

## Оценка точности численного анализа деформированного состояния силовых конструкций технических объектов

А. Н. РОГАЛЕВ<sup>1,\*</sup>, С. В. ДОРНИН<sup>2</sup>, В. В. МОСКВИЧЕВ<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск, Россия

<sup>2</sup>Красноярский филиал Института вычислительных технологий СО РАН, Россия

\*Контактный e-mail: rogalov@icm.krasn.ru

Под силовыми конструкциями понимают технические устройства, составленные из различных частей, воспринимающие комплекс эксплуатационных нагрузок в штатных и аварийных режимах нагружения. При решении прикладных задач исследования напряженно-деформированных состояний силовых конструкций важна оценка степени близости к точному приближенного решения, полученного на вполне определенной сетке конечных элементов с конечной величиной шага сетки. С учетом влияния ошибок округления сходимость метода конечных элементов контролировать сложно: при большом числе конечных элементов решение может расходиться из-за накапливающихся ошибок округления, даже если условия сходимости выполняются. Описанное в статье применение методов обратного анализа ошибок позволяет достаточно точно контролировать точность численных оценок деформированного состояния силовых конструкций, что подтверждают расчеты, выполненные для практических задач.

*Ключевые слова:* силовая конструкция, конечно-элементная модель, точность численного решения, обратный анализ ошибок.

### Введение

В силу структурной и геометрической сложности конструкций технических объектов их конечно-элементные модели, как правило, характеризуются большой размерностью. Если использовать в качестве ориентира оценку [1], в соответствии с которой большими считаются задачи, дискретные модели которых имеют порядка  $10^6$  и более степеней свободы, то практически все модели таких объектов являются большими. По нашему опыту, размерность таких задач часто оказывается в диапазоне  $(4 - 10) \cdot 10^6$  степеней свободы. В этом случае возможен анализ моделей на персональных компьютерах с объемом оперативной памяти 32–64 Гб. Однако иногда возникает необходимость и в построении моделей большей размерности, реализуемых на более высокопроизводительной вычислительной технике. Анализ напряженно-деформированных состояний (НДС) при решении стационарных и нестационарных сопряженных задач теплопроводности и термоупругости при неосесимметричном нагружении требует их решения в трехмерной постановке с размерностью конечно-элементной модели в несколько десятков миллионов неизвестных. Исследования напряженно-деформированных, особенно близких

к предельным, состояний сложных технических объектов в некоторых случаях связаны с учетом зон контактного взаимодействия, высоких скоростей деформирования, в том числе упругопластического, изменения конфигурации объекта в процессе его повреждения и частичного разрушения. В силу высокого уровня структурных, геометрических, физических нелинейностей решения получаются с организацией вложенных циклов итераций вычислительного процесса [2, 3].

Решение таких задач для структурно и геометрически сложных конструкций технических объектов, характеризующихся большими размерностью и числом итераций при моделировании нелинейных процессов, часто выполняется с использованием тяжелых промышленных (коммерческих) САЕ-систем, реализованных с учетом последних достижений в области теории и практики методов численного анализа и вычислительной математики (предобуславливание матриц, параллельные вычисления и др.). Поскольку коммерческие САЕ-системы тестируются в промышленных масштабах, они характеризуются высоким качеством и надежностью получаемых результатов. Известны рекомендации использовать численные решения, полученные с применением таких систем, в качестве эталонных при разработке собственного программного кода [4]. Тем не менее существуют принципиально неустранимые источники возможных вычислительных ошибок. Классический подход связывает уровень этих ошибок с обусловленностью матрицы коэффициентов разрешающей системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), являющейся матрицей жесткости для конечно-элементных моделей конструкций. Уровень таких накапливаемых ошибок должен быть оценен и учтен при принятии технических решений по результатам численного анализа.

Оценки величин ошибок, потенциально приводящие к возникновению неприемлемых рисков, вполне могут реализоваться при практических расчетах НДС как модельных задач большой размерности, так и силовых конструкций сложной конфигурации. Это подтверждается анализом вычислительной ошибки численного решения одной из классических задач теории упругости — задачи Кирша. Численные результаты отличались на 5.4–12% от известного аналитического решения в связи с особенностями построения модели и вариацией сетки конечных элементов [5]. Вместе с тем для других модельных задач получены численные решения, весьма близкие к аналитическим [6]. Исходя из этого в работе рассматриваются эффективно реализованные методы и алгоритмы анализа точности численных оценок деформированного состояния конструкций технических объектов в связи со сходимостью результатов по сетке конечных элементов. Под эффективностью метода в работе понимается минимально возможная величина вычислительных затрат, необходимых для получения оценки точности.

