

Численное моделирование динамики закрученного безимпульсного турбулентного следа

А. Г. ДЕМЕНКОВ^{1,2}, Г. Г. ЧЕРНЫХ^{3,*}

¹Институт теплофизики им. С.С. Кутателадзе СО РАН, Новосибирск, Россия

²Новосибирский государственный технический университет, Россия

³Институт вычислительных технологий СО РАН, Новосибирск, Россия

*Контактный e-mail: chernykh@ict.nsc.ru

С применением математической модели, включающей осредненные уравнения движения и дифференциальные уравнения переноса нормальных рейнольдсовых напряжений и скорости диссипации, выполнено численное моделирование эволюции безимпульсного закрученного турбулентного следа с ненулевым моментом количества движения за телом вращения. Получено, что начиная с расстояний порядка 1000 диаметров от тела течение становится автомодельным. На основе анализа результатов численных экспериментов построены упрощенные математические модели дальнего следа.

Ключевые слова: закрученный турбулентный след с нулевым суммарным избыточным импульсом, математическая модель, автомодельное вырождение.

Библиографическая ссылка: Деменков А.Г., Черных Г.Г. Численное моделирование динамики закрученного безимпульсного турбулентного следа // Вычислительные технологии. 2018. Т. 23, № 5. С. 37–48. DOI: 10.25743/ICT.2018.23.5.004.

Введение

Закрученные турбулентные струйные течения представляют интерес в связи с разработкой и использованием различного рода энергетических и химико-технологических устройств, при исследовании обтекания тел, в задачах гидродинамики окружающей среды и др. Хорошо известным примером закрученного турбулентного струйного течения является течение в закрученном турбулентном следе за телом вращения (см. [1–13], где можно найти более полную библиографию). Особо следует отметить работы [5, 7], в которых приведены результаты выполненных в ИГиЛ СО РАН уникальных детальных лабораторных измерений в закрученных турбулентных следах с варьируемыми суммарными избыточным импульсом и моментом количества движения. Один из вариантов течения — безимпульсный закрученный турбулентный след [5]. Этому варианту течения соответствует частный случай перемещения тела с движителем, тяга которого компенсирует силу гидродинамического сопротивления, но в потоке остается ненулевая интегральная закрутка.

Результаты расчетно-теоретического анализа вырождения закрученных турбулентных следов, основанного на ранних экспериментальных исследованиях, обсуждаются в [2]. В этой работе изложены результаты расчетов с применением упрощенной e -модели турбулентности и указаны недостатки использования алгебраических моделей рейнольдсовых напряжений и более общих дифференциальных моделей второго порядка, которые, возможно, обусловлены неполнотой экспериментальных данных [7]. Оценки законов автомодельного вырождения закрученных турбулентных следов приведены в [1, 11]. Расчетно-теоретическому моделированию закрученных следов посвящены также работы [3, 4], в которых исследовались автомодельность и законы вырождения для следов с различной степенью компенсации по импульсу и моменту количества движения. В этих работах используется $e \sim \varepsilon$ -модель турбулентности. Вырождение рейнольдсовых напряжений не анализируется. Продемонстрированы сильная чувствительность дефекта продольной компоненты скорости к первоначальному дисбалансу импульса и слабая зависимость от него окружной компоненты скорости, энергии турбулентности и ширины следа. Анализ асимптотического поведения возмущений средней скорости позволил установить, что наличие даже небольшой тангенциальной составляющей скорости заметно влияет на картину течения.

Численное моделирование закрученного безимпульсного турбулентного следа с ненулевым моментом количества движения для небольших расстояний от тела выполнено в [6]. Показано, что лишь математическая модель, включающая дифференциальные уравнения переноса нормальных рейнольдсовых напряжений, позволяет дать удовлетворительное описание экспериментальных данных. Обзор теоретических и экспериментальных работ на момент написания книги приведен в [8].

В работе [10] на основе полуэмпирической модели турбулентности второго порядка осуществлено численное моделирование ряда свободных турбулентных течений, включая закрученный безимпульсный турбулентный след. Результаты численного моделирования свободных турбулентных течений сопоставлялись с известными данными лабораторных измерений и расчетами других авторов, они удовлетворительно согласуются. В этой работе приведен также обзор ряда известных теоретических и экспериментальных работ.

Закрученный турбулентный след за самодвижущимся телом (такой конфигурации соответствует вариант следа с двумя нулевыми законами сохранения суммарных избыточного импульса и момента количества движения) численно исследовался в [7, 9, 12]. Показано, что на расстояниях порядка и более 100 диаметров от тела течение становится практически бесдвиговым. Исследована автомодельность вырождения. Построены упрощенные математические модели дальнего турбулентного следа. Важная роль закрученным турбулентным спутным течениям отводится в связи с исследованием течений в ветро- и гидротурбинах [14, 15].

На основе анализа известных работ по численному моделированию безимпульсного закрученного турбулентного следа за телом можно сделать вывод об отсутствии подробного исследования вырождения течения на больших удалениях от тела на основе усовершенствованной математической модели [6, 9], результаты расчетов с применением которой хорошо согласуются с экспериментальными данными [5]. В настоящей работе выполнено численное моделирование эволюции дальнего безимпульсного закрученного турбулентного следа. Показано, что на расстояниях порядка и более 1000 диаметров от тела течение выходит на автомодельный режим. На основе анализа результатов расчетов построены упрощенные математические модели течения в дальнем безимпульс-

ном закрученном турбулентном следе. Выполненные исследования являются развитием и продолжением работ [6, 7, 9, 12, 13].

