистрации очередного импульса. Вполне допустима ситуация, когда в процессе оптимального поиска часть генерируемых источником импульсов может быть “пропущена” приемной системой.

В работе рассчитаны и систематизированы параметры оптимального поиска в зависимости от количества приемных устройств и требуемой точности локализации. Для случая предельно высоких требований к точности локализации рассчитаны параметры асимптотически оптимальных поисковых алгоритмов. Показана возможность использования полученных результатов в многомерном случае.

Ключевые слова: импульсно-точечный источник, оптимальный поиск, точность локализации.

Цитирование: Резник А.Л., Тузиков А.В., Соловьев А.А., Торгов А.В., Ковалев В.А. Оптимизация времени поиска случайных импульсных источников с заданной точностью. Вычислительные технологии. 2020; 25(1):91–106.

Введение

В тематическом плане задачи и алгоритмы оптимального поиска случайных точечно-импульсных объектов, обсуждаемые в настоящем сообщении, возникают во многих научно-технических приложениях. При цифровой регистрации и последующей программной обработке быстропротекающих динамических процессов различной физической природы один из наиболее трудоемких и алгоритмически сложных моментов связан с устранением импульсных помех, создаваемых точечными источниками со случайным пространственным распределением.

Для успешного решения таких задач требуется высокоточное определение координат объектов-источников излучения, причем в большинстве практически важных приложений сделать это необходимо за минимальное (в статистическом плане) время. В астрофизике и космологии [1, 2] с такими проблемами сталкиваются при поиске барстеров — вспыхивающих галактических рентгеновских источников. В теории надежности [3], в математической теории связи [4] и в задачах технической диагностики [5] подобные исследования требуются при разработке методов устранения неисправностей, проявляющихся в виде перемежающихся отказов. В современных разделах информатики эти методы востребованы при построении алгоритмов обнаружения слабоконтрастных и малоразмерных объектов на зашумленных цифровых изображениях [6, 7], а, например, в теории сигналов эти методы используются для оценивания надежности регистрации случайных точечных полей [8, 9]. Эквивалентные в математическом плане вопросы возникают в задачах обнаружения, локализации и сопровождения целей-источников излучения [10–13]. В большинстве прикладных задач, связанных с локализацией точечных импульсных объектов, поиск необходимо осуществлять по двух- и трехмерным областям.

Настоящая работа построена таким образом, что ее основное содержание посвящено построению оптимальных по времени алгоритмов одномерного поиска, а в заключительном разделе показано, как полученные результаты могут быть распространены на многомерный случай, и намечены перспективные направления дальнейших исследований.

1. Оптимальные алгоритмы поиска импульсно-точечных источников для систем с одним приемным устройством

Под точечно-импульсным источником будем понимать объект пренебрежимо малых угловых размеров (математическую точку), имеющий в пределах поискового интервала случайную плотность распределения $f(x)$ и генерирующий в случайные моменты времени бесконечно короткие импульсы (дельта-функции) с пуассоновой интенсивностью λ . Поиск объекта ведется с помощью регистрирующего устройства (приемника) с произвольно перестраиваемым во времени окном обзора. Импульс фиксируется, если точечный источник в момент генерации импульса находится в окне обзора приемного устройства. В противном случае импульс считается пропущенным. При регистрации очередного импульса происходит уточнение положения источника на координатной оси, в результате чего интервал поиска сужается, а процедура локализации повторяется до фиксации следующего импульса, и т. д. Необходимо за минимальное время найти источник, обеспечив при этом заданную точность локализации ε .

1.1. Алгоритмы одноэтапного поиска

Вводя в рассмотрение булевозначную функцию

$$u(x, t) = \begin{cases} 1, & \text{если точка } x \text{ в момент времени } t \text{ находится} \\ & \text{в окне обзора приемного устройства,} \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

описывающую окно обзора приемного устройства в момент времени t , получаем соотношение для среднего времени от начала поиска до регистрации первого импульса:

$$\langle \tau \rangle = \lambda \int_0^{\infty} dt \int_0^{\infty} dx \left[t f(x) u(x, t) \exp \left(-\lambda \int_0^t u(x, \xi) d\xi \right) \right]. \quad (1)$$

В общем виде для произвольного случайного априорного распределения $f(x)$ импульсного источника на оси x построение даже одноэтапной (заканчивающейся при регистрации первого импульса) процедуры оптимального по времени поиска вызывает значительные трудности. В одноэтапных алгоритмах периодического поиска относительная нагрузка $\varphi(x)$ на точку x (т. е. относительное время ее пребывания в окне обзора) остается постоянной в течение всего времени поиска. В классе таких алгоритмов задача минимизации соотношения (1) сводится к тому, чтобы найти функцию $\varphi(x)$, минимизирующую среднее время поиска

$$\langle \tau \rangle = \frac{1}{\lambda} \int \frac{f(x)}{\varphi(x)} dx \quad (2)$$

при соблюдении условий

$$\int \varphi(x) dx = \varepsilon, \quad (3)$$

$$0 \leq \varphi(x) \leq 1. \quad (4)$$

Вариационная задача (2) при ограничениях (3), (4) относится к задачам нелинейного программирования [14–16]. Для ее решения воспользуемся методом неопределенных множителей Лагранжа [17] и будем искать функцию $\phi(x)$, которая минимизирует выражение

$$\int \left[\frac{f(x)}{\varphi(x)} + \mu \varphi(x) \right] dx.$$

Дифференцируя по φ и учитывая ограничение (3), получим

$$\varphi(x) = \frac{\varepsilon \sqrt{f(x)}}{\int \sqrt{f(x)} dx}. \quad (5)$$

Если условие (4) выполняется при любых x , то функция (5) является решением сформулированной экстремальной задачи. Если же существуют такие области x , где решение $\varphi(x) > 1$, то внутри этих областей необходимо положить $\varphi(x) = 1$, а для оставшихся точек требуется пересчитать неопределенный множитель μ с учетом уже изменившихся условий (3) и (4). После этого в качестве оптимальной стратегии поиска может быть выбрана любая булевозначная функция $u(x, t)$, удовлетворяющая соотношениям

$$\int u(x, t) dx = \varepsilon, \quad \int u(x, \xi) d\xi = \varphi(x)t.$$

В общем случае построение оптимального (не обязательно периодического) алгоритма одноэтапного поиска связано с нахождением такой функции $\varphi(x, t)$ — относительной нагрузки на точку x в момент времени t , которая минимизирует среднее время локализации,

$$\langle \tau \rangle = \int dt \int dx f(x) \exp \left(-\lambda \int_0^t \varphi(x, \xi) d\xi \right)$$