## 1. Связь ошибок округления при численном решении СЛАУ с обусловленностью матрицы коэффициентов

Рассмотрим возникающую при конечно-элементном анализе разрешающую СЛАУ

$$Ax = \mathbf{b}, \quad (1)$$

где  $A$  — квадратная разреженная матрица коэффициентов (матрица жесткости);  $\mathbf{b}$  — вектор правой части (вектор нагрузок).

Как известно, задача корректно поставлена, если решение ее существует и единственно при любых входных данных из некоторой области ее изменения и это решение

непрерывно зависит от исходных данных. Отыскание решения  $x$  системы (1) будет корректно поставленной задачей, если  $\det A \neq 0$  и

$$\|\Delta A \cdot A^{-1}\| < 1 \quad \text{или} \quad \|\Delta A\| \cdot \|A^{-1}\| < 1 \quad (2)$$

при произвольном возмущении  $\Delta A$  из окрестности, определяемой границами ошибок коэффициентов задачи (1). Действительно, выполнение условий (2) гарантирует, что при любом возмущении элементов в пределах точности их задания матрица системы останется невырожденной, а следовательно, решение  $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$  системы существует, единственно и непрерывно зависит от исходных данных.

Для пояснения последнего утверждения рассмотрим разность  $\mathbf{x}' - \mathbf{x}$  решений системы (1) и произвольно возмущенной системы

$$A'\mathbf{x}' = \mathbf{b}', \quad (3)$$

где

$$A' = A + \Delta A, \quad \mathbf{b}' = \mathbf{b} + \Delta \mathbf{b}, \quad \mathbf{x}' = \mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}.$$

Легко проверить, что при условии (2) выполняется соотношение

$$\mathbf{x}' - \mathbf{x} = (E + A^{-1}\Delta A)^{-1}A^{-1}(\Delta \mathbf{b} - \Delta A A^{-1}\mathbf{b}),$$

где  $E$  — единичная матрица. Можно использовать понятие эквивалентных возмущений  $A_M$ ,  $\mathbf{k}_M$ , таких что  $A_M\mathbf{x} = (A + \Delta A)\mathbf{x} = \mathbf{b} + \mathbf{k}_M$ . Качество прямого метода оценивается по наилучшей априорной оценке, которую можно получить для норм матрицы  $A_M$  и вектора  $\mathbf{k}_M$ . Такие “наилучшие” значения возмущенных матрицы  $A_M$  и вектора  $\mathbf{k}_M$  называются соответственно матрицей и вектором эквивалентного возмущения для метода  $M$ .

Если оценки для  $A_M$  и  $\mathbf{k}_M$  имеются, то теоретически ошибка приближенного решения  $\mathbf{x}_M$  может быть оценена неравенством

$$\frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_M\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \frac{\text{cond}(A)}{1 - \|A^{-1}\| \|\Delta A\|} \left( \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\Delta \mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|} \right). \quad (4)$$

Здесь используется термин  $\text{cond}(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$  — число обусловленности матрицы  $A$  [7, 8], матричная норма в (4) предполагается подчиненной векторной норме  $\|\cdot\|$ . В действительности оценка для  $\|A^{-1}\|$  редко бывает известна, и основной смысл (4) состоит в возможности сравнения различных методов обратного анализа ошибок округления.

Число обусловленности измеряет максимальные изменения решения задачи по отношению к малым возмущениям коэффициентов системы. Неравенство (4) означает, что относительная ошибка  $\mathbf{u}$  ограничена относительной ошибкой матрицы жесткости  $A$ , умноженной на число обусловленности. Эта оценка имеет первый порядок точности для заданных матрицы  $A$  и вектора  $\mathbf{b}$ . Таким образом, возмущение решения, вызванное просто записью  $A$  в машинных числах, может быть большим, если  $A$  плохо обусловлена. Можно показать, что влияние ошибок округления в процессе решения задачи соответствует росту  $\|\Delta A\|$  в (4) и может увеличиться за счет большого числа обусловленности  $\text{cond}(A)$ .