1. Постановка задачи

Численный анализ динамики турбулентного следа проводится с применением математической модели, включающей систему осредненных уравнений движения, неразрывности, переноса нормальных рейнольдсовых напряжений и скорости диссипации энергии турбулентности во вращательно-симметричном течении в приближении тонкого сдвигового слоя [6, 9, 16] в цилиндрической системе координат (x, r, φ) ; ось x противоположна направлению движения тела:

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \langle u'v' \rangle + \frac{\partial}{\partial x} \int_r^\infty \frac{[W^2 + \langle w'^2 \rangle - \langle v'^2 \rangle]}{r} dr - \frac{\partial(\langle u'^2 \rangle - \langle v'^2 \rangle)}{\partial x}, \quad (1)$$

$$U \frac{\partial W}{\partial x} + V \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{VW}{r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \langle v'w' \rangle - \frac{\langle v'w' \rangle}{r} - \frac{\partial \langle u'w' \rangle}{\partial x}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{V}{r} = 0, \quad (3)$$

$$U \frac{\partial \langle u'^2 \rangle}{\partial x} + V \frac{\partial \langle u'^2 \rangle}{\partial r} = -2(1 - C_2) \langle u'v' \rangle \frac{\partial U}{\partial r} - \frac{2}{3} \varepsilon - C_1 \frac{\varepsilon}{e} \left(\langle u'^2 \rangle - \frac{2}{3} e \right) + \frac{2}{3} C_2 P + \frac{C_s}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{re \langle v'^2 \rangle}{\varepsilon} \frac{\partial \langle u'^2 \rangle}{\partial r} \right), \quad (4)$$

$$U \frac{\partial \langle v'^2 \rangle}{\partial x} + V \frac{\partial \langle v'^2 \rangle}{\partial r} - 2 \frac{W}{r} \langle v'w' \rangle = 2(1 - C_2) \langle v'w' \rangle \frac{W}{r} - \frac{2}{3} \varepsilon - C_1 \frac{\varepsilon}{e} \left(\langle v'^2 \rangle - \frac{2}{3} e \right) + \frac{C_s}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{re}{\varepsilon} \left(\langle v'^2 \rangle \frac{\partial \langle v'^2 \rangle}{\partial r} - \frac{2 \langle v'w' \rangle^2}{r} \right) \right] - \frac{2C_s e}{r \varepsilon} \left[\langle v'w' \rangle \frac{\partial \langle v'w' \rangle}{\partial r} + \langle w'^2 \rangle \frac{\langle v'^2 \rangle - \langle w'^2 \rangle}{r} \right] + \frac{2}{3} C_2 P, \quad (5)$$

$$U \frac{\partial \langle w'^2 \rangle}{\partial x} + V \frac{\partial \langle w'^2 \rangle}{\partial r} + 2 \frac{W}{r} \langle v'w' \rangle = -2(1 - C_2) \langle v'w' \rangle \frac{\partial W}{\partial r} - \frac{2}{3} \varepsilon - C_1 \frac{\varepsilon}{e} \left(\langle w'^2 \rangle - \frac{2}{3} e \right) + \frac{C_s}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{re}{\varepsilon} \left(\langle v'^2 \rangle \frac{\partial \langle w'^2 \rangle}{\partial r} + \frac{2 \langle v'w' \rangle^2}{r} \right) \right] + \frac{2C_s e}{r \varepsilon} \left[\langle v'w' \rangle \frac{\partial \langle v'w' \rangle}{\partial r} + \langle w'^2 \rangle \frac{\langle v'^2 \rangle - \langle w'^2 \rangle}{r} \right] + \frac{2}{3} C_2 P, \quad (6)$$

$$U \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + V \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} = \frac{C_\varepsilon}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{re \langle v'^2 \rangle}{\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} \right) + \frac{\varepsilon}{e} (C_{\varepsilon 1} P - C_{\varepsilon 2} \varepsilon). \quad (7)$$

Здесь U, V, W, u', v', w' — продольная, радиальная и тангенциальная компоненты скорости осредненного и пульсационного движения; $\langle u'^2 \rangle, \langle v'^2 \rangle, \langle w'^2 \rangle, \langle u'v' \rangle, \langle u'w' \rangle, \langle v'w' \rangle$ — рейнольдсовы напряжения; $e = (\langle u'^2 \rangle + \langle v'^2 \rangle + \langle w'^2 \rangle)/2$ — энергия турбулентности; $\langle \rangle$ — знак осреднения. В правых частях уравнений (1), (2), (4)–(7) члены с молекулярной вязкостью отброшены в предположении малости.

Для определения касательных турбулентных напряжений применяются неравновесные алгебраические соотношения [6, 9, 17]

$$\langle u'v' \rangle = \alpha \langle v'^2 \rangle \frac{\partial U}{\partial r}, \quad (8)$$

$$\langle u'w' \rangle = \alpha \left(\langle u'v' \rangle \frac{\partial W}{\partial r} + \langle v'w' \rangle \frac{\partial U}{\partial r} \right), \quad (9)$$

$$\langle v'w' \rangle = \alpha \left(\langle v'^2 \rangle r \frac{\partial(W/r)}{\partial r} + \frac{W}{r} (\langle v'^2 \rangle - \langle w'^2 \rangle) \right), \quad (10)$$

где $\alpha = -\lambda_1 e/\varepsilon$, $\lambda_1 = (1 - C_2)/(C_1 + P/\varepsilon - 1)$. В уравнениях (4)–(7) и соотношениях (8)–(10) величина P – порождение энергии турбулентности за счет осредненного движения:

$$P = - \left(\langle u'v' \rangle \frac{\partial U}{\partial r} + \langle v'w' \rangle r \frac{\partial(W/r)}{\partial r} + \langle u'w' \rangle \frac{\partial W}{\partial x} + \langle u'^2 \rangle \frac{\partial U}{\partial x} + \langle v'^2 \rangle \frac{\partial V}{\partial r} + \langle w'^2 \rangle \frac{V}{r} \right).$$

Величины $C_1 = 2.2$, $C_2 = 0.55$, $C_{\varepsilon_1} = 1.44$, $C_{\varepsilon_1} = 1.92$ – известные эмпирические постоянные.