при условии, что

$$0 \leq \varphi(x, t) \leq 1, \quad (6)$$

и для любого t

$$\int \varphi(x, t) dx = \varepsilon. \quad (7)$$

Чтобы упростить дальнейшие расчеты, введем функцию $\alpha(x, t) = \int_0^t \varphi(x, \xi) d\xi$, соответствующую суммарному времени пребывания точки x в окне обзора за весь период от начала поиска до момента времени t . Чтобы учесть ограничения (6) и (7), введем неопределенный множитель Лагранжа $\mu(t)$. Тогда задача построения оптимальной стратегии поиска сведется к нахождению функции $\alpha(x, t)$, минимизирующей функционал

$$\int dt \int dx [\exp(-\lambda\alpha(x, t))f(x) + \mu(t)\alpha(x, t)] \quad (8)$$

при условии, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \alpha(x, t) dx = \varepsilon t, \quad (9)$$

$$0 \leq \alpha(x, t) \leq t. \quad (10)$$

Дифференцируя (8) по α и приравнявая производную к нулю, получаем

$$\mu(t) = \lambda \exp(-\lambda\alpha(x, t))f(x),$$

или $\alpha(x, t) = \frac{1}{\lambda} \ln \frac{\lambda f(x)}{\mu(t)}$. С учетом двустороннего ограничения (10) решение вариационной задачи (8) запишется в виде

$$\alpha(x, t) = \begin{cases} 0, & \frac{1}{\lambda} \ln \frac{\lambda f(x)}{\mu(t)} < 0, \\ \frac{1}{\lambda} \ln \frac{\lambda f(x)}{\mu(t)}, & 0 \leq \frac{1}{\lambda} \ln \frac{\lambda f(x)}{\mu(t)} \leq t, \\ t, & t < \frac{1}{\lambda} \ln \frac{\lambda f(x)}{\mu(t)}, \end{cases}$$

где множитель $\mu(t)$ определяется из соотношения (9), а в качестве оптимальной стратегии поиска $u(x, t)$ может быть выбрана любая булевозначная функция, удовлетворяющая условиям

$$\int_0^t u(x, \xi) d\xi = \alpha(x, t), \quad \int u(x, t) dx = \varepsilon.$$

На практике использование оптимальных алгоритмов поиска, как правило, требует их доработки и адаптации к условиям решаемой задачи. Дело в том, что в тех случаях, когда априорная плотность распределения разыскиваемого источника отличается от равномерной, большинство оптимальных алгоритмов не могут быть физически реализованы с помощью перемещения односвязного сканирующего окна. Поэтому при

разработке реальных поисковых систем обычно прибегают к различным упрощениям, а точные аналитические соотношения нужны для того, чтобы соотнести выходные параметры таких систем с теоретически достижимыми предельными значениями. Следует отметить, что во втором из приведенных алгоритмов по умолчанию подразумевается, что интенсивность источника λ заранее известна. Если же такая априорная информация отсутствует, то в качестве упрощенного и физически реализуемого одноэтапного алгоритма поиска можно рекомендовать периодическую процедуру, не зависящую от интенсивности источника. В соответствии с этой стратегией сегмент поиска сначала заменяется набором примыкающих друг к другу ε -участков. Затем вычисляются интегралы от плотности $f(x)$ на каждом из них. Если общее количество ε -участков, на которые разбивается исходный сегмент, равно M , то интегралы-“ступеньки” над каждым из них равны P_1, P_2, \dots, P_M (здесь введено обозначение $P_i = \int_{(i-1)\varepsilon}^{i\varepsilon} f(x)dx, i = 1, \dots, M$).

В процессе поиска окно обзора должно циклически “пробегать” все дробные ε -участки с относительной нагрузкой

$$\beta_i = \sqrt{P_i} / \sum_{j=1}^M \sqrt{P_j}, \quad i = 1, \dots, M.$$

Значения β_i легко вычисляются, если для решения оптимизационной задачи

$$\begin{aligned} \langle \tau \rangle &= (1/\lambda)(P_1/\beta_1 + P_2/\beta_2 + \dots + P_M/\beta_M) \rightarrow \min, \\ \beta_1 + \dots + \beta_M &= 1, \end{aligned}$$

снова применить метод неопределенных множителей Лагранжа.

1.2. Многоэтапные алгоритмы поиска

Если не ограничиваться одноэтапными процедурами, а рассматривать алгоритм поиска как многоэтапный процесс (который заканчивается после регистрации m -го импульса), то оптимальная стратегия должна доставлять минимум функционалу

$$\begin{aligned} \langle \tau \rangle &= \sum_{k=1}^m \lambda^k \int_0^\infty dx f(x) \int \dots \int t_k \times \\ &\times \left\{ \prod_{l=1}^k \left[dt_l u_l \left(x, \sum_{s=1}^l t_s | t_1, \dots, t_{l-1} \right) \exp \left(-\lambda \int_{\sum_{s=1}^{l-1} t_s}^{\sum_{s=1}^l t_s} u_l(x, \xi | t_1, \dots, t_{l-1}) d\xi \right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (11)$$

при ограничении

$$\int u_m(x, t | t_1, \dots, t_{m-1}) dx = \varepsilon. \quad (12)$$

Здесь $u_i(x, t | t_1, \dots, t_{i-1})$ — стратегия поиска на i -м шаге при условии, что зафиксированные временные интервалы между первыми $(i - 1)$ импульсами были t_1, t_2, \dots, t_{i-1}

соответственно. В общем случае найти оптимальную стратегию, доставляющую минимум функционалу (11), представляется вряд ли возможным. В то же время для важного частного случая, когда $f(x) = \text{const}$, получить аналитическое решение возможно. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{L}, & x \in [0, L], \\ 0, & x \notin [0, L], \end{cases}$$

т. е. не имеется никакой априорной информации о возможном размещении источника внутри сегмента поиска $[0, L]$. Очевидно, что в таком случае на первом этапе поисковые усилия должны быть равномерно распределены между всеми точками поискового сегмента. Такую нагрузку можно создать, например, путем сканирования сегмента $[0, L]$ апертурой шириной W_1 (краевыми эффектами пренебрегаем). При регистрации импульса поиск продолжается внутри окна-апертуры шириной W_1 с использованием другой апертуры, имеющей ширину W_2 . Если рассматривается m -этапный поиск, то сканирование на последнем этапе должно выполняться апертурой, имеющей ширину ε (это продиктовано условиями задачи). При такой организации поисковой процедуры среднее время локализации импульсного источника составит

$$\langle \tau \rangle = \frac{1}{\lambda} \left(\frac{L}{W_1} + \frac{W_1}{W_2} + \frac{W_2}{W_3} + \dots + \frac{W_{m-1}}{\varepsilon} \right). \quad (13)$$

