

Моделирование конвекции электропроводной жидкости в сферическом слое при подводе тепла к внутренней сфере*

С. В. СОЛОВЬЕВ

Тихоокеанский государственный университет, Хабаровск, Россия

Контактный e-mail: solovjovsv@rambler.ru

Представлены результаты численного моделирования конвективного теплообмена электропроводящей жидкости между концентрическими сферами при подводе тепла к внутренней сфере. Исследовано влияние числа Грасгофа и джоулевой диссипации на структуру течения жидкости, поля температуры, магнитной индукции и распределение локальных чисел Нуссельта. Получено уравнение подобия теплообмена, когда ускорение свободного падения направлено к центру сферического слоя.

Ключевые слова: математическое моделирование, конвективный теплообмен, джоулева диссипация, магнитная гидродинамика, сферический слой, уравнение подобия теплообмена.

Библиографическая ссылка: Соловьев С.В. Моделирование конвекции электропроводной жидкости в сферическом слое при подводе тепла к внутренней сфере // Вычислительные технологии. 2019. Т. 24, № 5. С. 61–74.

DOI: 10.25743/ICT.2019.24.5.006.

Введение

При моделировании широкого круга задач конвективного теплообмена в замкнутых объемах, в частности в сферических концентрических слоях [1–14], используется приближение Буссинеска, в котором вектор силы тяжести направлен вертикально вниз. Однако в ряде задач гео- и астрофизики имеет место принципиальное отличие — вектор силы тяжести направлен по радиусу к центру сферического слоя. Сравнение результатов локальных и интегральных (уравнений подобия теплообмена) характеристик конвективного теплообмена жидкости между изотермическими концентрическими сферами, когда вектор ускорения свободного падения был направлен вертикально вниз и по радиусу к центру сферического слоя [14], показало значительные различия в теплообмене и гидродинамике. В этой связи интерес представляет исследование конвективного теплообмена в сферических слоях, когда вектор ускорения свободного падения направлен по радиусу к центру сферического слоя.

В работе представлены результаты конвективного теплообмена и магнитной гидродинамики электропроводной жидкости в концентрическом сферическом слое при подводе тепла к внутренней сфере.

*Title translation and abstract in English can be found on page 74.

© ИВТ СО РАН, 2019.

1. Математическая модель

Задача конвективного теплообмена в электропроводной жидкости, движущейся в сферическом слое, описывается уравнениями магнитной гидродинамики (уравнениями движения жидкости с учетом магнитных, инерционных, вязких и подъемных сил), уравнениями энергии с учетом теплоты джоулевой диссипации и уравнениями магнитной индукции. Используется приближение Буссинеска. Ускорение свободного падения направлено к центру сферического слоя.

Математическая постановка задачи в переменных вихрь ω , функция тока ψ , температура ϑ в сферической системе координат с учетом симметрии по долготе имеет вид [14, 15]

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\text{Ho}} \frac{\partial \omega}{\partial \tau} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{\partial \omega}{\partial r} - \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial \omega}{\partial \theta} - \frac{\omega}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \omega \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) = \\ & = \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \theta^2} + \frac{\operatorname{ctg} \theta}{r^2} \frac{\partial \omega}{\partial \theta} - \frac{\omega}{r^2 \sin^2 \theta} \right) - \frac{\text{Gr}}{\text{Re}^2} \frac{1}{r} \frac{\partial \vartheta}{\partial \theta} + \\ & + \frac{S}{\text{Re}_m} \left(B_r \frac{\partial^2 B_\theta}{\partial r^2} + 2 \frac{B_r}{r} \frac{\partial B_\theta}{\partial r} + \frac{\partial B_r}{\partial r} \frac{\partial B_\theta}{\partial r} + \frac{B_\theta}{r} \frac{\partial B_r}{\partial r} - \frac{B_r}{r} \frac{\partial^2 B_r}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial B_r}{\partial r} \frac{\partial B_r}{\partial \theta} + \frac{B_\theta}{r} \frac{\partial^2 B_\theta}{\partial r \partial \theta} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{r} \frac{\partial B_\theta}{\partial r} \frac{\partial B_\theta}{\partial \theta} + \frac{2 B_\theta}{r^2} \frac{\partial B_\theta}{\partial \theta} - \frac{B_\theta}{r^2} \frac{\partial^2 B_r}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial B_r}{\partial \theta} \frac{\partial B_\theta}{\partial \theta} \right), \end{aligned} \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} - \frac{\operatorname{ctg} \theta}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = -\omega r \sin \theta, \quad (2)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\text{Ho}} \frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{\partial \vartheta}{\partial r} - \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial \vartheta}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{\text{Pe}} \left(\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \vartheta}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \theta^2} + \frac{\operatorname{ctg} \theta}{r^2} \frac{\partial \vartheta}{\partial \theta} \right) - \\ & - \frac{J}{\text{Pe}} \left(\frac{\partial B_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} B_\theta - \frac{1}{r} \frac{\partial B_r}{\partial \theta} \right)^2 = 0, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\text{Ho}} \frac{\partial B_r}{\partial \tau} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left(\frac{B_\theta}{r} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial B_\theta}{\partial \theta} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} + B_r \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r \partial \theta} + \frac{\partial B_r}{\partial \theta} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) + \\ & + \frac{1}{\text{Re}_m} \left(\frac{\partial^2 B_r}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial B_r}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 B_r}{\partial \theta^2} + \frac{\operatorname{ctg} \theta}{r^2} \frac{\partial B_r}{\partial \theta} - \frac{2 B_r}{r^2} - \frac{2 B_\theta \operatorname{ctg} \theta}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial B_\theta}{\partial \theta} \right), \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\text{Ho}} \frac{\partial B_\theta}{\partial \tau} = \frac{1}{r \sin \theta} \left(-B_r \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} - \frac{\partial B_r}{\partial r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} - \frac{B_\theta}{r} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r \partial \theta} + \frac{B_\theta}{r^2} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \frac{\partial B_\theta}{\partial r} \right) + \\ & + \frac{1}{\text{Re}_m} \left(\frac{\partial^2 B_\theta}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial B_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 B_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\operatorname{ctg} \theta}{r^2} \frac{\partial B_\theta}{\partial \theta} - \frac{B_\theta}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial B_r}{\partial \theta} \right). \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь $\vartheta = (T - T_2) \lambda / (q R_1)$, $B = B' / B_0$, Ψ , ω — безразмерные температура, магнитная индукция, функция тока и вихрь; ρ_0 , u_0 , B_0 , t_0 — характерные масштабы; B' — размерная магнитная индукция; $r = R / R_1$ — безразмерный текущий радиус; R — размерный текущий радиус; R_1 , R_2 — размерные радиусы внутренней и внешней сфер; θ — угол широты; D_m — коэффициент магнитной вязкости (диффузии); σ — электрическая проводимость жидкости; $r_2 = R_2 / R_1$ — безразмерная толщина сферического слоя;

ν , a — коэффициенты кинематической вязкости и температуропроводности жидкости; q — размерная плотность теплового потока, подводимого к внутренней поверхности сферического слоя; λ — коэффициент теплопроводности жидкости; $\text{Ho} = \frac{u_0 t_0}{R_1}$, $\text{Gr} = \frac{g\beta q R_1^4}{\nu^2 \lambda}$, $\text{Re} = \frac{u_0 R_1}{\nu}$, $\text{Pe} = \frac{u_0 R_1}{a}$, $\text{Re}_m = \frac{u_0 R_1}{D_m}$, $S = \frac{\sigma B_0^2 R_1}{\rho_0 u_0}$ — безразмерные числа гомохронности, Грасгофа, Рейнольдса, Пекле, магнитное число Рейнольдса, параметр магнитного взаимодействия соответственно.