Вычисленные значения числа обусловленности разбивались на несколько подынтервалов (шкала градации), соответствующих точности численного решения, вычисляемых

при данной величине числа обусловленности. Вид этой шкалы градации изменялся при появлении новых видов компьютерной техники и программного обеспечения. Ранее было принято считать, что при  $\text{cond}(A) \leq 10^4$  матрица хорошо обусловлена, при значениях  $10^8 \leq \text{cond}(A)$  матрица плохо обусловлена (границы назначались достаточно условно). С развитием вычислительной техники увеличивалась размерность решаемых задач, соответственно границы значений числа обусловленности становились все больше. Например, в работе [8] отмечается, что если матрица жесткости имеет число обусловленности  $10^{16}$ , то алгоритм решения даст результат, в котором нет ни одной правильной цифры — такие матрицы численно сингулярны, и линейные системы с подобными матрицами не могут быть решены. Поэтому очень важно вычислить или оценить число обусловленности матрицы жесткости, чтобы гарантировать ее хорошую обусловленность. Точные значения чисел обусловленности удается вычислить редко, на практике их заменяют оценками. Отмечено, что оценка чисел обусловленности больших матриц приводит к значительному увеличению этих оценок, что составляет серьезную проблему при трактовке самого понятия “плохо обусловленная матрица”.

В настоящей работе для оценки ошибок решений СЛАУ с матрицей жесткости, а также оценки степени близости этих матриц к сингулярным матрицам будем использовать подход, основанный на идеях обратного анализа ошибок [9, 10].

Принимая во внимание важность матричной нормы для обратного анализа ошибок, приведем ее определение. Возможны разные трактовки этого определения, но мы будем придерживаться следующего варианта.

В качестве матричной нормы используется функция  $\|\cdot\| : M_n \rightarrow R$ ,  $M_n$  — множество квадратных матриц размерности  $n \times n$ . Для всех матриц  $A, B \in M_n$  функция удовлетворяет следующим пяти аксиомам [11]:

- (c1)  $\|A\| \geq 0$ ,
- (c1a)  $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$ ,
- (c2)  $\|cA\| = |c| \|A\|$ ,
- (c3)  $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$ ,
- (c4)  $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$ .

Заметим, что свойства (c1)–(c3) идентичны аксиомам векторной нормы. Поскольку в важных приложениях кольцевое свойство (c4) матричной нормы несущественно (например, в очень полезном свойстве предельных соотношений), векторную норму на множестве матриц, т. е. функцию, удовлетворяющую (c1)–(c3) и не обязательно (c4), называют обобщенной матричной нормой или просто матричной нормой [11].

Возвращаясь к определению системы уравнений (1) и системы уравнений с возмущением матрицы коэффициентов и возмущением правой части (3), для которой выполняются естественные условия

$$|A^{-1}| \cdot |\Delta A| < 1 \quad \text{и} \quad \frac{|\Delta A|}{|A|} < 1,$$

легко получить неравенство (4).

При малых значениях нормы  $\|\Delta A\|$  правая часть в (4) эквивалентна выражению

$$\frac{|\Delta A|}{|A|} + \frac{|\Delta \mathbf{b}|}{|\mathbf{b}|}.$$

Таким образом, можно полагать, что относительная ошибка в решении имеет одинаковый порядок малости с относительной ошибкой в сумме ошибки начальных данных и правой части при условии, что величина  $\text{cond}(A)$  не слишком велика.

Как уже отмечалось, при больших  $\text{cond}(A)$  говорят о плохой обусловленности решения системы линейных уравнений с матрицей коэффициентов  $A$  и правой частью  $\mathbf{b}$  относительно матричной нормы  $\|\cdot\|$  [9]. Плохая обусловленность матрицы жесткости конечно-элементной модели может проявляться в некоторых типах конструкций, когда свойства элементов и геометрия области достигают критических значений.