Если значение m фиксировано, то минимум выражения (13) достигается при

$$L/W_1 = W_1/W_2 = W_2/W_3 = \dots = W_{m-1}/\varepsilon = (L/\varepsilon)^{1/m}.$$

Чтобы убедиться в этом, достаточно последовательно приравнять к нулю все частные производные выражения (13) по переменным $W_1, W_2, W_3, \dots, W_{m-1}$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda} \left(-\frac{L}{W_1^2} + \frac{1}{W_2} \right) &= 0, \text{ это влечет равенство } \frac{L}{W_1} = \frac{W_1}{W_2}, \\ \frac{1}{\lambda} \left(-\frac{W_1}{W_2^2} + \frac{1}{W_3} \right) &= 0, \text{ это влечет равенство } \frac{W_1}{W_2} = \frac{W_2}{W_3}, \\ &\vdots \\ \frac{1}{\lambda} \left(-\frac{W_i}{W_{i+1}^2} + \frac{1}{W_{i+2}} \right) &= 0, \text{ это влечет равенство } \frac{W_i}{W_{i+1}} = \frac{W_{i+1}}{W_{i+2}}, \\ &\vdots \\ \frac{1}{\lambda} \left(-\frac{W_{m-2}}{W_{m-1}^2} + \frac{1}{\varepsilon} \right) &= 0, \text{ это влечет равенство } \frac{W_{m-2}}{W_{m-1}} = \frac{W_{m-1}}{\varepsilon}. \end{aligned}$$

Если дополнительно учесть, что

$$\frac{L}{W_1} \times \frac{W_1}{W_2} \times \frac{W_2}{W_3} \times \dots \times \frac{W_{m-1}}{\varepsilon} = \frac{L}{\varepsilon},$$

то среднее время оптимального m -этапного поиска (13) преобразуется к виду

$$\langle \tau_m \rangle_{opt} = (m/\lambda) (L/\varepsilon)^{1/m}. \quad (14)$$

Теперь, используя выражение (14), можно найти оптимальное количество этапов m_{opt} , при котором среднее время поиска (13) достигает глобального минимума. Поскольку функция $xa^{1/x}$ при $a > 1$ имеет только один минимум в точке $x = \ln a$, оптимальное значение m_{opt} всегда равно либо $entier(\ln(L/\varepsilon))$, либо $entier(\ln(L/\varepsilon)) + 1$ (здесь $entier(z)$ — целая часть числа z), так что можно считать, что при $L/\varepsilon \rightarrow \infty$ справедливы следующие асимптотические соотношения:

$$L/W_1 = W_1/W_2 = W_2/W_3 = \dots = W_{m-1}/\varepsilon = e.$$

Точно рассчитанные параметры оптимального многоэтапного поиска равномерно распределенного случайного импульсного источника в зависимости от требуемой точности локализации ε/L представлены в табл. 1 ($W_i, i = \overline{1, m_{opt}}$ — окна обзора приемной системы на каждом из m_{opt} этапов оптимального поиска). Принимая во внимание, что $\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{m}{m+1} \right)^m = e^{-1}$, для системы с одним приемным устройством при высоких требованиях к точности локализации (т.е. при $\varepsilon/L \rightarrow 0$) получаем следующие асимптотические соотношения:

$$m_{opt} \approx \ln(L/\varepsilon), \quad W_i \approx e^{-i}L \quad (i = \overline{1, m_{opt}}), \quad \langle \tau \rangle_{opt} \approx \frac{e \ln(L/\varepsilon)}{\lambda}.$$

Таким образом, в асимптотике многоэтапная процедура сокращает среднее время локализации логарифмически (по сравнению с одноэтапным поиском), в результате чего выигрыш от применения многоэтапной процедуры неограниченно увеличивается с ростом отношения L/ε .

Т а б л и ц а 1. Параметры оптимального поиска случайного равномерно распределенного импульсного источника (для системы с одним приемным устройством)

Table 1. Parameters of the optimal search for a random, uniformly distributed pulse source (for a system with one receiver)

ε/L	m_{opt}	$W_i \quad (i = \overline{1, m_{opt}})$	$\langle \tau \rangle$
$\frac{1}{4} \leq (\varepsilon/L) \leq 1$	1	$W_1 = \varepsilon$	$\frac{1}{\lambda} (\varepsilon/L)^{-1}$
$\left(\frac{2}{3}\right)^6 \leq (\varepsilon/L) \leq \frac{1}{4}$	2	$W_1 = (\varepsilon/L)^{\frac{1}{2}} L$ $W_2 = (\varepsilon/L) L = \varepsilon$	$\frac{1}{\lambda} (\varepsilon/L)^{-\frac{1}{2}}$
$\left(\frac{3}{4}\right)^{12} \leq (\varepsilon/L) \leq \left(\frac{2}{3}\right)^6$	3	$W_1 = (\varepsilon/L)^{\frac{1}{3}} L$ $W_2 = (\varepsilon/L)^{\frac{2}{3}} L$ $W_3 = (\varepsilon/L) L = \varepsilon$	$\frac{3}{\lambda} (\varepsilon/L)^{-\frac{1}{3}}$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
$\left(\frac{m}{m+1}\right)^{m(m+1)} \leq (\varepsilon/L) \leq \left(\frac{m-1}{m}\right)^{m(m-1)}$	m	$W_1 = (\varepsilon/L)^{\frac{1}{m}} L$ $W_2 = (\varepsilon/L)^{\frac{2}{m}} L$ \vdots $W_i = (\varepsilon/L)^{\frac{i}{m}} L$ \vdots $W_m = (\varepsilon/L)^{\frac{m}{m}} L = \varepsilon$	$\frac{m}{\lambda} (\varepsilon/L)^{-\frac{1}{m}}$

Теперь можно сравнить построенную оптимальную процедуру с некоторыми упрощенными алгоритмами многоэтапного поиска. Например, если локализацию случайного импульсного источника организовать по принципу дихотомии (когда на каждом из очередных поисковых этапов приемное устройство попеременно “наблюдает” за двумя “половинками” сканируемого участка), то среднее время локализации объекта составит $\langle \tau \rangle_2 = (2/\lambda) \log_2(L/\varepsilon) = (2/\lambda \ln 2) \ln(L/\varepsilon)$, т. е. дихотомический поиск по сравнению с оптимальной процедурой имеет небольшой ($\approx 6\%$) проигрыш по времени.