При проведении вычислительного эксперимента для температуры задавались следующие граничные условия: на внутренней поверхности слоя Γ_1 ($r = 1$) — граничное условие второго рода (плотность теплового потока) [16], а на внешней Γ_2 ($r = r_2$) — первого рода (постоянное значение температуры): $-\frac{\partial \vartheta}{\partial r}|_{\Gamma_1} = 1$; $\vartheta|_{\Gamma_2} = 0$. На оси симметрии: $\frac{\partial \vartheta}{\partial \theta}|_{\theta=0,\pi} = 0$.

Постоянная величина J , входящая в уравнение (1), определяет величину теплоты Джоулевой диссипации. Для температурного граничного условия второго рода на внутренней поверхности слоя постоянная величина J определяется из выражения

$$J = \frac{D_m R_1 B_0^2}{4\pi q}.$$

Граничные условия для функции тока, напряженности вихря и магнитной индукции имели следующий вид [15]:

$$\Psi|_{\Gamma_{1,2}} = \Psi|_{\theta=0,\pi} = \omega|_{\theta=0,\pi} = 0, \quad \frac{\partial B_r}{\partial \theta}|_{\theta=0,\pi} = \frac{\partial B_\theta}{\partial \theta}|_{\theta=0,\pi} = 0,$$

$$B_r|_{\Gamma_1} = B_r|_{\Gamma_2} = 0, \quad B_\theta|_{\Gamma_1} = -0.01 \sin \theta, \quad B_\theta|_{\Gamma_2} = 0.01 \sin \theta.$$

Граничные условия для вихря на границах сферического слоя предполагают линейное изменение его по нормали [14, 17]. Локальные и осредненные числа Нуссельта на границах слоя рассчитывались по формулам

$$\text{Nu}_1 = -\frac{\partial \vartheta}{\partial r}|_{\Gamma_1}, \quad \text{Nu}_2 = -r_2 \frac{\partial \vartheta}{\partial r}|_{\Gamma_2},$$

$$\overline{\text{Nu}}_1 = -\frac{1}{2} \int_0^\pi \left[\frac{\partial \vartheta}{\partial r} \right]_{\Gamma_1} \sin \theta d\theta, \quad \overline{\text{Nu}}_2 = -\frac{r_2}{2} \int_0^\pi \left[\frac{\partial \vartheta}{\partial r} \right]_{\Gamma_2} \sin \theta d\theta.$$

2. Результаты вычислительных экспериментов

Численное решение задачи осуществлялось с помощью метода конечных элементов, алгоритм решения представлен в работе [16]. Расчеты выполнены при следующих значениях безразмерных чисел подобия: $\text{Re} = \text{Pe} = 10$, $\text{Pr} = \text{Re}_m = 1$, $S = 10^{-5}$, $S/\text{Re}_m = 10^{-5}$, отношение внутреннего диаметра сферического слоя к внешнему $d/D = 1/2.5$.

В табл. 1 и 2 приведены результаты стационарных расчетов. В табл. 1 представлены максимальные значения температуры, функции тока, вихря, радиальной и меридиональной составляющих магнитной индукции, минимального, осредненного и максимального значений чисел Нуссельта на внешней поверхности сферического слоя без

Т а б л и ц а 1. Результаты расчетов без учета теплоты

Параметр	Режим							
	1	2	3	4	5	6	7	8
Gr	10^2	$5 \cdot 10^2$	10^3	$5 \cdot 10^3$	10^4	$2.7 \cdot 10^4$	$5 \cdot 10^4$	10^5
θ_{\max}	6.122	6.976	6.052	3.848	3.397	2.569	2.296	2.750
$ \Psi_{\max} $	$1.21 \cdot 10^{-6}$	$2.20 \cdot 10^{-1}$	$4.17 \cdot 10^{-1}$	1.19	1.78	3.21	4.37	7.47
$ \omega_{\max} $	$6.00 \cdot 10^{-6}$	1.59	3.13	7.33	$1.06 \cdot 10$	$1.89 \cdot 10$	$2.61 \cdot 10$	$6.12 \cdot 10$
$ B_r \max $	$8.58 \cdot 10^{-4}$	$7.40 \cdot 10^{-4}$	$6.46 \cdot 10^{-4}$	$1.27 \cdot 10^{-3}$	$1.64 \cdot 10^{-3}$	$2.08 \cdot 10^{-3}$	$2.23 \cdot 10^{-3}$	$6.90 \cdot 10^{-3}$
$ B_{\theta \max} $	10^{-2}					$1.03 \cdot 10^{-2}$	$1.04 \cdot 10^{-2}$	10^{-2}
$Nu_{2 \min}$	4.000	1.616	0.703	0.407	0.324	0.050	0.049	0.305
\overline{Nu}_2	4.114	4.219	4.219	4.219	4.219	4.219	4.219	4.219
$Nu_{2 \max}$	4.000	16.864	22.424	10.168	9.624	9.915	9.716	30.949

Т а б л и ц а 2. Результаты расчетов с учетом теплоты

Параметр	Режим							
	1	2	3	4	5	6	7	8
Gr	10^2	$5 \cdot 10^2$	10^3	$5 \cdot 10^3$	10^4	$2.7 \cdot 10^4$	$5 \cdot 10^4$	10^5
θ_{\max}	8.169	6.435	5.242	3.613	3.151	2.618	2.351	1.992
$ \Psi_{\max} $	$4.15 \cdot 10^{-2}$	$3.97 \cdot 10^{-1}$	$6.49 \cdot 10^{-1}$	1.61	2.29	3.76	5.12	7.10
$ \omega_{\max} $	$2.10 \cdot 10^{-1}$	2.11	3.43	8.28	$1.16 \cdot 10$	$1.94 \cdot 10$	$2.73 \cdot 10$	$3.73 \cdot 10$
$ B_r \max $	$8.68 \cdot 10^{-4}$	$9.05 \cdot 10^{-4}$	$9.28 \cdot 10^{-4}$	$1.26 \cdot 10^{-3}$	$1.54 \cdot 10^{-3}$	$1.79 \cdot 10^{-3}$	$2.35 \cdot 10^{-3}$	$3.36 \cdot 10^{-3}$
$ B_{\theta \max} $	10^{-2}					$1.01 \cdot 10^{-2}$	$1.02 \cdot 10^{-2}$	$1.01 \cdot 10^{-2}$
$Nu_{2 \min}$	3.820	0.687	0.366	0.192	0.176	0.070	0.174	0.097
\overline{Nu}_2	8.591	8.623	8.611	8.640	8.741	9.143	9.570	10.539
$Nu_{2 \max}$	12.031	16.652	17.217	16.491	16.192	16.380	16.968	21.012

учета теплоты джоулевой диссипации. В табл. 2 приведены аналогичные данные, полученные с учетом теплоты джоулевой диссипации.