Следует отметить, что сама величина числа обусловленности является всего лишь верхней границей в оценке точности. При определении числа обусловленности может использоваться одна из норм матрицы, числовое значение которой (в большинстве случаев) увеличивается при возрастании размерности матрицы, это приводит к сильному росту числа обусловленности системы, что, в свою очередь, не связано напрямую с увеличением ошибки численного решения. Это объясняет тот факт, что порядок чисел обусловленности при расчетах технических объектов сложной конфигурации нередко достигает высоких значений. Большие значения чисел обусловленности не являются индикаторами большой ошибки численного решения.

В настоящее время будем рассматривать другие варианты количественных характеристик обусловленности матрицы коэффициентов в предположении, что они демонстрируют более адекватную связь с ошибкой численного решения. В качестве критерия используем малость числа обусловленности в задачах с заведомо малой ошибкой, а именно в задачах с известным аналитическим решением и малой разницей между аналитическим и численным решениями.

## 2. Оценки чисел обусловленности для матриц жесткости моделей силовых конструкций

Хотя определение числа обусловленности (численной оценки числа обусловленности) выполняется по простой формуле, сложность состоит в том, что, как правило,  $A^{-1}$  неизвестно в практике. Кроме того, при работе с большими системами уравнений, которые часто встречаются в конечно-элементном анализе, вычисление обратной матрицы  $A^{-1}$  связано с большими вычислительными затратами. Именно поэтому были разработаны методы оценки числа обусловленности.

В 1984 г. Хагер [12] опубликовал метод оценки числа обусловленности матрицы и сравнил свои результаты с результатами расчетов, полученными по более раннему методу. Было отмечено, что определение числа обусловленности матрицы тривиально, когда известна обратная матрица  $A^{-1}$ , но в научных вычислениях это встречается редко. По этим причинам Хагер сосредоточился на задаче определения  $\|A^{-1}\|_1$  и  $\|A^{-1}\|_\infty$  на основе коэффициентов матрицы  $A$ , а не обратной матрицы.

Цель алгоритма Хагера — для заданной матрицы  $A \in R^{n \times n}$  вычислить оценку  $\gamma \leq \|A^{-1}\|_1$ .

Реализация алгоритма Хагера:

- Выбрать  $x$  так, чтобы  $\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{j=1}^n |x_j| = 1$ .
- Повторять шаги:
  - решить систему  $A\mathbf{y} = \mathbf{x}$ ;
  - определить  $\boldsymbol{\xi} = \text{sgn}(\mathbf{y})$ ;
  - решить систему  $A^T\mathbf{z} = \boldsymbol{\xi}$ .
- Проверка условия  $\|\mathbf{z}\|_\infty = \max_j (|z_j|) < \mathbf{z}^T x$ .

- Условие выполнено, тогда получена оценка  $\gamma = \|\mathbf{y}\|_1 = \sum_{j=1}^n |y_j|$ . Закончить алгоритм.
- Иначе  $\mathbf{x} := \mathbf{e}_j$ , где  $|z_j| = \|z\|_\infty = \max_j (|z_j|)$ .

Хайэм опубликовал анализ этого алгоритма и показал [13], что алгоритм эффективно применяется на практике, оценка максимума достигается за две-три итерации и совпадает по порядку с точным числом обусловленности, что является относительно хорошим результатом. Позже Хайэм модифицировал алгоритм и повысил его надежность и эффективность [14], и этот усовершенствованный метод позднее был включен в пакет MATLAB в виде функции `condest`. Численное оценивание чисел обусловленности также включено в пакет структурного анализа на основе конечных элементов Oasys GSA [15]. Существенной особенностью этого пакета была программная реализация оценки в 1-норме числа обусловленности матрицы жесткости структурной модели, в которой использовалась оценка нормы матрицы, обратной к матрице жесткости. Оценка числа обусловленности являлась частью информации, предоставляемой пользователю пакета для линейного анализа моделей. Включение такой оценки вызвало большой интерес у инженеров, так как сообщение о плохой обусловленности помогало установить ее причину [15].

В статье приведены численные результаты, позволяющие ответить на следующие вопросы:

- каков порядок чисел обусловленности для диагональных разреженных матриц жесткости дискретных моделей силовых конструкций?
- как соотносятся величины чисел обусловленности матриц жесткости и ошибок численных решений СЛАУ?

В качестве косвенной оценки ошибки численных решений СЛАУ будем использовать разницу между численным и аналитическим решениями, выраженными в различных технических показателях.