Еще ближе к оптимальной процедуре трихотомический поиск, когда исходный сегмент $[0, L]$ сначала делится на три части, затем подсегмент, внутри которого зафиксирован первый импульс, снова делится на три части и т. д. до достижения требуемой точности ε . Трихотомический поиск проигрывает оптимальной процедуре лишь

$$(3/\ln 3 - e)/e \approx 0.4\%.$$

Естественно ожидать, что в случае произвольного априорного распределения неизвестного источника процедура многоэтапного поиска (по сравнению с одноэтапным) может принести еще больший выигрыш во времени, особенно при больших значениях отношения L/ε . Вообще говоря, минимизация функционала (11) при ограничении (12) в каждом конкретном случае является весьма трудоемкой задачей. Поэтому для многих практических приложений может быть рекомендована следующая упрощенная процедура многоэтапного периодического поиска. На первом этапе сегмент $[0, L]$ делится на три части (три части выбраны потому, что для равномерного распределения, когда $f(x) = \text{const}$, эта процедура наиболее близка к оптимальной). Затем рассчитываются значения

$$P_1 = \int_0^{L/3} f(x) dx, \quad P_2 = \int_{L/3}^{2L/3} f(x) dx, \quad P_3 = \int_{2L/3}^L f(x) dx.$$

Для любого временного интервала Δt окно обзора приемного устройства шириной $L/3$ поочередно “настраивается” на каждый из трех участков наблюдения, чтобы $\Delta t_1 + \Delta t_2 + \Delta t_3 = \Delta t$, где $\Delta t_i/\Delta t = \beta_i$ — относительное время присутствия окна просмотра на каждом из подсегментов $[0, L/3]$, $[L/3, 2L/3]$, $[2L/3, L]$. Когда регистрируется новый импульс, процедура поиска повторяется внутри участка, на котором этот импульс зафиксирован (т. е. участок снова делится на три части, пересчитываются коэффициенты $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ и т. д.). На начальном (первом) этапе значения коэффициентов β_i равны $\sqrt{P_i} / \sum_{j=1}^3 \sqrt{P_j}$ ($i = 1, 2, 3$). Универсальность предлагаемой процедуры заключается также в том, что для ее реализации не требуется априорной информации об интенсивности источника.

2. Оптимальные по быстродействию алгоритмы локализации для систем с несколькими приемными устройствами

Задача, рассматриваемая в настоящем разделе, состоит в том, чтобы для системы с произвольным, но фиксированным числом приемных устройств построить алгоритм, имеющий минимальное (в статистическом плане) среднее время достижения требуемой точности локализации. Найти решение поставленной задачи в общем виде, как это уже

отмечалось в предыдущем разделе, представляется вряд ли возможным. Поэтому при построении оптимальных алгоритмов управления многоприемными системами мы ограничимся частным, хотя и очень важным с практической точки зрения случаем, когда не имеется никаких априорных сведений о вероятном расположении источника внутри сегмента поиска, т. е. когда можно считать, что случайный источник равномерно распределен на сегменте $[0, L]$. Очевидным достоинством такого алгоритма является то, что в результате его применения для поиска источника, имеющего произвольное распределение, отличное от равномерного, среднестатистическое время локализации тем не менее останется постоянным и совпадет с оптимальным временем локализации равномерно распределенного источника.

Таким образом, знание априорной информации о распределении импульсного объекта внутри поискового сегмента, с одной стороны, всегда ведет к усложнению алгоритма оптимального поиска, с другой — сокращает среднее время поиска. При этом среди всех возможных распределений импульсного объекта наиболее трудоемкой (по времени) является процедура, когда объект имеет равномерное распределение.

Т а б л и ц а 2. Параметры оптимального поиска случайного равномерно распределенного импульсно-точечного источника в зависимости от количества приемников n ($n \geq 2$) и требуемой точности локализации ε

Table 2. Optimal search parameters for random uniformly distributed pulse-point source depending on the number of receivers n ($n \geq 2$) and required localization accuracy ε

ε/L	m_{opt}	W_i ($i = \overline{1, m_{opt}}$)	$\langle \tau \rangle$
$\frac{1}{(2^n - 1)^m} \leq (\varepsilon/L) \leq \frac{1}{(2^n - 1)^{m-1}} \left(\frac{m-1}{m} \right)^{m-1}$ $(m = \overline{1, \infty})$	m	$W_1 = L$ $W_2 = \frac{1}{2^n - 1} L$ \vdots $W_m = \frac{1}{(2^n - 1)^{m-1}} L$	$\frac{m}{\lambda}$
$\frac{1}{(2^n - 1)^m} \left(\frac{m}{m+1} \right)^m \leq (\varepsilon/L) \leq \frac{1}{(2^n - 1)^m}$ $(m = \overline{1, \infty})$	m	$W_1 = (2^n - 1)(\varepsilon/L)^{\frac{1}{m}} L$ $W_2 = (2^n - 1)(\varepsilon/L)^{\frac{2}{m}} L$ \vdots $W_m = (2^n - 1)(\varepsilon/L)^{\frac{m}{m}} L$	$\frac{m}{\lambda(2^n - 1)} \times (\varepsilon/L)^{-\frac{1}{m}}$
$\varepsilon/L \rightarrow 0,$ $\frac{e^{-1}}{(2^n - 1)^{m_\infty}} \leq (\varepsilon/L) \leq \frac{e^{-1}}{(2^n - 1)^{m_\infty - 1}}$	m_∞	$W_1 = L$ $W_2 = \frac{1}{2^n - 1} L$ \vdots $W_i = \frac{1}{(2^n - 1)^{i-1}} L$ \vdots $W_{m_\infty} = \frac{1}{(2^n - 1)^{m_\infty - 1}} L \approx \frac{2^n - 1}{(2^n - 1)^{\frac{-\ln(\varepsilon/L)}{\ln(2^n - 1)}}} L = (2^n - 1)\varepsilon$	$\frac{m_\infty}{\lambda} \approx -\frac{\ln(\varepsilon/L)}{\lambda \ln(2^n - 1)}$

В табл. 2 представлены параметры оптимального поиска, которые были рассчитаны в предположении, что приемная система имеет фиксированное число используемых приемных устройств n ; поиск ведется на сегменте $[0, L]$; требуемая абсолютная точность локализации составляет ε . Вычисляемые параметры: m_{opt} — оптимальное количество поисковых этапов для заданной точности локализации; $m_{\infty} \approx \frac{-\ln(\varepsilon/L)}{\ln(2^n - 1)}$ — асимптотическая оценка количества поисковых этапов при $\varepsilon/L \rightarrow 0$; W_i — размеры окон обзора на каждом из этапов; $\langle \tau \rangle$ — среднее время оптимального поиска. При построении оптимальной процедуры локализации считалось допустимым и, более того, явно предполагалось, что не все генерируемые случайным источником импульсы регистрируются приемной системой. Ввиду ограничений на объем настоящего сообщения табл. 2 содержит только конечные результаты проведенных расчетов, а все промежуточные выкладки опущены. Отдельного пояснения заслуживает, пожалуй, лишь появление в таблице множителей, содержащих величину $(2^n - 1)$.