Необходимо отметить, что локальные и осредненные числа Нуссельта ($Nu_{1 \min}$, \overline{Nu}_1 , $Nu_{1 \max}$), в силу заданного граничного условия для температуры второго рода на внутренней поверхности сферического слоя, принимают постоянное значение для всех режимов (поэтому они не приведены в табл. 1 и 2): $Nu_{1 \min} = \overline{Nu}_1 = Nu_{1 \max} = 10$.

На рис. 1–5 представлены результаты расчетов, позволяющие проследить влияние числа Грасгофа на тепловое и магнитогидродинамическое поле движения жидкости в сферическом слое.

На рис. 1 приведены результаты расчетов (I — расчет без учета теплоты джоулевой диссипации; II — расчет с учетом теплоты джоулевой диссипации) для $Gr = 10^2$ (режим 1, табл. 1 и 2). Без учета теплоты джоулевой диссипации (рис. 1, I, a) теплообмен в слое осуществляется теплопроводностью. Изотермы представляют собой концентрические окружности. Значения локальных чисел Нуссельта на внутренней и внешней поверхностях слоя совпадают с осредненными (рис. 1, I, e). Теплообмен на внутренней поверхности слоя интенсивнее, чем на внешней ($\overline{Nu}_1 > \overline{Nu}_2$, такая ситуация характерна для всех режимов табл. 1). В слое образуются две крупномасштабные конвективные ячейки (рис. 1, I, б) и два крупномасштабных вихря (рис. 1, I, в). В конвективной

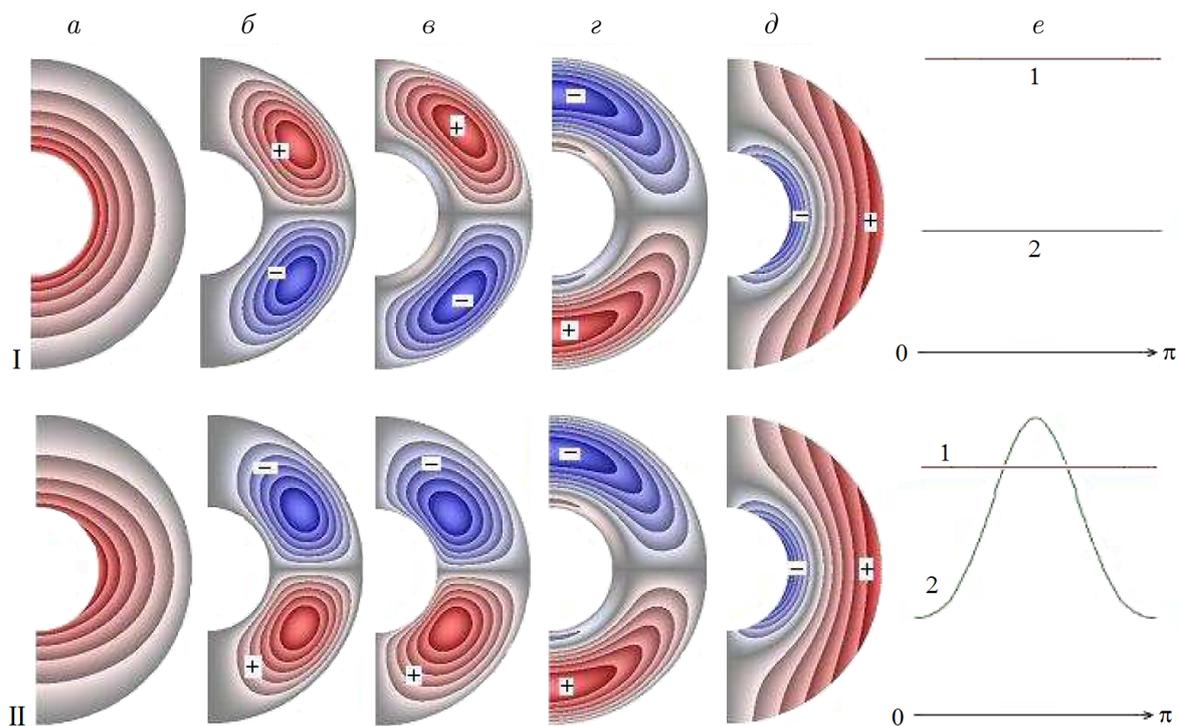


Рис. 1. Поля температуры (*a*), функции тока (*б*), вихря (*в*), радиальной (*г*) и меридиональной (*д*) составляющих магнитной индукции, распределение локальных чисел Нуссельта на внутренней 1 и внешней 2 поверхностях сферического слоя (*e*). $Gr = 10^2$

ячейке и вихре северного полушария жидкость движется против часовой стрелки (значения положительные, знак “+”), а южного — по часовой (значения отрицательные, знак “-”). В поле радиальной составляющей магнитной индукции (рис. 1, I, *г*) образуются две “магнитные ячейки”, которые в северном полушарии принимают отрицательные значения, за исключением небольшой области у внутренней поверхности, где они положительные, а в южном — положительные, за исключением небольшой области у внутренней поверхности, где они отрицательные. Значения меридиональной составляющей магнитной индукции (рис. 1, I, *д*) положительные у внешней поверхности слоя и отрицательные у внутренней.

Учет теплоты джоулевой диссипации (рис. 1, II) приводит к значительным изменениям расчетных полей по сравнению с результатами, приведенными на рис. 1, I. Механизм теплообмена в слое изменяется с кондуктивного на конвективный. Поле температуры (рис. 1, II, *a*) и распределение локальных чисел Нуссельта (рис. 1, II, *e*) перестраиваются. На рис. 1, II, *e* представлено распределение чисел Нуссельта, которое на внешней поверхности слоя при значении угла широты $\theta \sim \pi/2$ имеет максимум.

Теплообмен на внутренней поверхности слоя интенсивнее, чем на внешней. Такая ситуация характерна для режимов 1–7 (табл. 2). В слое образуются две крупномасштабные конвективные ячейки (рис. 1, II, *б*) и два крупномасштабных вихря (рис. 1, II, *в*). В отличие от результатов, приведенных на рис. 1, I, *б* и *в*, направление движения жидкости в конвективных ячейках и вихрях (рис. 1, II, *б* и *в*) изменяется на противоположное. Это происходит за счет вклада теплоты джоулевой диссипации. Поля радиальной и меридиональной составляющих магнитной индукции (рис. 1, II, *г* и *д*) практически не изменяются по сравнению с результатами, приведенными на рис. 1, I, *г* и *д*.