В рассматриваемых ниже задачах используется регулярная сетка конечных элементов, генерируемая с определенным шагом  $e_{size}$ . Для каждой задачи выполняется построение нескольких вариантов сетки с изменением ее шага и регистрацией размерности  $n$  матрицы жесткости (с общим количеством элементов  $n \times n$ ) и числа обусловленности. На первом этапе рассматривались числа обусловленности  $\text{cond}(A)$ , основанные на норме неопределенности.

**Задача 1.** Рефлектор наземной зеркальной антенны  $Q/K_a$  частотного диапазона спутниковой связи диаметром 9 м состоит из 30 радиоотражающих сегментов зеркала и стержневого силового каркаса (рис. 1). В рамках проектных расчетов выполнялись расчеты деформирования при комплексном нагружении, включающем весовые, ветровые, температурные воздействия с учетом эффектов, порождаемых свободными колебаниями при действии акустического шума и синусоидальной вибрации. Работа в высокочастотном диапазоне радиоволн предъявляет высокие требования к точности проектирования и изготовления рефлектора, повышенной жесткости его силовой конструкции. Это, в свою очередь, обусловило необходимость дополнительного анализа точности и достоверности результатов численных решений.

В ходе анализа сходимости решений по сетке конечных элементов регистрировались значения размерности матрицы жесткости и числа обусловленности (табл. 1). При варьировании шага сетки размерность матрицы жесткости изменялась в интервале от  $10^5$  до  $2 \cdot 10^6$ , а порядок числа обусловленности находился в интервале от 10 до 12.

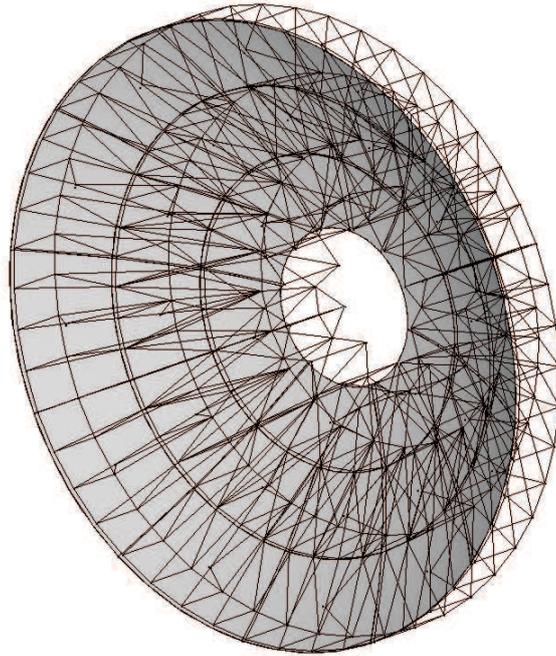


Рис. 1. Геометрическая модель рефлектора

Т а б л и ц а 1. Числа обусловленности матрицы жесткости для модели рефлектора

$e_{size}$ , мм	200	150	100	60	40
$n$	108 540	169 560	339 804	513 576	1 909 548
$cond(A)$	$4.339 \cdot 10^{10}$	$7.280 \cdot 10^{10}$	$1.544 \cdot 10^{11}$	$3.994 \cdot 10^{11}$	$4.914 \cdot 10^{12}$

**Задача 2.** Блок механического устройства регулировки положения рефлектора зеркальной антенны космического базирования имеет два фланца и три упругопластических шарнира. Один из них неподвижен, два других под воздействием толкателей обеспечивают поворот подвижного фланца относительно неподвижного (рис. 2).

В соответствии с техническими требованиями погрешность функционирования подвижного фланца по отношению к неподвижному под воздействием рабочего момента внешних сил должна быть не более  $30''$ , что предъявляет высокие требования к задаче расчетного анализа деформирования устройства. Обеспечение этого требования осложняется геометрической и физической нелинейностью задачи (все три шарнира испытывают упругопластические деформации в центральной части — шейке). Полученные оценки чисел обусловленности и значения размерности матрицы жесткости  $n$  представлены в табл. 2.