Пояснение к таблице 2. Отвлекаясь от всех непрерывных параметров, связанных с импульсным источником (т. е. от плотности его распределения, интенсивности, линейных размеров сегмента поиска, требуемой точности локализации), рассмотрим следующую дискретную задачу. Имеются два набора: 1) набор сигнальных объектов; 2) набор приемных устройств. Каждый сигнальный объект может быть подключен к одному или нескольким приемным устройствам. Приемное устройство срабатывает, если объект-генератор сигнала входит в список подключенных к этому устройству объектов. Приемная система должна по перечню сработавших устройств установить (идентифицировать) сигнальный объект-генератор. Вопрос: какое максимальное количество объектов N_{max} может входить в сигнальный набор, чтобы сохранялась возможность однозначной идентификации объекта-генератора с помощью приемной системы, имеющей n приемных устройств? Ответ: $N_{max} = (2^n - 1)$, т. е. в системе с n приемными устройствами однозначная идентификация возможна, если количество сигнальных объектов N не превосходит величины $(2^n - 1)$. При этом существует $\frac{(2^n - 1)!}{(2^n - 1 - N)!}$ различных вариантов подключения N сигнальных объектов к n приемникам. Применительно к задаче локализации импульсного источника это означает, что при оптимальном многоэтапном поиске, осуществляемом с применением системы из n приемных устройств, совокупный размер сканирующего окна на каждом этапе сканирования может быть разбит на $N = (2^n - 1)$ равновеликих участков, и при таком разбиении участок-генератор импульса будет определяться однозначно.

На рис. 1 приведен график зависимости среднего времени оптимального многоэтапного поиска неизвестного источника от числа приемных устройств системы и требуемой относительной точности локализации (точнее, от ее обратной величины $(\varepsilon/L)^{-1}$). Такое графическое представление, когда ось абсцисс разбивается на чередующиеся между собой заштрихованные и незаштрихованные поддиапазоны, помеченные маркерами “пассивный поиск” и “активное сканирование”, выбрано нами по следующим соображениям. Для тех значений целочисленного параметра m , при которых требуемая относительная точность локализации импульсного объекта ε/L (точнее, обратная к ней величина $(\varepsilon/L)^{-1}$) попадает в заштрихованный поддиапазон

$$\left[\frac{m}{m-1} (2^n - 1) \right]^{m-1} \leq (\varepsilon/L)^{-1} \leq (2^n - 1)^m, \quad m = \overline{1, \infty},$$

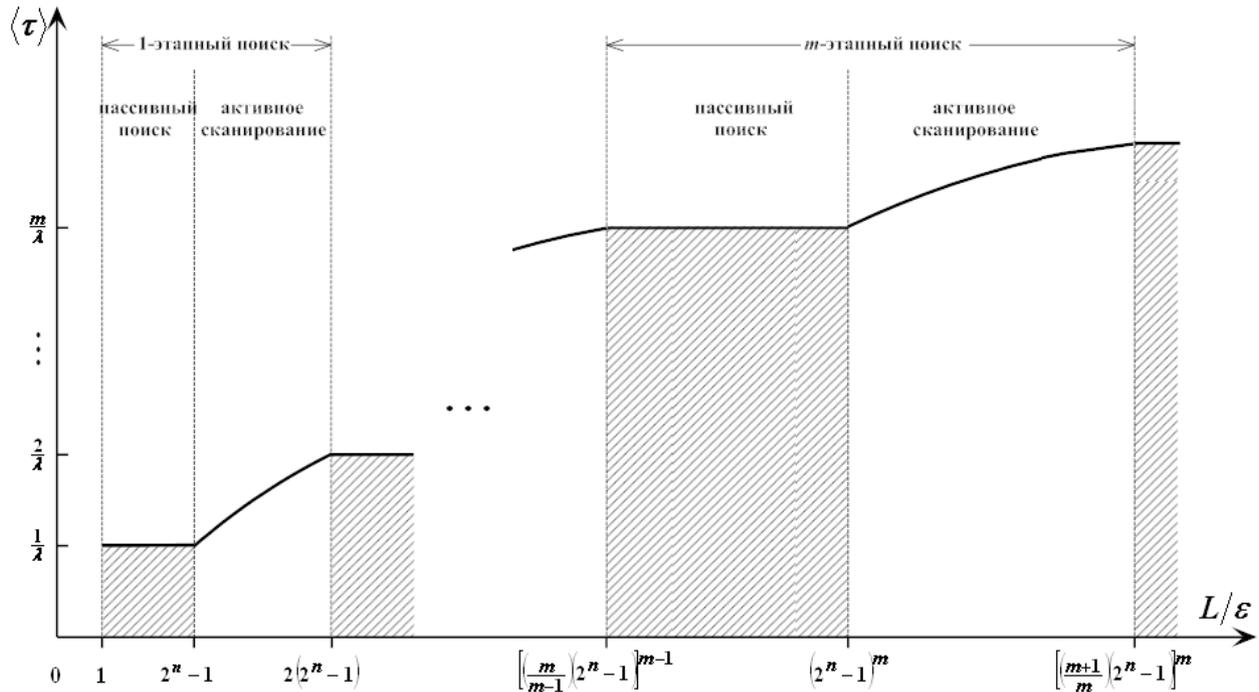


Рис. 1. Среднее время поиска случайного равномерно распределенного импульсно-точечного источника в зависимости от количества приемных устройств n ($n \geq 2$) и требуемой точности локализации ε

Fig. 1. Average time to search for a random, uniformly distributed pulse-point source depending on the number of receivers n ($n \geq 2$) and the required localization accuracy ε