На рис. 2 приведены результаты расчетов для $Gr = 10^3$ (режим 3, табл. 1 и 2). Без учета теплоты джоулевой диссипации теплообмен в слое осуществляется конвекцией (рис. 2, I). Основное изменение температуры происходит в области полюсов и вблизи внутренней поверхности сферического слоя в экваториальной плоскости (рис. 2, I, *a*). Распределение чисел Нуссельта на внешней поверхности слоя при $\theta \sim \pi/2$ имеет минимум. В слое образуются две крупномасштабные конвективные ячейки (рис. 2, I, *б*) и два крупномасштабных вихря (рис. 2, I, *в*). С увеличением числа Грасгофа форма вихрей (рис. 2, I, *в*) изменяется по сравнению с результатом, представленным на рис. 1, I, *в*. Направление движения жидкости в конвективных ячейках и вихрях (рис. 2, I, *б* и *в*) такое же, как для результатов, представленных на рис. 1, I, *б* и *в*. Поля радиальной и меридиональной составляющих магнитной индукции (рис. 2, I, *г* и *д*) практически не изменяются по сравнению с результатами, представленными на рис. 1, I, *г* и *д*.

При учете теплоты джоулевой диссипации (рис. 2, II) происходят значительные изменения расчетных полей по сравнению с результатами, приведенными на рис. 2, I. Несмотря на то что теплообмен также осуществляется конвекцией, поле температуры и распределение локальных чисел Нуссельта изменяются (рис. 2, II, *a* и *e*). Основное изменение температуры происходит в экваториальной плоскости. Распределение чисел Нуссельта на внешней поверхности слоя при $\theta \sim \pi/2$ имеет максимум. То есть учет теплоты джоулевой диссипации приводит к изменению характера распределения локальных чисел Нуссельта на внешней поверхности слоя на противоположный (рис. 2, II, *e*) по сравнению с результатом, приведенным на рис. 2, I, *e*.

Гидродинамическая структура в слое (рис. 2, II, *б* и *в*) характеризуется изменением формы и расположением конвективных ячеек и вихрей по сравнению с результатом, приведенным на рис. 2, I, *б* и *в*. Учет теплоты джоулевой диссипации изменяет

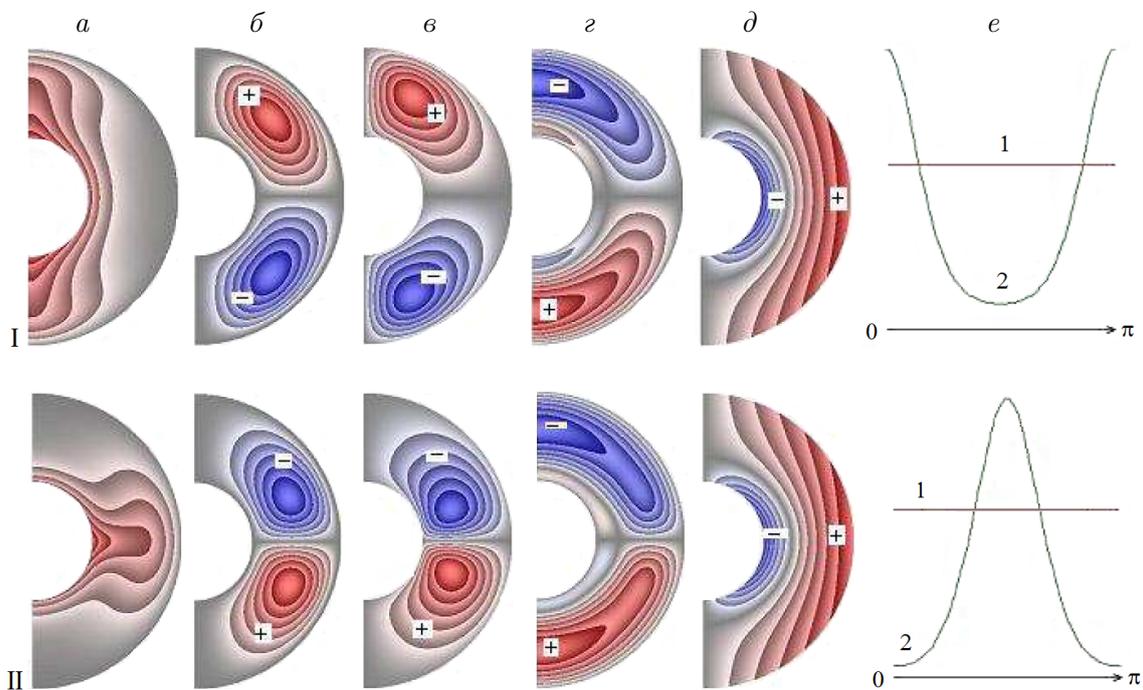


Рис. 2. Поля температуры (*a*), функции тока (*б*), вихря (*в*), радиальной (*г*) и меридиональной (*д*) составляющих магнитной индукции, распределение локальных чисел Нуссельта на внутренней 1 и внешней 2 поверхностях сферического слоя (*e*). $Gr = 10^3$

направление движения жидкости в конвективных ячейках и вихрях (рис. 2, II, б и в) на противоположное (рис. 2, I, б и в). Поле радиальной составляющей магнитной индукции (рис. 2, II, г) претерпевает изменения по сравнению с результатом, представленным на рис. 2, I, г: “магнитные ячейки” удлиняются, занимая практически всю область. Поле меридиональной составляющей магнитной индукции (рис. 2, II, д) практически не изменилось по сравнению с результатом, приведенным на рис. 2, I, д.

На рис. 3 приведены результаты расчетов для $Gr = 10^4$ (режим 5, табл. 1 и 2). Дальнейшее увеличение числа Грасгофа приводит к качественным и количественным изменениям расчетных полей по сравнению с результатами, приведенными на рис. 2, как без учета теплоты джоулевой диссипации, так и при ее учете.

Без учета теплоты джоулевой диссипации (рис. 3, I) теплообмен в слое осуществляется конвекцией. Поле температуры (рис. 3, I, а) значительно отличается от полученных выше результатов. Основное изменение температуры происходит в тонком пристеночном слое у внутренней границы сферической прослойки, в области полюсов и в экваториальной области. Распределение чисел Нуссельта на внешней поверхности носит “волновой” характер. Распределение имеет два минимума при $\theta \sim \pi/4, 3\pi/4$ и один максимум при $\theta \sim \pi/2$. Гидродинамическая структура жидкости в слое (рис. 3, I, б и в) представлена двумя крупномасштабными (в основной области) и двумя зарождающимися мелкомасштабными (в области полюсов) конвективными ячейками (рис. 3, I, б) и вихрями (рис. 3, I, в). В крупномасштабных конвективной ячейке и вихре в северном полушарии жидкость движется по часовой стрелке, а в южном — против.