Назовем систему дифференциальных уравнений (1)–(7) и алгебраических соотношений (8)–(10) математической моделью 1.

Начальные поперечные распределения осредненных продольной и тангенциальной компонент скорости, скорости диссипации и нормальных рейнольдсовых напряжений U , W , ε , $\langle u'_i u'_i \rangle$ ($i = 1, 2, 3$) задавались исходя из лабораторных экспериментов [5]. Опыты проведены при числе Рейнольдса $Re = U_0 D/\nu = 26\,000$, где ν – кинематический коэффициент вязкости; U_0 – скорость невозмущенной жидкости; D – диаметр тела.

При $r \rightarrow \infty$ ставились условия невозмущенного потока, при $r = 0$ – условия симметрии для U , $\langle u'_i u'_i \rangle$, ε и антисимметрии для V , W :

$$\frac{\partial U}{\partial r} = \frac{\partial \langle u'_i u'_i \rangle}{\partial r} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} = V = W = 0.$$

Следствием уравнений математической модели, начальных и граничных условий в предположении достаточно быстрого убывания искомым функций для рассматриваемого течения являются законы сохранения суммарных избыточного импульса и момента количества движения

$$J(x) = 2\pi\rho_0 \int_0^\infty \left[UU_1 - \int_r^\infty \frac{[W^2 + \langle w'^2 \rangle - \langle v'^2 \rangle]}{r'} dr' + \langle u'^2 \rangle - \langle v'^2 \rangle \right] r dr = 0,$$

$$M(x) = 2\pi\rho_0 \int_0^\infty (UW + \langle u'w' \rangle) r^2 dr = M_0 \neq 0.$$

Здесь $U_1 = U - U_0$ – дефект продольной компоненты скорости; $\rho_0 = \text{const}$ – плотность жидкости. Переменные задачи могут быть обезразмерены с применением в качестве характерной скорости величины скорости невозмущенного потока U_0 и характерной длины D (диаметра тела).

Подробности численной реализации математической модели и результаты детального тестирования численной модели приведены в [6, 7, 9].

2. Результаты расчетов

На начальном этапе развития безимпульсного закрученного турбулентного следа с ненулевым моментом количества движения результаты расчетов (подробно изложенные в [6]) достаточно хорошо согласуются с экспериментальными данными [5], поэтому в настоящей работе мы ограничились лишь сопоставлениями, представленными на рис. 1.

На рис. 1 показано изменение рассчитанных обезразмеренных характерных масштабов турбулентности в зависимости от расстояния от тела. Здесь $|U_{10}| = |U_1(0, x)|$ — модуль осевого значения дефекта продольной компоненты скорости; $|W|_m$, $|\langle u'v' \rangle|_m$, $|\langle v'w' \rangle|_m$, $|\langle u'w' \rangle|_m$ — максимальные в данном сечении следа значения модулей окружной компоненты скорости и касательных рейнольдсовых напряжений; e_0 — осевые значения кинетической энергии турбулентных возмущений; ε_0 — осевые значения скорости диссипации кинетической энергии турбулентности; $L_{1/2}$ — характерный масштаб ширины следа, определяемый из условия $e(L_{1/2}, x) = 0.5e(0, x)$; $R_\lambda = \sqrt{(2/3)e_0}\lambda/\nu$ — осевое значение турбулентного числа Рейнольдса ($\lambda = \sqrt{10e_0\nu/\varepsilon_0}$ — тейлоровский микромасштаб течения). Значками помечены экспериментальные данные [5].

Можно видеть, что на достаточно больших расстояниях от тела ($x/D \geq 1000$) поведение всех масштабных функций демонстрирует степенную зависимость от x (в логарифмических координатах это сплошные линии на рис. 1). В рамках использованной математической модели подобное поведение масштабных функций является одним из необходимых признаков достижения автомодельности турбулентного движения в следе [18]. Осевые значения энергии турбулентных возмущений вырождаются по закону $e_0(x) \sim x^{-1.45}$, скорость диссипации — по закону $\varepsilon_0(x) \sim x^{-2.45}$, касательные напряжения Рейнольдса $|\langle u'v' \rangle|_m$, $|\langle v'w' \rangle|_m$, $|\langle u'w' \rangle|_m$ — по законам $x^{-2.695}$, $x^{-1.43}$, $x^{-2.675}$ соответственно. Окружная компонента скорости при больших x/D убывает как $|W(x)|_m \sim x^{-0.735}$, что согласуется с законом расширения следа и законом сохранения (2), а осевой дефект продольной компоненты скорости $|U_{10}| \sim x^{-2}$. Размер следа $L_{1/2}$ и тур-