**Задача 3.** Силовая конструкция бака высокого давления для перспективных электрореактивных двигателей космических аппаратов включает в себя как непосредственно бак, так и элементы инфраструктуры, в пределах которой осуществляется замыкание силового потока. Это является основанием для определения границ деформируемой системы и ее анализа в качестве самостоятельно объекта исследования (рис. 3). Вантовая система крепится на силовой конструкции корпуса — пространственной стержневой системе, относящейся к классу анизотридных композитных сетчатых конструкций. Для рассматриваемой задачи при  $n = 169\,452$  число обусловленности матрицы жесткости составило  $9.96 \cdot 10^9$ .

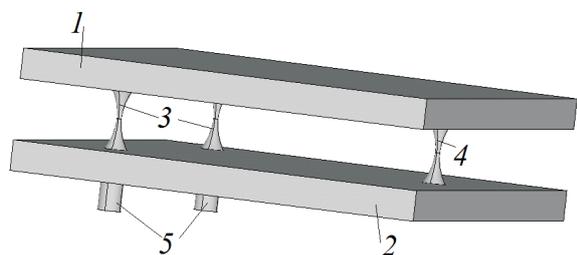


Рис. 2. Схема блока механического устройства регулировки: 1, 2 — соответственно подвижный и неподвижный фланцы, 3, 4 — подвижные и неподвижный шарниры, 5 — толкатели

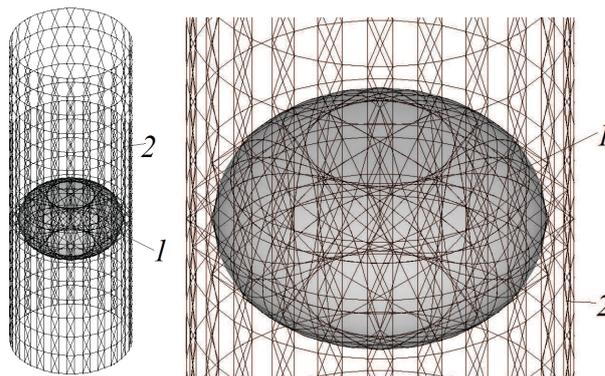


Рис. 3. Геометрическая модель силовой конструкции бака высокого давления: 1 — бак; 2 — силовая конструкция корпуса

Т а б л и ц а 2. Числа обусловленности матрицы жесткости для блока механического устройства регулировки положения рефлектора

$e_{size}$ , мм	20	10	5	3
$n$	180 875	221 456	312 212	472 130
$\text{cond}(A)$	$2.631 \cdot 10^{11}$	$3.970 \cdot 10^{11}$	$6.211 \cdot 10^{11}$	$9.568 \cdot 10^{11}$

Как видно, для рассмотренных задач при всех вариантах сетки конечных элементов оценка числа обусловленности, основанная на норме неопределенности, на 6–8 порядков превосходит значение числа обусловленности  $\text{cond}(A) = 100 \dots 1000$ , приводимого в большинстве монографий и статей как свидетельство плохой обусловленности матрицы. В связи с этим возникает необходимость дополнительного исследования достоверности полученных численных решений.

### 3. Обратный анализ оценки влияния ошибок округления на численное решение

Для конечно-элементного анализа силовых конструкций в данной статье предложены модифицированные методы апостериорного обратного анализа ошибок численных решений [9, 10], контролирующие влияние ошибок округления на результат.

Без потери общности полагаем, что все расчеты ведутся на одном компьютере в рамках реализации одной арифметики с плавающей точкой и ошибки матрицы коэффициентов системы возникают при представлении этой матрицы в компьютере, т. е. на ошибки матрицы коэффициентов налагается условие  $\|A^{-1}\| \cdot \|\Delta A\| < 1$ . Поскольку накопление погрешности при численном решении алгебраических уравнений — это суммарное влияние округлений, сделанных на отдельных шагах вычислительного процесса, логично для априорной оценки суммарного влияния ошибок округления в численных методах линейной алгебры использовать схему так называемого обратного анализа.