Направления движения жидкости в крупно- и мелкомасштабных конвективных ячейках и вихрях (рис. 3, I, б и в) противоположные. Оказывается, что увеличение интен-

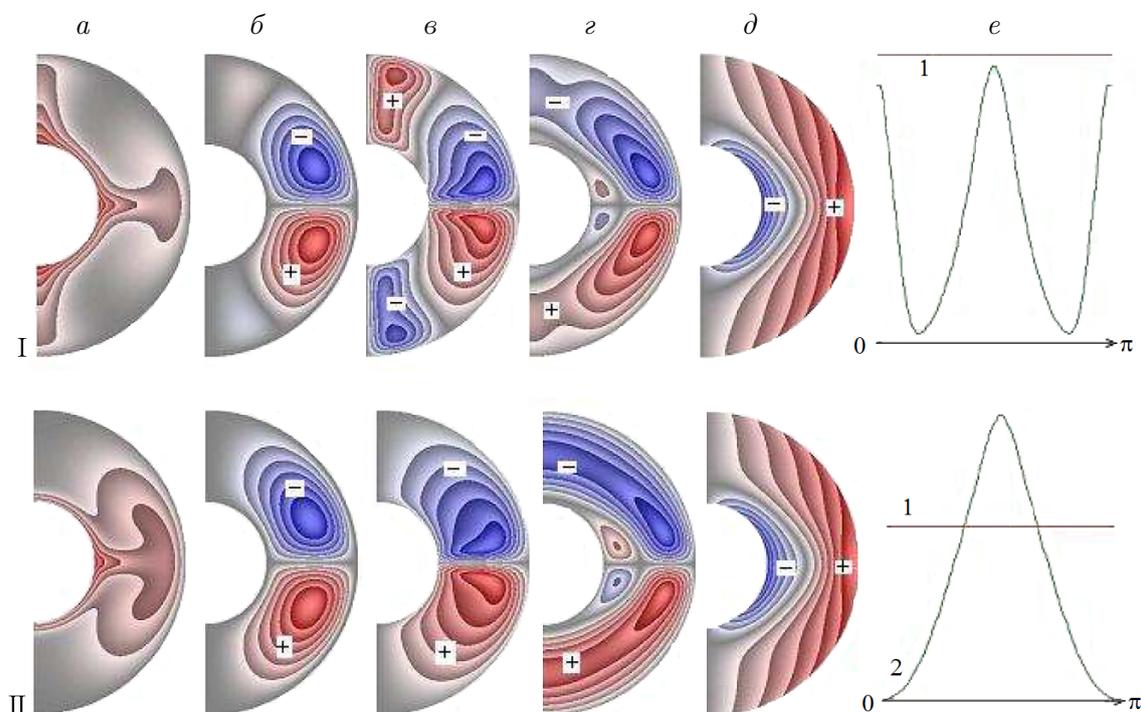


Рис. 3. Поля температуры (а), функции тока (б), вихря (в), радиальной (г) и меридиональной (д) составляющих магнитной индукции, распределение локальных чисел Нуссельта на внутренней 1 и внешней 2 поверхностях сферического слоя (е). $Gr = 10^4$

сивности конвекции на порядок (рис. 2, I, б и в; $Gr = 10^3$) по сравнению с результатом, представленным на рис. 3, I, б и в ($Gr = 10^4$), приводит к изменению гидродинамической структуры течения жидкости. По-видимому, это происходит вследствие возросшего влияния сил плавучести. Поле радиальной составляющей магнитной индукции (рис. 3, I, г) представлено двумя крупномасштабными “магнитными ячейками” в основной области и двумя мелкомасштабными (напоминающими по форме миндалины) у внутренней поверхности слоя. В крупномасштабной “магнитной ячейке” северного полушария значения радиальной составляющей магнитной индукции отрицательные, а южного — положительные. В мелкомасштабных “магнитных ячейках” значения противоположные. В отличие от поля меридиональной составляющей магнитной индукции для $Gr = 10^3$ (рис. 2, I, д) изолинии меридиональной составляющей магнитной индукции (рис. 3, I, д, $Gr = 10^4$) искривляются в экваториальной плоскости, увеличивая область ее отрицательных значений.

Учет теплоты джоулевой диссипации (рис. 3, II) приводит к изменению расчетных полей по сравнению с результатами, представленными на рис. 3, I. Теплообмен в слое также осуществляется конвекцией, но поле температуры и распределение чисел Нуссельта (рис. 3, II, а и е) изменяются по сравнению с результатами, приведенными на рис. 3, I, а и е. Основное изменение температуры происходит в экваториальной области, а поле температуры по форме напоминает “ушную раковину”. Распределение чисел Нуссельта на внешней поверхности слоя при $\theta \sim \pi/2$ имеет максимум. Поля функции тока и вихря в слое представлены двумя крупномасштабными конвективными ячейками и вихрями (рис. 3, II, б и в). При этом учет теплоты джоулевой диссипации не изменяет направление движения жидкости в крупномасштабных конвективных ячейках и вихрях (рис. 3, I, б и в; 3, II, б и в). Из этого следует, что для данного режима влияние сил плавучести на гидродинамику жидкости в слое становится эквивалентным вкладу теплоты джоулевой диссипации. Поле радиальной составляющей магнитной индукции (рис. 3, II, г) по форме “магнитных ячеек” отличается от результата, представленного на рис. 3, I, г. Поле меридиональной составляющей магнитной индукции (рис. 3, II, д) изменяется незначительно по сравнению с результатом, представленным на рис. 3, I, д.

При анализе полей функции тока и вихря, приведенных на рис. 3, I, б и в, когда в области полюсов появляются вторичные мелкомасштабные конвективные ячейки и вихри, возникает вопрос: при каком значении числа Грасгофа эти вторичные мелкомасштабные конвективные ячейки и вихри исчезнут, гидродинамическая структура жидкости в слое стабилизируется, направление движения жидкости в конвективных ячейках и вихрях не будет изменяться как при учете теплоты джоулевой диссипации, так и без ее учета. В этой связи проделан вычислительный эксперимент, в результате которого было определено критическое значение числа Грасгофа $Gr^* = 2.7 \cdot 10^4$, при котором наступает данная ситуация.

На рис. 4 приведены результаты расчетов для критического значения числа Грасгофа $Gr^* = 2.7 \cdot 10^4$ (режим б, табл. 1 и 2). При критическом значении числа Грасгофа как при учете, так и без учета теплоты джоулевой диссипации в слое образуются две конвективные ячейки и два вихря (рис. 4, I, II, б и в), в которых направление движения жидкости не изменяется. Это говорит об эквивалентном вкладе сил плавучести (рис. 4, I, б и в) и теплоты джоулевой диссипации (рис. 4, II, б и в). Поля температуры при $Gr^* = 2.7 \cdot 10^4$ (рис. 4, I, II, а) аналогичны соответствующим полям температуры при $Gr = 10^4$ (рис. 3, I, II, а). Без учета теплоты джоулевой диссипации поля радиальной и меридиональной составляющих магнитной индукции (рис. 4, I, г и д) и распреде-