оптимальная стратегия поиска состоит в точности из m этапов. Суть этой стратегии заключается в том, что на каждом i -м ($i \leq m$) этапе общее окно системы, получающееся в результате объединения индивидуальных окон каждого из n приемных устройств, совпадает со всем поисковым подсегментом W_i (см. табл. 2). Фактически это означает, что поисковая система в пассивном режиме “наблюдает” за всем поисковым подсегментом W_i , не проводя при этом реального сканирования, а при регистрации очередного импульса осуществляется переход к $(i + 1)$ -му этапу и поисковая процедура повторяется внутри одного из $(2^n - 1)$ сегментов, на которые делится окно W_i , и т. д. Процесс такого поиска носит статический характер, поскольку реального перемещения обзорного окна ни на одном из этапов не происходит. Именно поэтому заштрихованные поддиапазоны помечены маркером “пассивный поиск”. Особенностью каждого из поддиапазонов “пассивный поиск” является то, что процедура оптимального поиска одинакова для всех значений точности локализации ε , при которых величина $(\varepsilon/L)^{-1}$ принадлежит соответствующему заштрихованному поддиапазону, так что среднее время поиска $\langle \tau \rangle$ внутри каждого из заштрихованных поддиапазонов является константой (см. рис. 1). В отличие от описанной пассивной процедуры, при попадании величины $(\varepsilon/L)^{-1}$ в один из незаштрихованных поддиапазонов

$$(2^n - 1)^m \leq (\varepsilon/L)^{-1} \leq \left[\frac{m + 1}{m} (2^n - 1) \right]^m, \quad m = \overline{1, \infty}, \quad (15)$$

весь алгоритм оптимального поиска осуществляется в режиме активного сканирования в соответствии с приведенными в табл. 1 параметрами. Поиск внутри каждого из

таких незаштрихованных поддиапазонов (15), маркированных символом “активное сканирование”, тоже состоит из m этапов, но при этом на каждом из них осуществляется реальное сканирование текущего поискового подсегмента с помощью обзорного окна меньшего размера. В результате этого общее среднее время локализации увеличивается по сравнению с величиной m/λ (см. табл. 1), так как в активном режиме становится реально возможным пропуск объектов-генераторов импульса.

Заключение

Изложенные в статье методы и алгоритмы оптимальной одномерной локализации могут быть использованы в качестве теоретической основы для построения оптимальных алгоритмов поиска точечно-импульсных источников в многомерном случае. Пример такого подхода, демонстрирующий схему поиска неизвестного точечно-импульсного источника в двумерном случае, представлен на рис. 2. Считается, что в задаче заранее заданы функция $f(x, y)$ — априорная плотность вероятности распределения случайного

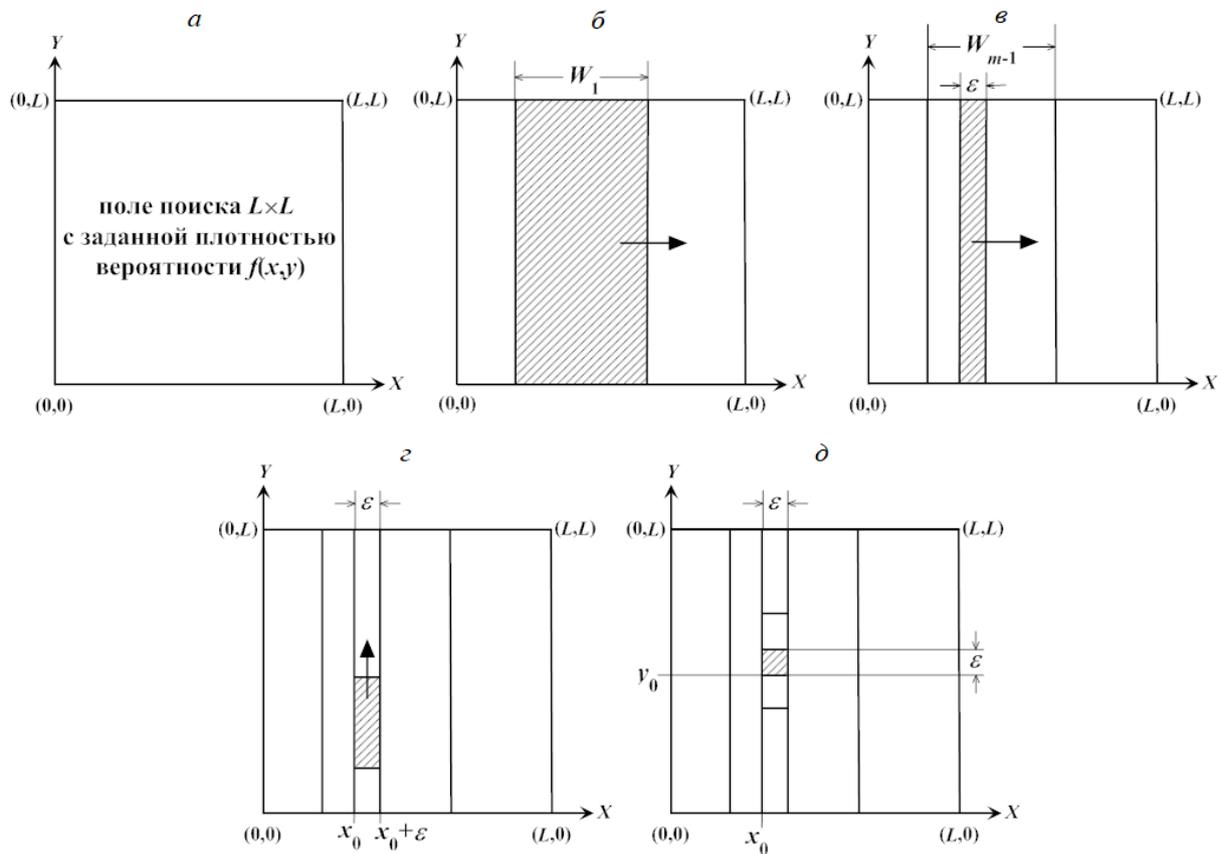


Рис. 2. Схема поиска неизвестного точечно-импульсного источника в двумерном случае: a — двумерное поле с заданной плотностью вероятности распределения источника $f(x, y)$; $б$ и $в$ — первый и последний этапы локализации по оси X соответственно; $з$ и $д$ — первый и последний этапы локализации по оси Y соответственно

Fig. 2. Search scheme for an unknown point-pulse source in the two-dimensional case: a — two-dimensional field with a given probability density of the source distribution $f(x, y)$; $б$ and $в$ — the first and last stages of localization along the X axis, respectively; $з$ and $д$ — the first and last stages of localization along the Y axis, respectively

источника в пределах поля $L \times L$ и ε — требуемая точность локализации импульсного источника по каждой из координат x и y . Необходимо построить алгоритм, который позволяет за минимальное (в статистическом плане) время внутри поля найти фрагмент $\varepsilon \times \varepsilon$, достоверно содержащий сигнальный источник.