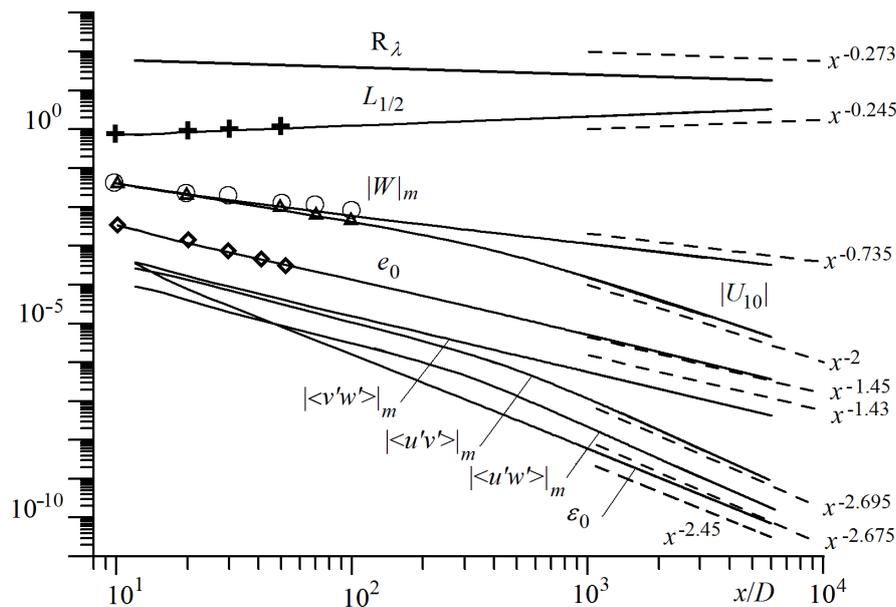


Рис. 1. Изменение обезразмеренных характерных масштабов турбулентности в следе с ростом расстояния от тела

булентное число Рейнольдса R_λ характеризуются законами $x^{0.245}$ и $x^{-0.273}$. Отметим, что для закрученного турбулентного следа за самодвижущимся телом [12] получены следующие законы вырождения: $R_\lambda \sim x^{-0.273}$, $L_{1/2} \sim x^{0.215}$, $|W|_m \sim x^{-2.8}$, $|U_{10}| \sim x^{-2.05}$, $e_0(x) \sim x^{-1.522}$, $|\langle u'v' \rangle|_m \sim x^{-2.787}$, $|\langle v'w' \rangle|_m \sim x^{-3.537}$, $|\langle u'w' \rangle|_m \sim x^{-4.802}$, $\varepsilon_0(x) \sim x^{-2.522}$. Дефект продольной компоненты скорости и энергия турбулентности убывают в рассмотренных течениях практически одинаково. Убывание тангенциальной компоненты скорости в случае самодвижения [9, 12] значительно более быстрое. Аналогичная ситуация наблюдается и для касательных напряжений, включающих пульсационную составляющую тангенциальной компоненты скорости. Можно видеть, что значения величин дефекта продольной компоненты скорости и касательных реynoльдсовых напряжений, содержащих пульсации продольной компоненты скорости, существенно медленнее выходят на автомодельность. Обращает на себя внимание тот факт, что, несмотря на весьма дальние расстояния от тела, течение в следе можно считать близким к развитому турбулентному течению (см., например, [19]). Последнее связано с достаточно большими значениями турбулентного числа Рейнольдса $R_\lambda = \sqrt{(2/3)e_0}\lambda/\nu$: в расчетах оно варьировалось в пределах от 62 при $x/D = 10$ до 18 при $x/D = 6000$.

На больших расстояниях от тела $x/D \geq 1000$ автомодельные распределения дисперсий флуктуаций продольной, радиальной и азимутальной компонент скорости практически совпадают, и поэтому мы приводим автомодельное распределение энергии турбулентности e . На рис. 2 (кривые 1) продемонстрированы рассчитанные автомодельные профили дефекта продольной компоненты скорости, тангенциальной компоненты скорости и энергии турбулентности.

Основные результаты расчетов получены на стационарной равномерной по переменным r и x сетке с шагами $h_r/D = 0.01$ и $h_x/D = 0.01$. Для контроля точности осуществлялся расчет на более мелкой сетке с $h_r/D = 0.005$ и $h_x/D = 0.005$. Отклонения сеточных решений в равномерной норме не превышали 1.5–2%. Сеточные аналоги суммарного избыточного импульса и момента количества движения в расчетах равны соответственно $4.5 \cdot 10^{-12}$ и $6.3 \cdot 10^{-3}$.

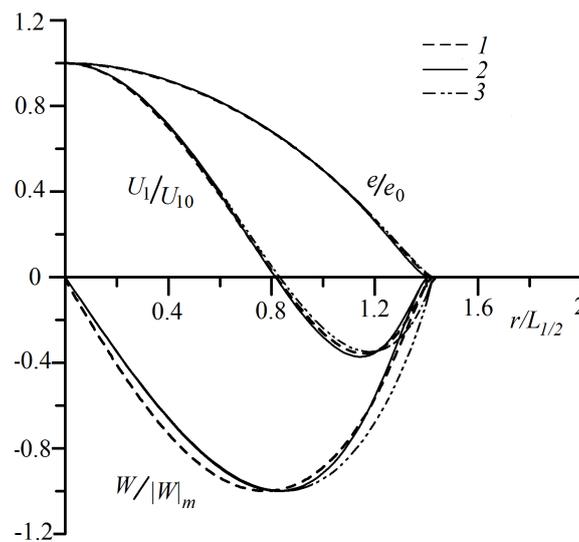


Рис. 2. Автомодельные профили дефекта продольной и тангенциальной компонент скорости и энергии турбулентности. Кривые 1 получены по модели 1; кривые 2 и 3 — по упрощенным математическим моделям 1 и 2 соответственно

Приведенный выше численный анализ автомодельного вырождения течения в турбулентном следе базируется на обработке результатов расчетов. Обоснование такого подхода на примере незакрученного безымпульсного турбулентного следа подробно обсуждалось в [20].