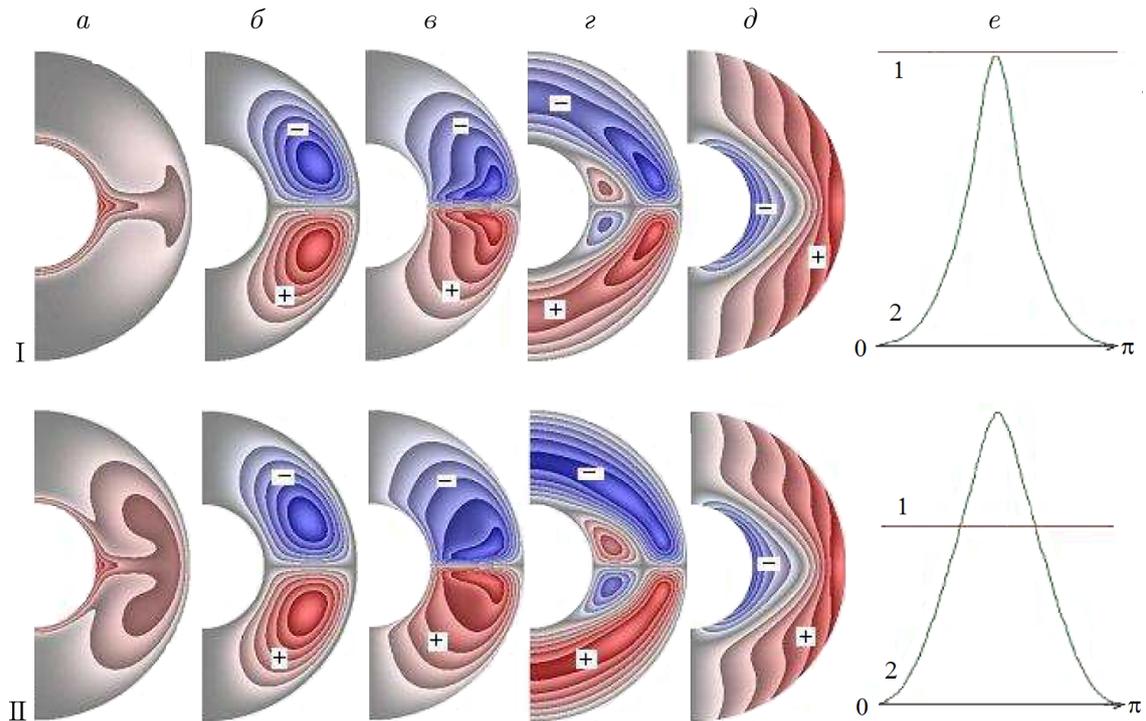


Рис. 4. Поля температуры (*a*), функции тока (*б*), вихря (*в*), радиальной (*г*) и меридиональной (*д*) составляющих магнитной индукции, распределение локальных чисел Нуссельта на внутренней 1 и внешней 2 поверхностях сферического слоя (*е*). $Gr^* = 2.7 \cdot 10^4$

ление чисел Нуссельта (рис. 4, I, *e*) изменяются по сравнению с результатами, представленными на рис. 3, I, *г*, *д* и *е*. При учете теплоты джоулевой диссипации все расчетные поля (рис. 4, II) качественно практически не отличаются от результатов, приведенных на рис. 3, II.

На рис. 5 приведены результаты расчетов для $Gr = 10^5$ (режим 8, табл. 1 и 2). Увеличение числа Грасгофа приводит к значительным изменениям расчетных полей по сравнению с результатами, приведенными на рис. 1–4. Отличия особенно проявляются для случая, когда теплота джоулевой диссипации не учитывается (рис. 5, I). Теплообмен в слое осуществляется конвекцией. Поле температуры (рис. 5, I, *a*), в отличие от всех приведенных выше полей температуры, имеет свою специфику: основное изменение температуры происходит в тонком пристеночном слое у внутренней границы сферической прослойки и в области полюсов (здесь интенсивность теплообмена максимальная), а в основной области сферического слоя интенсивность теплообмена мала. Распределение чисел Нуссельта на внешней поверхности слоя (рис. 5, I, *e*) при $\theta \sim \pi/2$ имеет минимум. Гидродинамическая структура жидкости в слое (рис. 5, I, *б* и *в*) представлена двумя крупномасштабными конвективными ячейками (рис. 5, I, *б*) и двумя крупномасштабными вихрями (рис. 5, I, *в*), здесь форма вихрей отличается от всех результатов, полученных выше.

В конвективной ячейке и вихре северного полушария жидкость движется против часовой стрелки, а южного — по часовой. То есть увеличение интенсивности конвекции приводит к изменению направления движения жидкости в конвективной ячейке и вихре (рис. 5, I, *б* и *в*, $Gr = 10^5$) на противоположное по сравнению с результатом, приведенным на рис. 4, I, *б* и *в*, $Gr = 2.7 \cdot 10^4$.

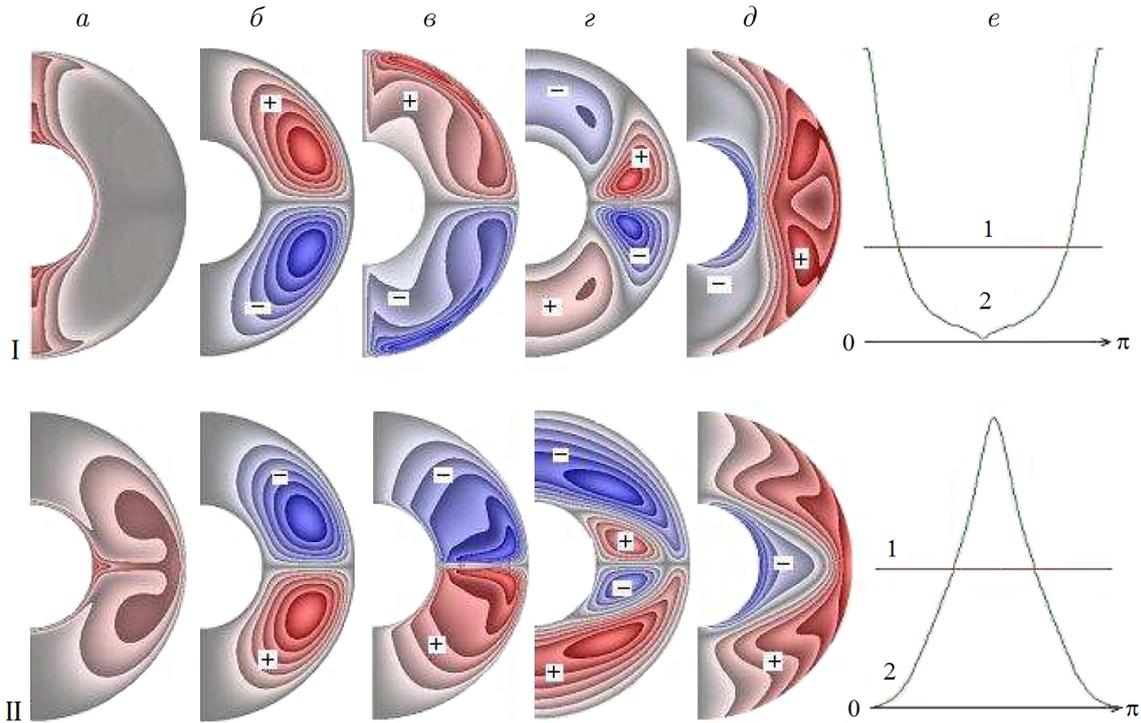


Рис. 5. Поля температуры (*a*), функции тока (*б*), вихря (*в*), радиальной (*г*) и меридиональной (*д*) составляющих магнитной индукции, распределение локальных чисел Нуссельта на внутренней 1 и внешней 2 поверхностях сферического слоя (*e*). $Gr = 10^5$

В каждом полушарии сферического слоя поле радиальной составляющей магнитной индукции (рис. 5, I, *г*) представлено двумя “магнитными ячейками” в области полюса и экватора. В северном полушарии значение “магнитной ячейки” радиальной составляющей магнитной индукции в области полюса отрицательное, а в области экватора — положительное. В южном полушарии тенденция обратная. Значения меридиональной составляющей магнитной индукции (рис. 5, I, *д*) положительные у внешней поверхности слоя и отрицательные у внутренней. Область отрицательных значений меридиональной составляющей магнитной индукции (рис. 5, I, *д*) трансформируется в отличие от результата, приведенного на рис. 4, I, *д*. Изолинии меридиональной составляющей магнитной индукции (рис. 5, I, *д*) искривляются, а в области, прилегающей к внешней поверхности слоя, образуются три “магнитные ячейки” (значения которых положительные) меридиональной составляющей магнитной индукции.