В применении к решению СЛАУ схема обратного анализа заключается в следующем. Вычисленное прямым методом  $M$  решение  $\mathbf{u}^h$  СЛАУ не удовлетворяет исходной системе (1), но может быть представлено как точное решение возмущенной системы

$$(A + \Delta A) \mathbf{u} = \mathbf{b} + \Delta \mathbf{b}.$$

Качество прямого метода оценивается по наилучшей априорной оценке [14], которую можно дать для норм матрицы  $\Delta A$  и вектора  $\Delta \mathbf{b}$ . Такие “наилучшие”  $\Delta A$  и  $\Delta \mathbf{b}$  называются соответственно матрицей и вектором эквивалентного возмущения для метода  $M$ . Если оценки для  $\Delta A$  и  $\Delta \mathbf{b}$  были получены, то теоретически ошибка приближенного решения  $\mathbf{u}^h$  может быть оценена неравенством

$$\frac{\|\mathbf{u} - \mathbf{u}^h\|}{\|\mathbf{u}\|} \leq \frac{\text{cond}(A)}{1 - \|A^{-1}\| \|\Delta A\|} \left( \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\Delta \mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|} \right).$$

В этом неравенстве  $\text{cond}(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$  — число обусловленности матрицы  $A$ , а матричная норма предполагается подчиненной векторной норме. Как уже отмечалось, оценка нормы обратной матрицы  $\|A^{-1}\|$  редко бывает известна, и основной смысл этого неравенства состоит в возможности сравнения различных методов. Ниже приводится вид некоторых типичных оценок для матрицы  $\Delta A$ . Для методов, использующих ортогональные преобразования и арифметику с плавающей запятой (коэффициенты системы  $A$ ,  $\mathbf{b}$  считаются действительными числами), оценка имеет вид

$$\|\Delta A\|_E \leq f(n) \|A\|_E \varepsilon. \quad (5)$$

Здесь  $\varepsilon$  — относительная точность арифметических операций в ЭВМ;  $\|A\|_E = \left( \sum_{i,j} a_{ij}^2 \right)^{1/2}$  — евклидова матричная норма;  $f(n)$  — функция вида  $Cn^k$ , где  $n$  — порядок системы. Точные значения константы  $C$  и показателя  $k$  определяются такими деталями вычислительного процесса, как используемые способ округления, вид операции накопления скалярных произведений и т. д. В случае методов типа Гаусса в правую часть оценки (5) входит еще множитель  $g(A)$ , отражающий возможность роста числа элементов матрицы  $A$  на промежуточных шагах расчета по сравнению с первоначальным уровнем (такой рост отсутствует в ортогональных методах). Чтобы уменьшить значение  $g(A)$ , применяют различные способы выбора ведущего элемента, препятствующие возрастанию числа элементов матрицы.

Опишем методы апостериорного анализа ошибок СЛАУ, основанные на обратном анализе ошибок. Пусть заданы две СЛАУ, имеющие одну матрицу коэффициентов  $A$  (матрицу жесткости), первая система

$$A\mathbf{u} = \mathbf{b}_{init} \quad (6)$$

имеет вектор  $\mathbf{b}_{init}$  в правой части, для второй системы

$$A\mathbf{z} = \mathbf{b}_{new} \quad (7)$$

сформируем вектор правой части  $\mathbf{b}_{new}$  таким образом, чтобы полученная система имела известное решение.

Приведем два варианта формирования систем, для чего применим обратный анализ ошибок округления. В первом варианте, решив систему (6) численным методом  $M$ ,

находим  $\mathbf{u}_{num}$ , затем, подставив этот вектор решений в левую часть системы (6), вычисляем вектор  $\mathbf{b}_{new} = A\mathbf{u}_{num}$ . Таким образом, строим систему линейных алгебраических уравнений вида (7), точным решением которой является вектор численного решения системы (6)  $\mathbf{u}_{num}$ , в чем можно убедиться простой подстановкой. Далее решим систему вида (7), используя тот же численный метод  $K$  на том же компьютере во время одного сеанса работы с программой, реализующей метод конечных элементов. В итоге находим вектор численного решения  $\mathbf{z}_{num}$  системы вида (7)  $A\mathbf{z}_{num} = \mathbf{b}_{new}$ , где  $\mathbf{b}_{new} = A\mathbf{u}_{num}$ . Норма вектора разности  $\|\mathbf{u}_{num} - \mathbf{z}_{num}\| \approx \|\mathbf{u}_{num} - \mathbf{u}\|$ , т. е. вектор разности  $\mathbf{u}_{num} - \mathbf{z}_{num}$  покомпонентно приближает вектор ошибки численного метода  $K$ .