С целью упрощения математической модели течения в табл. 1 приводятся данные об изменении суммарных значений характеристик турбулентного следа. Здесь

$$E(x) = \int_0^\infty \varepsilon r dr, \quad E_U(x) = \int_0^\infty \frac{U_1^2}{2} r dr, \quad E_W(x) = \int_0^\infty \frac{W^2}{2} r dr,$$

$$P_U(x) = - \int_0^\infty \langle u'v' \rangle \frac{\partial U}{\partial r} r dr, \quad P_W(x) = - \int_0^\infty \langle v'w' \rangle \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{W}{r} \right) r^2 dr,$$

$$\mathcal{P}(x) = \int_0^\infty P r dr, \quad \mathcal{E}(x) = \int_0^\infty \varepsilon r dr.$$

Первые три интегральные величины характеризуют безразмерные суммарные по сечению следа кинетическую энергию турбулентности и части кинетической энергии осредненного движения, обусловленные продольной и окружной компонентами скорости. Для перехода к размерным суммарным значениям энергий достаточно умножить их на $2\pi\rho_0 U_0^2 D^2$. Остальные величины характеризуют суммарные по сечению следа порождения и скорость диссипации.

Анализ рассчитанных характеристик дальних закрученных безымпульсных турбулентных следов (см. рис. 1, табл. 1) позволяет сделать вывод о возможности построения упрощенных математических моделей. Видно, что величина $|U_{10}|$ убывает значительно быстрее, чем $|W|_m$. Поэтому следует предположить, что на больших расстояниях от тела вкладом этой величины в слагаемые порождения можно пренебречь. В связи с этим была построена упрощенная модель 1, представляющая в сравнении с исходной приближение дальнего следа и замену уравнений переноса нормальных напряжений одним уравнением баланса энергии турбулентности:

$$U_0 \frac{\partial U_1}{\partial x} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r K_U \frac{\partial U_1}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial x} \int_r^\infty \frac{W^2}{r'} dr', \quad U_0 \frac{\partial W}{\partial x} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^3 K_W \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{W}{r} \right) \right], \quad (11)$$

$$U_0 \frac{\partial e}{\partial x} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r K_e \frac{\partial e}{\partial r} + P_W - \varepsilon, \quad U_0 \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r K_\varepsilon \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} + C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon P_W}{e} - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{e}. \quad (12)$$

Т а б л и ц а 1. Интегральные характеристики течения в безымпульсном закрученном следе за телом

| x/D | E_U | E_W | E | P_U | P_W | \mathcal{P} | \mathcal{E} |
|-------|-----------------------|----------------------|----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|----------------------|
| 110 | $2.13 \cdot 10^{-6}$ | $1.24 \cdot 10^{-5}$ | $9.78 \cdot 10^{-5}$ | $2.97 \cdot 10^{-8}$ | $1.19 \cdot 10^{-7}$ | $1.49 \cdot 10^{-7}$ | $9.92 \cdot 10^{-7}$ |
| 1810 | $9.19 \cdot 10^{-10}$ | $8.84 \cdot 10^{-7}$ | $6.31 \cdot 10^{-6}$ | $1.82 \cdot 10^{-12}$ | $5.26 \cdot 10^{-10}$ | $5.28 \cdot 10^{-10}$ | $3.97 \cdot 10^{-9}$ |
| 3010 | $1.48 \cdot 10^{-10}$ | $5.36 \cdot 10^{-7}$ | $3.82 \cdot 10^{-6}$ | $1.79 \cdot 10^{-13}$ | $1.95 \cdot 10^{-10}$ | $1.95 \cdot 10^{-10}$ | $1.45 \cdot 10^{-9}$ |

Здесь

$$K_U = K_W = \frac{2}{3} \frac{1 - C_2}{C_1 + P_W/\varepsilon - 1} \frac{e^2}{\varepsilon}, \quad K_e = 0.147 \frac{e^2}{\varepsilon}, \quad K_\varepsilon = 0.113 \frac{e^2}{\varepsilon},$$

$$P_W = K_U r^2 \left(\frac{\partial(W/r)}{\partial r} \right)^2, \quad C_{\varepsilon 1} = 1.44, \quad C_{\varepsilon 2} = 1.92, \quad C_1 = 2.2, \quad C_2 = 0.55.$$

Дальнейшее упрощение модели (11), (12) состоит в пренебрежении величиной P_W/ε в выражениях для коэффициентов турбулентной вязкости (по результатам расчетов в дальнем следе $P_W/\varepsilon \leq 0.1$). В упрощенной модели 2 коэффициенты турбулентной вязкости определяются следующим образом: $K_U = K_W = 0.25e^2/\varepsilon$. Таким образом, модель 2 близка к известной $e \sim \varepsilon$ -модели турбулентности [21], но ее эмпирические постоянные в коэффициентах турбулентной вязкости отличаются от общепринятых в связи с тем, что она является упрощением существенно более общей математической модели [6, 9, 16].

Дополнительно выполнены численные эксперименты с применением полной и одной из упрощенных математических моделей (табл. 2). Вариант В1 (строки 1, 4) в табл. 2 соответствует расчетам по полной модели; вариант В2 (строки 2, 5, 6) — расчетам по упрощенной модели 1 с заданием начальных условий при $x/D = 510$ и $x/D = 910$. Начальный этап в варианте В2 проводился по полной модели. В строках 3, 7, 8 приведены относительные погрешности величин, полученных по полной и упрощенной моделям (в связи с замечаниями рецензента). Величина $\delta(X_1 - X_2)$ означает относительную разность решений, полученных по полной и упрощенной моделям с постановкой начальных условий для упрощенной модели при $x/D = X_1$; сопоставление выполнено при $x/D = X_2$.