При учете теплоты джоулевой диссипации расчетные поля (рис. 5, II) качественно практически не отличаются (за исключением поля магнитной индукции) от результатов, приведенных на рис. 4, II. Сравнение гидродинамической структуры течения жидкости в слое при неучете (рис. 5, I, *б* и *в*) и учете (рис. 5, II, *б* и *в*) теплоты джоулевой диссипации показывает, что направление движения жидкости в конвективных ячейках и вихрях изменилось на противоположное.

Изменение направления движения жидкости в конвективных ячейках и вихрях (рис. 5, I, *б* и *в*), если не учитывать теплоту джоулевой диссипации, по сравнению с результатом, приведенным на рис. 4, I, *б* и *в*, обязано возросшему влиянию сил плаучести. Следовательно, если не учитывать теплоту джоулевой диссипации, существует такое критическое значение числа Грасгофа Gr^{**} , при достижении которого происходит

изменение направления движения жидкости в конвективных ячейках и вихрях на противоположное. С целью доказать это проведен вычислительный эксперимент, в результате которого удалось определить критическое значение числа Грасгофа $Gr^{**} = 9 \cdot 10^4$, после которого направление движения жидкости в конвективных ячейках и вихрях изменяется на противоположное. Таким образом, оказалось, что имеются два критических значения числа Грасгофа ($Gr^* = 2.7 \cdot 10^4$ и $Gr^{**} = 9 \cdot 10^4$), которые отвечают за смену направления движения жидкости в конвективных ячейках и вихрях. При этом эволюцию изменения направления движения жидкости в конвективных ячейках и вихрях можно интерпретировать следующим образом:

1. В интервале изменения числа Грасгофа $[10^2 - 10^3]$ направления движения жидкости в конвективных ячейках и вихрях в северном и южном полушариях соответствуют следующим знакам:
 - без учета теплоты джоулевой диссипации (режимы 1–3, табл. 1) \pm ;
 - при учете теплоты джоулевой диссипации (режимы 1–3, табл. 2) \mp .
2. В интервале изменения числа Грасгофа $[5 \cdot 10^3 - 5 \cdot 10^4]$ направления движения жидкости в конвективных ячейках и вихрях в северном и южном полушариях соответствуют следующим знакам:
 - без учета теплоты джоулевой диссипации (крупномасштабные конвективные ячейки и вихри; режимы 4–7, табл. 1) \mp ;
 - при учете теплоты джоулевой диссипации (режимы 4–7, табл. 2) \mp .
3. Начиная со значения числа Грасгофа $Gr^{**} = 9 \cdot 10^4$ и по $Gr^{**} = 9 \cdot 10^5$ направления движения жидкости в конвективных ячейках и вихрях в северном и южном полушариях соответствуют следующим знакам:
 - без учета теплоты джоулевой диссипации (режим 8, табл. 1) \pm ;
 - при учете теплоты джоулевой диссипации (режим 8, табл. 2) \mp .

По рассчитанным осредненным числам Нуссельта на внешней поверхности сферического слоя \overline{Nu}_2 при учете теплоты джоулевой диссипации (табл. 2, восемь расчетных точек) методом наименьших квадратов получено уравнение подобия теплообмена

$$\overline{Nu}_2 = 7.394 Ra_{R_1}^{0.0236}, \quad (6)$$

где $\overline{Nu}_2 = \frac{\bar{a}_2 R_2}{\lambda}$. Область изменения числа Рэлея в уравнении (6)

$$Ra_{R_1} = \frac{g \beta q R_1^4}{\nu^2 \lambda} Pr = 10^2 - 10^5.$$

Величина достоверности данной аппроксимации высокая — коэффициент детерминации R -квадрат = 0.977. Это свидетельствует о том, что результаты аппроксимации хорошо согласуются с численными результатами.

Из уравнения подобия теплообмена (6) следует, что при учете теплоты джоулевой диссипации степень зависимости осредненного числа Нуссельта \overline{Nu}_2 от числа Рэлея (0.0236) незначительная.

Заключение

Из анализа полученных результатов можно сделать следующие выводы:

1. Численно определены два критических значения числа Грасгофа — $Gr^* = 2.7 \cdot 10^4$ и $Gr^{**} = 9 \cdot 10^4$.

2. Первое критическое число $Gr^* = 2.7 \cdot 10^4$ определяет пороговое значение, при котором не происходит изменение направления движения жидкости в конвективных ячейках и вихрях как без учета, так и при учете теплоты джоулевой диссипации (вклад сил плавучести уравнивается вкладом теплоты джоулевой диссипации).
3. До первого порогового значения числа Грасгофа ($Gr^* = 2.7 \cdot 10^4$) учет теплоты джоулевой диссипации изменяет направление движения жидкости в конвективных ячейках и вихрях на противоположное по сравнению с результатом, где теплота джоулевой диссипации не учитывалась.
4. Второе критическое число $Gr^{**} = 9 \cdot 10^4$ определяет пороговое значение, при котором происходит изменение направления движения жидкости в конвективных ячейках и вихрях без учета и при учете теплоты джоулевой диссипации (вклад сил плавучести превосходит вклад теплоты джоулевой диссипации).
5. Для режимов 2–4, 8 (см. табл. 1 и рис. 2, 5) и для режимов 1–8 (см. табл. 2 и рис. 1–5) распределения локальных чисел Нуссельта на внутренней и внешней поверхностях сферического слоя имеют точки пересечения, которые характеризуются равенством тепловых потоков на внутренней и внешней поверхностях слоя.
6. Без учета теплоты джоулевой диссипации для режимов 2–4, 8 (см. табл. 1) максимальное значение Нуссельта на внешней поверхности сферического слоя $Nu_{2\max}$ превосходит осредненное значение числа Нуссельта на внутренней поверхности $\overline{Nu}_1 = 10$. При учете теплоты джоулевой диссипации такая закономерность сохраняется для всех режимов, указанных в табл. 2.
7. Математическая модель и полученные результаты могут оказаться полезными при исследовании конвективного теплообмена электропроводящей жидкости в сферических концентрических слоях при подводе тепла к внутренней сфере, например в атомной энергетике, космических технологиях, задачах гео- и астрофизики, когда ускорение свободного падения направлено к центру сферического слоя.