Начнем процедуру локализации источника с координаты x . Для этого “свернем” двумерную плотность $f(x, y)$ по координате y : $f_1(x) = \int_0^L f(x, y) dy$. Решим теперь одномерную задачу локализации, для которой начальными условиями являются: $f(x)$ — априорная плотность вероятности распределения импульсного источника, L — размер поискового сегмента и ε — требуемая точность локализации. Получим оптимальный алгоритм поиска, который определяет количество этапов сканирования m , ширину окна обзора приемного устройства W_i , $i = \overline{1, m}$, на каждом из них (высота окна, естественно, равна L на всех этапах сканирования) и при необходимости моменты переключения приемной системы с одного режима работы на другой. Схематично первый и m -й (последний) этапы локализации по оси X представлены на рис. 2, б и в. На m -м этапе, который ведется сканирующим окном-апертурой размерами $\varepsilon \times L$ и завершает процедуру локализации по координате x , необходимо “запомнить” значение x_0 , соответствующее положению прямоугольной сканирующей апертуры в момент фиксации последнего импульса. Это значение понадобится нам при проведении локализации по второй координате y . Теперь, чтобы выполнить процедуру локализации источника по оси Y , необходимо корректно решить одномерную задачу поиска внутри прямоугольного окна $\varepsilon \times L$, которое ограничено по оси X координатами x_0 и $x_0 + \varepsilon$ (рис. 2, г). Для этой задачи одномерная априорная плотность вероятности распределения разыскиваемого источника внутри сканируемой вертикальной ε -полосы, имеющей высоту L , определится соотношением

$$f_2(y) = \frac{\int_{x_0}^{x_0+\varepsilon} f(x, y) dx}{\int_0^L \left(\int_{x_0}^{x_0+\varepsilon} f(x, y) dx \right) dy}.$$

Для уточнения положения источника по оси Y повторно применим процедуру оптимальной одномерной локализации, используя для этого плотность вероятности $f_2(y)$. В результате получим окончательное решение сформулированной двумерной задачи в виде фрагмента размерами $\varepsilon \times \varepsilon$ (рис. 2, д), достоверно содержащего импульсный источник и имеющего опорные координаты (x_0, y_0) .

Таким образом, для решения двумерной задачи локализации потребовалось дважды воспользоваться оптимальной процедурой одномерного поиска. Предложенные стратегии поиска открывают перспективу построения оптимальных многоэтапных алгоритмов локализации для задач, в которых плотность распределения вероятностей случайного импульсного источника отличается от равномерной, а поиск выполняется многоприемной системой. Кроме того, несомненный интерес представляют задачи, в которых требуется построение физически реализуемых оптимальных алгоритмов локализации случайных импульсных источников с кусочно-постоянной плотностью распределения

в пределах области поиска. Под физически реализуемыми алгоритмами здесь понимаются алгоритмы, которые могут быть реализованы с помощью односвязных сканирующих окон. Другое перспективное и малоизученное направление исследований связано с построением оптимальных процедур поиска, ориентированных на одновременную локализацию нескольких случайных источников.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты № 18-51-00001_Бел_а, № 19-01-00128) и Министерства науки и высшего образования (проект № ААА-А17-117052410034-6).

Список литературы

- [1] **Zhu X., Wen L., Hobbs G., Zhang Yi., Wang Yan Song, Madison D.R., Manchester R.N., Kerr M., Rosado P.A., Wang Ji.** Detection and localization of single-source gravitational waves with pulsar timing arrays. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 2015; 449(2):1650–1663.
- [2] **Вайнберг С.** Космология. М.: Либроком; 2013: 608.
- [3] **Гнеденко Б.В., Беляев Ю.К., Соловьев А.Д.** Математические методы в теории надежности. М.: Наука; 1965: 524.
- [4] **Shannon C., Weaver W.** The mathematical theory of communication. Illinois: The Univ. of Illinois Press; 1971: 144.
- [5] **Биргер И.А.** Техническая диагностика. М.: Машиностроение; 1978: 240.
- [6] **Kirichuk V.S., Mokin K.Yu., Reznik A.L.** Algorithms for processing of series of digital aerospace images based on automatic search for the conjugate points. *Pattern Recognition and Image Analysis*. 2001; 11(1):192–194.
- [7] **Reznik A.L., Solovyev A.A., Torgov A.V.** On the probability of the formation of local groups in random point images. *Pattern Recognition and Image Analysis. Advances in Mathematical Theory and Applications*. 2016; 26(4):714–719.
- [8] **Резник А.Л., Тузиков А.В., Соловьев А.А., Торгов А.В.** Интеллектуальная программная поддержка в задачах анализа случайных цифровых изображений. *Вычислительные технологии*. 2018; 23(5):70–81.
- [9] **Резник А.Л., Тузиков А.В., Соловьев А.А., Торгов А.В.** Оптимальные по быстродействию алгоритмы поиска случайных импульсно-точечных источников для систем с несколькими приемными устройствами. *Автометрия*. 2017; 53(3):3–11.
- [10] **Wang S., Fowlkes C.** Learning optimal parameters for multi-target tracking with contextual interactions. *International Journal of Computer Vision*. 2017; 122(3):484–501.
- [11] **Wei H., Cai Z., Tang B., Yu Z.** Review of the algorithms for radar single target tracking. *IOP Conference, Series Earth and Environmental Science*. 2017; 69(1):012073.
- [12] **Quidu L.J., Bertholom A., Dupas Y.** Robust multitarget tracking in forward-looking sonar image sequences using navigational data. *IEEE Journal of Oceanic Engineering*. 2012; 37(3):417–430.
- [13] **Blackman S.S.** Multiple hypothesis tracking for multiple target tracking. *IEEE Aerospace and Electronic Systems Magazine*. 2004; 19(1):5–18.
- [14] **Powell M.J.D.** A fast algorithm for nonlinearly constrained optimization calculations: G.A. Watson. Ed. *Numerical Analysis*. Berlin: Springer-Verlag; 1978: 144–157.
- [15] **Беллман Р., Гликсберг И., Гросс О.** Некоторые вопросы математической теории процессов управления. М.: Изд-во иностр. лит-ры; 1962: 332.