Из анализа табл. 2 можно сделать вывод о том, что применение упрощенной математической модели начиная с расстояний $x/D = 910$ приводит к результатам, незначительно отклоняющимся от полученных по полной модели. Отклонения массивов значений функций U_1 , W , e , ε , полученных по полной и упрощенным моделям, не превышают отклонений соответствующих характерных (осевых и максимальных) значений, представленных в таблице. Упрощенная модель 2 приводит к аналогичным результатам. Как показали численные эксперименты, интегральным слагаемым в правой части уравнения (1) и его упрощенного аналога можно пренебречь.

Т а б л и ц а 2. Характерные масштабы турбулентного течения в закрученном следе за самодвижущимся телом

| Строка | Вариант | x/D | $ U_{10} $ | $ W _{\max}$ | e_0 | ε_0 | l |
|--------|----------------------|-------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|--------|
| 1 | В1 | 910 | $0.183 \cdot 10^{-3}$ | $0.120 \cdot 10^{-2}$ | $0.587 \cdot 10^{-5}$ | $0.752 \cdot 10^{-8}$ | 2.068 |
| 2 | В2 | 510 | $0.195 \cdot 10^{-3}$ | $0.125 \cdot 10^{-2}$ | $0.578 \cdot 10^{-5}$ | $0.736 \cdot 10^{-8}$ | 2.054 |
| 3 | $\delta(510 - 910)$ | — | 0.066 | 0.042 | 0.015 | 0.021 | 0.0068 |
| 4 | В1 | 2010 | $0.382 \cdot 10^{-4}$ | $0.678 \cdot 10^{-3}$ | $0.183 \cdot 10^{-5}$ | $0.106 \cdot 10^{-8}$ | 2.507 |
| 5 | В2 | 510 | $0.437 \cdot 10^{-4}$ | $0.716 \cdot 10^{-3}$ | $0.183 \cdot 10^{-5}$ | $0.105 \cdot 10^{-8}$ | 2.476 |
| 6 | В2 | 910 | $0.409 \cdot 10^{-4}$ | $0.696 \cdot 10^{-3}$ | $0.184 \cdot 10^{-5}$ | $0.106 \cdot 10^{-8}$ | 2.488 |
| 7 | $\delta(510 - 2010)$ | — | 0.144 | 0.056 | 0 | 0.0094 | 0.0124 |
| 8 | $\delta(910 - 2010)$ | — | 0.071 | 0.027 | 0.0054 | 0 | 0.0076 |

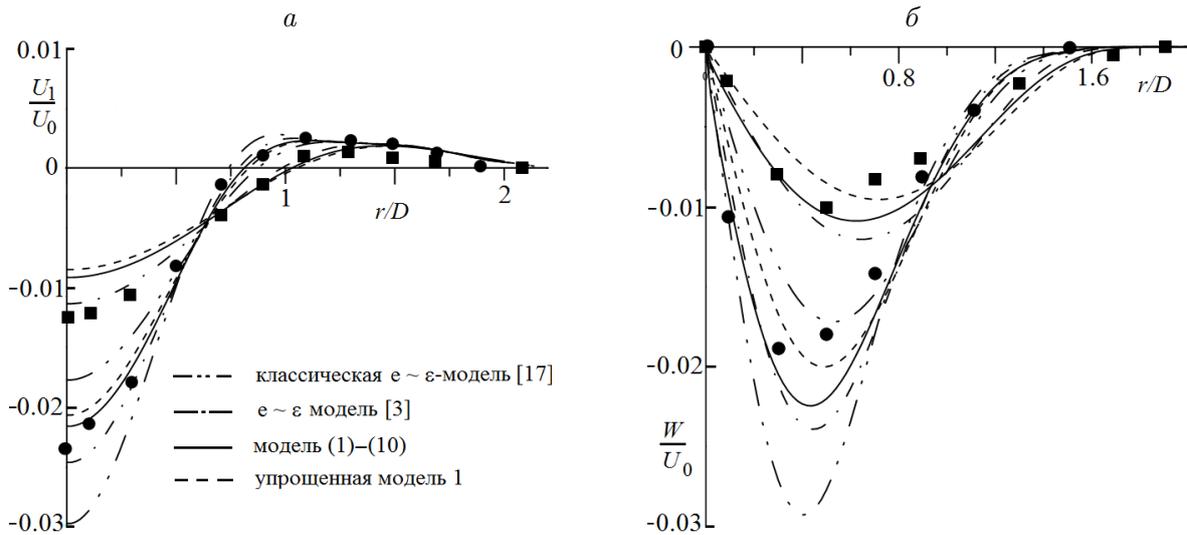


Рис. 3. Рассчитанные профили дефекта продольной (а) и тангенциальной компонент скорости (б), а также экспериментальные данные [5] при $x/D = 20$ (•) и 50 (■)

Кривые 2, 3 на рис. 2 относятся к упрощенным математическим моделям 1 и 2. Законы вырождения следа, полученные на основе исходной и упрощенных математических моделей, удовлетворительно согласуются; отличия автомодельных распределений на рис. 2 также можно считать незначительными. Применение упрощенных математических моделей позволяет в два-три раза сократить время расчета течения; значительно упрощается теоретический анализ.