Список литературы / References

- [1] Мартыненко О.Г., Соковишин Ю.А. Свободно-конвективный теплообмен: Справочник. Минск: Наука и техника, 1982. 400 с.
Martynenko, O.G., Sokovishin, Yu.A. Free-convection heat transfer: Directory. Minsk: Nauka i Tekhnika, 1982. 400 p. (In Russ.)
- [2] Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972. 402 с.
Gershuni, G.Z., Zhuhovickij, E.M. Convective stability of incompressible fluid. Moscow: Nauka, 1972. 402 p. (In Russ.)
- [3] Veber, H., Pou, R., Bishop, E., Skenlen, D. Heat transfer by free convection in closed spherical containers // J. of Heat Transfer. Transactions of the ASME. Series C. 1975. No. 4. P. 27.
- [4] Chow, M.Y., Akins, R.G. Pseudo steady state natural convection inside spheres // J. of Heat Transfer. Transactions of the ASME. Series C. 1975. Vol. 97, No. 1. P. 54–59.
- [5] Mcbain, G.D. Convection in a horizontally heated sphere // J. of Fluid Mech. 2001. Vol. 438. P. 1–10.

- [6] **Mochimary, Yo.** Transient natural convection heat transfer in a spherical cavity // Heat Transfer — Japanese Res. 1989. Vol. 18, No. 4. P. 9–19.
- [7] **Whitley, H.G., Vachon, R.I.** Transient laminar free convection in closed spherical containers // J. of Heat Transfer. Transactions of the ASME. Ser. C. 1972. Vol. 94. P. 360–366.
- [8] **Ряжских В.И., Слюсарев М.И., Зайцев В.А.** Анализ свободной термоконвекции в сферических резервуарах при граничных условиях второго рода // Вестн. ВГТУ. Сер. Энергетика. 2004. № 7-4. С. 5–10.
Ryazhskikh, V.I., Slyusarev, M.I., Zaytsev, V.A. Analysis of free thermal convection in spherical tanks under the boundary conditions of the second kind // Vestn. VGTU. Seriya Energetika. 2004. No. 7-4. P. 5–10. (In Russ.)
- [9] **Hutchins, J., Marschall, E.** Pseudosteady-state natural convection heat transfer inside spheres // Intern. J. of Heat and Mass Transfer. 1989. Vol. 32, No. 11. P. 2047–2053.
- [10] **Ряжских В.И., Слюсарев М. И., Богер А. А., Зайцев В. А.** Синтез математической модели естественной конвекции вязкой несжимаемой жидкости в сферической емкости // Вестн. ВГТУ. Сер. Энергетика. 2003. № 7-3. С. 14–17.
Ryazhskikh, V.I., Slyusarev, M.I., Boger, A.A., Zaytsev, V.A. Synthesis of a mathematical model of natural convection of a viscous incompressible fluid in a spherical container // Vestn. VGTU. Seriya Energetika. 2003. No. 7-3. P. 14–17. (In Russ.)
- [11] **Драхлин Е.** О тепловой конвекции в сферической полости // Журн. техн. физики. 1952. Т. 22, № 5. С. 829–831.
Drahlin, E. About heat convection in a spherical cavity // J. of Applied Physics. 1952. Vol. 22, No. 5. P. 829–831. (In Russ.)
- [12] **Шайдуров Г.Ф.** О конвективном теплопереносе через шаровую полость // Журн. техн. физики. 1958. Т. 28, No. 4. С. 855–861.
Shaydurov, G.F. About convective heat transfer through the ball cavity // J. of Applied Physics. 1958. Vol. 28, No. 4. P. 855–861. (In Russ.)
- [13] **Пустовойт С.П.** О нестационарной тепловой конвекции в сферической полости // Прикл. матем. и механика. 1958. Т. 22, № 4. С. 568–572.
Pustovoyt, S.P. On non-stationary thermal convection in a spherical cavity // J. of Appl. Math. and Mechanics. 1958. Vol. 22, No. 4. P. 568–572. (In Russ.)
- [14] **Solov'ev, S.V.** Simulation of heat exchange in the liquid core of the Earth // J. of Eng. Physics and Thermophys. 2017. Vol. 90, No. 4. P. 873–882.
- [15] **Solov'ev, S.V.** Heat transfer modeling of an electroconductive liquid in a spherical layer // Siberian J. of Numer. Mathematics. 2015. Vol. 18, No. 4. P. 435–451.
- [16] **Соловьев С.В.** Моделирование конвективного теплообмена электропроводной жидкости в шаровой полости. Алгоритм решения // Инженерно-физический журн. 2015. Т. 88, № 6. С. 1370–1385.
Solov'ev, S.V. Simulation of convective heat exchange in the electrically conducting liquid in a spherical cavity. Algorithm of solution // J. of Eng. Physics and Thermophys. 2015. Vol. 88, No. 6. P. 1416–1431.
- [17] **Solov'ev, S.V.** Influence of joule dissipation on heat exchange and magnetic hydrodynamics of liquid in a spherical layer. Pt I // J. of Eng. Physics and Thermophys. 2017. Vol. 90, No. 5. P. 1251–1265.

*Поступила в редакцию 27 ноября 2018 г.,
с доработки — 16 апреля 2019 г.*

Simulation of electrically conductive liquid convection in a spherical layer when heat is applied to the inner sphere

SOLOV'EV, SERGEY V.

Pacific National University, Khabarovsk, 680035, Russia

Corresponding author: Solov'ev, Sergey V., e-mail: solovjovsv@rambler.ru

The Boussinesq approximation is used for modelling a large class of problems of convective heat transfer in spherical concentric layers in which the gravity vector is directed vertically downwards. But for problems of geophysics and astrophysics there is a fundamental difference, the gravity vector is directed along the radius to the center of the spherical layer. Therefore, the study of convective heat transfer in spherical layers, when the vector of gravitational acceleration is directed along the radius to the center of the spherical layer, is of independent interest. In this paper, the influence of the Grashof number, the Joule dissipation heat on the fluid flow structure, temperature field, magnetic induction, and the distribution of Nusselt numbers when heat is applied from below are studied.

To solve the problem, the finite element method is used. In a dimensionless formulation, the problem is solved taking into account both the heat of the Joule dissipation, magnetic, inertial, viscous and lifting forces in a spherical coordinate system and the symmetry in longitude.

The stationary fields of temperature, stream functions, vortex strength, radial and meridional components of magnetic induction and the distribution of local Nusselt numbers of electro conductive liquid in a concentric spherical layer for different Grashof numbers with and without accounting for the heat of Joule dissipation are obtained when heat is applied to the inner sphere. Two critical values of the Grashof number are numerically determined. The equation of heat exchange similarity is obtained, when the acceleration of gravity is directed to the center of the spherical layer.

The mathematical model and the presented results may be useful for the study of convective heat exchange of electrically conducting fluid in space technologies and in the geophysical and astrophysical problems.

Keywords: mathematical modeling, convective heat transfer, Joule dissipation, magnetic hydrodynamics, spherical layer, heat exchange similarity equation.

Cite: Solov'ev, S.V. Simulation of electrically conductive liquid convection in a spherical layer when heat is applied to the inner sphere // Computational Technologies. 2019. Vol. 24, No. 5. P. 61–74. DOI: 10.25743/ICT.2019.24.5.006. (In Russ.)

Received November 27, 2018

Received in revised form April 16, 2019