- [16] Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука; 1969: 384.
- [17] Бертсекас Д. Условная оптимизация и методы множителей Лагранжа. М.: Радио и связь; 1987: 400.

Вычислительные технологии, 2020, том 25, № 1, с. 91–106. © ИВТ СО РАН, 2020
Computational Technologies, 2020, vol. 25, no. 1, pp. 91–106. © ICT SB RAS, 2020

ISSN 1560-7534
eISSN 2313-691X

COMPUTATIONAL TECHNOLOGIES

DOI:10.25743/ICT.2020.25.1.007

Search time optimization for random pulse sources with given accuracy

REZNIK ALEXANDER L.¹, TUZIKOV ALEXANDER V.², SOLOVIEV, ALEXANDER A.¹, TORGOV ANDREY V.¹, KOVALEV VASILY A.²

¹Institute of Automation and Electrometry SB RAS, Novosibirsk, 630090, Russia

²United Institute of Informatics Problems of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, 220012, Belarus

Corresponding author: Reznik Alexander L., e-mail: reznik@iae.nsk.su

Received March 25, 2019, revised November 18, 2019, accepted December 4, 2019.

Abstract

Purpose. The main goal of the research is to develop time-optimal algorithms for the localization of point sources that have a random spatial distribution and indicate themselves by generating instantaneous delta pulses at random time points.

Methods. In many practically important problems requiring the highest reduction in the average time of localization of signal objects, the complexity of constructing optimal search algorithms forces researchers to resort to various kinds of simplifications or to the use of methods of numerical and simulation modelling. The mathematical apparatus used in the article belongs to probabilistic-statistical and non-linear programming methods. In a number of sections of the study (in particular, when constructing optimal control algorithms for multi-receiving search engines), traditional methods of discrete analysis and applied programming were used.

Results. The solution of the variational problem is found, which minimizes the average localization time in the class of one-stage search algorithms with a known distribution density and the simultaneous absence of a priori information about the intensity of a random pulse source. For random point sources with a priori known intensity of the instantaneous generation of pulses, physically realizable multistage search algorithms have been constructed that have a significant gain in speed over single-stage algorithms, especially with increased requirements for localization accuracy. For a uniform distribution of a random source, an optimal strategy of multi-stage search was calculated, depending on the required localization accuracy and the number of receivers used.

Findings. A distinctive feature of the studies is their universality, since in mathematical terms, the discussed problems and algorithms for the time-optimal search of random point-pulse objects arise in many scientific and technical applications. In particular, such studies are needed when developing methods for intermittent failures troubleshooting in the theory of reliability, in mathematical communication theory and in problems of technical diagnostics. Scientifically equivalent problems appear in the problems of detection, localization and tracking of radiation targets for eliminating malfunctions that manifest themselves in the form of intermittent failures. Scientifically equivalent problems arise in the problems of detecting, localizing and tracking radiation source targets.

Keywords: pulse-point source, optimal search, localization accuracy.

Citation: Reznik A.L., Tuzikov A.V., Soloviev A.A., Torgov A.V., Kovalev V.A. Search time optimization for random pulse sources with given accuracy. Computational Technologies. 2020; 25(1):91–106. (In Russ.)

Acknowledgements. The work was supported by RFBR (grants No. 19-01-00128, No. 18-51-00001_Bel.a), and Ministry of Science and Higher Education (project AA-A17-117052410034-6).

References

1. Zhu X., Wen L., Hobbs G., Zhang Yi., Wang Yan Song, Madison D.R., Manchester R.N., Kerr M., Rosado P.A., Wang Ji. Detection and localization of single-source gravitational waves with pulsar timing arrays. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 2015; 449(2):1650–1663.
2. Weinberg S. Cosmology. New York: Oxford Univ. Press; 2008: 593.
3. Gnedenko B.V., Belyayev Yu.K., Solovyev A.D. Mathematical methods of reliability theory. New York: Academic Press; 1969: 518.
4. Shannon C., Weaver W. The mathematical theory of communication. Illinois: The Univ. of Illinois Press; 1971: 144.
5. Birger I.A. Tekhnicheskaya diagnostika [Technical diagnostics]. Moscow: Mashinostroenie; 1978: 240. (In Russ.)
6. Kirichuk V.S., Mokin K.Yu., Reznik A.L. Algorithms for processing of series of digital aerospace images based on automatic search for the conjugate points. Pattern Recognition and Image Analysis. 2001; 11(1):192–194.
7. Reznik A.L., Solovyev A.A., Torgov A.V. On the probability of the formation of local groups in random point images. Pattern Recognition and Image Analysis. Advances in Mathematical Theory and Applications. 2016; 26(4):714–719.
8. Reznik A.L., Tuzikov A.V., Soloviev A.A., Torgov A.V. Intellectual program support for the analysis of random digital images. Computational Technologies. 2018; 23(5):70–81. (In Russ.)
9. Reznik A.L., Tuzikov A.V., Soloviev A.A., Torgov A.V. Time-optimal algorithms of searching for pulsed-point sources for systems with several detectors. Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing. 2017; 53(3):203–209.
10. Wang S., Fowlkes C. Learning optimal parameters for multi-target tracking with contextual interactions. Intern. Journal of Computer Vision. 2017; 122(3):484–501.
11. Wei H., Cai Z., Tang B., Yu Z. Review of the algorithms for radar single target tracking. IOP Conference, Series Earth and Environmental Science. 2017; 69(1):012073.
12. Quidu L.J., Bertholom A., Dupas Y. Robust multitarget tracking in forward-looking sonar image sequences using navigational data. IEEE Journal of Oceanic Engineering. 2012; 37(3):417–430.
13. Blackman S.S. Multiple hypothesis tracking for multiple target tracking. IEEE Aerospace and Electronic Systems Magazine. 2004; 19(1):5–18.
14. Powell M.J.D. A fast algorithm for nonlinearly constrained optimization calculations: G.A. Watson. Ed. Numerical Analysis. Berlin: Springer-Verlag; 1978: 144–157.
15. Bellman R.E., Glicksberg I.L., Gross O.A. Some aspects of the mathematical theory of control processes. Santa Monica, CA: RAND Corporation; 1958: 263.
16. Pontryagin L.S. Mathematical theory of optimal processes. USA: CRC Press; 1987: 360.
17. Bertsekas D. Constrained optimization and Lagrange multiplier methods. New York: Academic Press; 1982: 410.