Следует отметить, что упрощенные математические модели не претендуют на описание наблюдавшейся в экспериментальных данных анизотропии вырождения закрученного безымпulsiveного турбулентного следа с ненулевым суммарным избыточным моментом количества движения [5]. В первом приближении основная математическая модель (1)–(10) настоящей работы позволяет дать описание анизотропии [6]. А как упрощенные математические модели могут описывать начальную стадию вырождения следа применительно к продольной и тангенциальной осредненным компонентам скорости? С целью ответа на поставленный вопрос выполнены численные эксперименты, результаты которых представлены на рис. 3.

Наряду с упрощенной моделью 1, построенной в настоящей работе, рассмотрены также классическая $e \sim \epsilon$ -модель турбулентности (со стандартными эмпирическими постоянными $C_{\epsilon_1} = 1.44$, $C_{\epsilon_2} = 1.92$, $C_{\mu} = 0.09$) и математическая модель из работы [3], представляющая собой также $e \sim \epsilon$ -модель [21] с эмпирическими постоянными $C_{\epsilon_1} = 1.44$, $C_{\epsilon_2} = 2.0$, $C_{\mu} = 0.16$. Рассчитанные с применением этих математических моделей профили осредненного дефекта продольной компоненты скорости сопоставляются с результатами лабораторных измерений [5] на рис. 3, а, профили тангенциальной компоненты скорости — на рис. 3, б. Можно видеть, что классическая $e \sim \epsilon$ -модель турбулентности приводит к существенным отклонениям результатов расчетов от экспериментальных данных как для дефекта продольной компоненты, так и окружной скорости. Результаты расчетов по $e \sim \epsilon$ -модели турбулентности работы [3] удовлетворительно согласуются с экспериментальными данными [5], однако в отличие от упрощенной модели 2 настоящей работы модель работы [3] характеризуется нестандартным набором эмпирических постоянных.

Заключение

Выполнено численное моделирование вырождения безымпulsiveного закрученного турбулентного следа с ненулевым моментом количества движения за сферой в однородной жидкости. Осуществлен численный анализ автомодельности вырождения и построены упрощенные математические модели дальнего следа.

Авторы посвящают настоящую работу светлой памяти Владимира Алексеевича Костомахи.

Благодарности. Исследование выполнено при поддержке РФФИ (грант № 17-01-00332) и частичном финансировании из средств ФАНО России.

Список литературы / References

- [1] **Reynolds, A.J.** Similarity in swirling wakes and jets // *J. Fluid Mech.* 1962. Vol. 15, No. 2. P. 241–243.
- [2] **Шетц Дж.** Турбулентные течения. Процессы вдува и перемешивания. М.: Мир, 1984. 247 с.
Schetz, J.A. Injection and mixing in turbulent flow. Progress in astronautics and aeronautics. Vol. 68 / Ed. by M. Summerfield. New York Univ., 1980. 200 p.
- [3] **Гумилевский А.Г.** Исследование безымпulsiveных закрученных следов на основе двухпараметрической модели турбулентности // *Изв. РАН. Сер. МЖГ.* 1992. Т. 27, № 3. С. 35–41.
Gumilevskii, A. Investigation of momentumless swirling wakes based on two-equation model of turbulence // *Fluid Dynamics.* 1992. Vol. 27, No. 3. P. 326–330.
- [4] **Гумилевский А.Г.** Автомодельность и законы вырождения в следах с компенсацией по импульсу и моменту количества движения // *Изв. РАН. Сер. МЖГ.* 1993. Т. 28, № 5. С. 35–41.
Gumilevskii, A. Similarity and decay laws of wakes with zero momentum and angular momentum // *Fluid Dynamics.* 1993. Vol. 28, No. 5. P. 619–623.
- [5] **Костомаха В.А., Леснова Н.В.** Турбулентный закрученный след за сферой с полной или частичной компенсацией силы сопротивления // *Прикладная механика и техническая физика.* 1995. Т. 36, № 2. С. 88–98.
Kostomakha, V.A., Lesnova, N.V. Turbulent swirling wake behind a sphere with complete or partial drag compensation // *J. of Appl. Mech. and Tech. Phys.* 1995. Vol. 36, No. 2. P. 226–233.
- [6] **Chernykh, G.G., Demenkov, A.G., Kostomakha, V.A.** Numerical model of a swirling momentumless turbulent wake // *Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling.* 1998. Vol. 13, No. 4. P. 279–288.
- [7] **Гаврилов Н.В., Деменков А.Г., Костомаха В.А., Черных Г.Г.** Экспериментальное и численное моделирование турбулентного следа за самодвижущимся телом // *Прикладная механика и техническая физика.* 2000. Т. 41, № 4. С. 49–58.
Gavrilov, N.V., Demenkov, A.G., Kostomakha, V.A., Chernykh, G.G. Experimental and numerical modelling of turbulent wake behind self-propelled body // *J. of Appl. Mech. and Tech. Phys.* 2000. Vol. 41, No. 4. P. 619–627.
- [8] **Piquet, J.** Turbulent flows. Models and physics. Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 1999. 762 p.

- [9] **Chernykh, G.G., Demenkov, A.G., Kostomakha, V.A.** Swirling turbulent wake behind a self-propelled body // Intern. J. of Comput. Fluid Dynamics. 2005. Vol. 19, No. 5. P. 399–408.
- [10] **Lu, M.-H., Sirviente, A.I.** Numerical study of the momentumless wake of an axisymmetric body // 43rd AIAA Aerospace Sci. Meeting and Exhibit, 10–13 January 2005, Reno, Nevada. AIAA, 2005. Paper 2005-1109. 14 p.
- [11] **Tunaley, J.K.E.** Ships turbulent propeller wake: Combined swirling and linear momentum wake: LRDC Technical Report, April 2010. 4 p.
- [12] **Деменков А.Г., Черных Г.Г.** Численное моделирование вырождения закрученного турбулентного следа за самодвижущимся телом // Теплофизика и аэромеханика. 2016. Т. 23, № 5. С. 693–702.
Demenkov, A.G., Chernykh, G.G. Numerical modeling of the swirling turbulent wake decay past a self-propelled body // Thermophys. and Aeromech. 2016. Vol. 23, No. 5. P. 667–675.
- [13] **Деменков А.Г., Черных Г.Г.** Автомодельное вырождение безымпulsiveного закрученного турбулентного следа // Теплофизика и аэромеханика. 2017. Т. 24, № 6. С. 891–896.
Demenkov, A.G., Chernykh, G.G. Self-similar decay of a momentumless swirling turbulent wake // Thermophys. and Aeromech. 2017. Vol. 24, No. 6. P. 867–871.
- [14] **Dufresne, N.P., Wosnik, M.** Velocity deficit and swirl in the turbulent wake of a wind turbine // Marine Technology Soc. J. 2013. Vol. 47, No. 4. P. 193–205.
- [15] **Lewis, B.J., Cimbala, J.M.** Unsteady computational fluid dynamic analysis of the behavior of guide vane trailing-edge injection and its effects on downstream rotor performance in a francis hydroturbine // J. of Turbomachinery. 2015. Vol. 137. P. 08101-1–08101-9.
- [16] **Лаундер Б.Е., Морс А.** Турбулентные сдвиговые течения 1: Пер. с англ. / Под ред. А.С. Гиневского. М.: Машиностроение, 1982. С. 291–310.
Launder, B.E., Morse, A. Turbulent shear flows 1 / Ed. by F. Durst, B.E. Launder, F.W. Schmidt, J.H. Whitelaw. Berlin: Springer, 1979. P. 279–294.
- [17] **Rodi, W.** A new algebraic relation for calculating the Reynolds stresses // ZAMM. 1976. Vol. 56. P. 219–221.
- [18] **Townsend, A.A.** The structure of turbulent shear flow. Second edition. Cambridge Univ. Press, 1976. 429 p.
- [19] **Chernykh, G.G., Korobitsina, Z.L., Kostomakha, V.A.** Numerical simulation of isotropic turbulence dynamics // Intern. J. of Comput. Fluid Dynamics. 1998. Vol. 10, No. 2. P. 173–182.
- [20] **Капцов О.В., Фомина А.В., Черных Г.Г., Шмидт А.В.** Автомодельное вырождение безымпulsiveного турбулентного следа в пассивно стратифицированной среде // Матем. моделирование. 2015. Т. 27, № 1. С. 84–98.
Kaptsov, O.V., Fomina, A.V., Chernykh, G.G., Schmidt, A.V. Self-similar decay of the momentumless turbulent wake in a passive stratified medium // Matem. Modelirovanie. 2015. Vol. 27, No. 1. P. 84–98. (In. Russ.)
- [21] **Rodi, W.** Turbulence models and their application in hydraulics. A state of the art review. Univ. of Karlsruhe, 1980. 104 p.

*Поступила в редакцию 12 февраля 2018 г.,
с доработки — 24 апреля 2018 г.*

Numerical modelling of swirling momentumless turbulent wake dynamics

DEMENKOV, ANDREY G.^{1,2}, CHERNYKH, GENNADIY G.^{3,*}

¹Kutateladze Institute of Thermophysics SB RAS, 630090, Novosibirsk, Russia

²Novosibirsk State Technical University, 630073, Novosibirsk, Russia

³Institute of Computational Technologies SB RAS, Novosibirsk, 630090, Russia

*Corresponding author: Chernykh, Gennadiy G., e-mail: chernykh@ict.nsc.ru

Swirling turbulent jet flows are of interest in connection with the design and development of various energy and chemical-technological devices as well as both study of flow around bodies and solving problems of environmental hydrodynamics, etc. An interesting example of such a flow is a swirling turbulent wake behind bodies of revolution.

Analysis of the known works on the numerical simulation of swirling turbulent wakes behind bodies of revolution indicates lack of knowledge on the dynamics of the momentumless swirling turbulent wake. A special case of the motion of a body with a propulsor whose thrust compensates the swirl is studied, but there is a nonzero integral swirl in the flow. In previous works with the participation of the authors, a numerical simulation of the initial stage of the evolution of a swirling momentumless turbulent wake based on a hierarchy of second-order mathematical models was performed. It is shown that a satisfactory agreement of the results of calculations with the available experimental data is possible only with the use of a mathematical model that includes the averaged equations of motion and differential equations for the transfer of normal Reynolds stresses along the rate of dissipation.

In the present work, based on the above mentioned mathematical model, a numerical simulation of the evolution of a far momentumless swirling turbulent wake with a nonzero angular momentum behind the body of revolution is performed. It is shown that starting from distances of the order of 1000 diameters from the body the flow becomes self-similar. Based on the analysis of the results of numerical experiments, simplified mathematical models of the far wake are constructed.

The authors dedicate this work to the blessed memory of Vladimir Alekseevich Kostomakha.

Keywords: momentumless swirling turbulent wake, mathematical models, self-similar degeneration.

Cite: Demenkov, A.G., Chernykh, G.G. Numerical modelling of swirling momentumless turbulent wake dynamics // Computational Technologies. 2018. Vol. 23, No. 5. P. 37–48. (In Russ.) DOI: 10.25743/ICT.2018.23.5.004.

Acknowledgements. This study was supported by the RFBR (grant No. 17-01-00332) and partial financing by the Federal Agency for Scientific Organizations (Russia).

Received 12 February 2018

Received in revised form 24 April 2018