Во втором варианте обратного анализа ошибки изменен способ построения правой части СЛАУ. Сформулируем основы этого способа построения. Используя оценки нормы вектора решений СЛАУ, легко получаем неравенство  $\|\mathbf{u}\| \geq \|\mathbf{b}\|/\|A\|$ . Конструируем решение  $\mathbf{z} = (z_k)_{k=1,n}$  с компонентами

$$z_k = \frac{\|\mathbf{b}\| r_k(A)}{\|A\|} \quad \text{либо} \quad z_k = \frac{\|\phi(\mathbf{b})\| r_k(A)}{\|\psi(A)\|}.$$

Вид функций  $\phi$ ,  $\psi$ ,  $r_k$  выбираем так, чтобы после подстановки их в СЛАУ норма правой части получившейся системы была либо равна норме правой части исходной системы, либо мажорировала ее. Например, если компоненты вектора решений положить равными

$$z_k = \left( \frac{\max_i |b_i|}{\max_i \sum_{j=1}^n a_{ij}} \right),$$

то после подстановки функций  $\phi$ ,  $\psi$ ,  $r_k$  в систему (7) компоненты вектора правой части этой системы примут вид

$$b_{new,k} = \max_i |b_{init,i}| \left( \frac{\sum_{j=1}^n a_{ij}}{\max_i \sum_{j=1}^n a_{ij}} \right).$$

Тогда для систем (6), (7) матрицы коэффициентов совпадут и будут равны нормы их правых частей. Все тестовые примеры подтвердили оценки ошибок численных решений этих систем

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_{num}\| \leq \|\mathbf{z} - \mathbf{z}_{num}\|.$$

Возможны и другие формулы точных решений СЛАУ с той же матрицей коэффициентов и правой частью, близкой к правой части исходной системы. Предлагаемые методы апробированы для оценки ошибок узловых перемещений дискретных моделей ряда высокоответственных технических объектов.

Сравним описанные в настоящей работе подходы обратного анализа ошибок численного решения системы уравнений с матрицей жесткости и метод, предложенный в работах Уилкинсона.

**1. Обратный анализ ошибок по Уилкинсону [9].** Численное решение  $\mathbf{u}_{num}$  системы  $(A + \Delta A)\mathbf{u} = \mathbf{b}_{init}$  представим как точное решение возмущенной системы  $(A + \Delta A)\mathbf{u} = \mathbf{b} + \Delta \mathbf{b} = \mathbf{b}_{new}$ .

Затем получим оценку ошибки численного решения

$$\frac{\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_{num}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \frac{\text{cond}(A)}{1 - \|A^{-1}\| \|\Delta A\|} \left( \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\Delta \mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|} \right).$$

**2. Обратный анализ ошибок по методу 1.** Численное решение  $\mathbf{u}_{num}$  системы  $\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{b}$  представим как точное решение возмущенной системы  $\mathbf{A}\mathbf{z} = \mathbf{b}_{new}$ , где  $\mathbf{b}_{new} = \mathbf{A}\mathbf{u}_{num}$ . Решим численным методом  $M$  системы уравнений  $\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{b}$  и  $\mathbf{A}\mathbf{z} = \mathbf{b}_{new}$ . Получим оценку ошибки численного решения исходной системы  $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_{num}\| \approx \|\mathbf{u}_{num} - \mathbf{z}_{num}\|$ .

**3. Обратный анализ ошибок по методу 2.** Строим систему линейных уравнений  $\mathbf{A}\mathbf{z} = \mathbf{b}_{new}$  с известным решением

$$z_k = \left( \frac{\max_l |b_l|}{\max_i \sum_{j=1}^n a_{ij}} \right)_k$$

и правой частью

$$b_{new,k} = \max_l |b_{init,l}| \left( \frac{\sum_{j=1}^n a_{ij}}{\max_i \sum_{j=1}^n a_{ij}} \right)_k = \left[ \max_l |b_{init,l}| \cdot \alpha_i \right]_{i=1, \dots, n}.$$

Нормы правых частей построенной и исходной систем равны. Численным методом  $M$  решаем системы уравнений  $\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{b}$  и  $\mathbf{A}\mathbf{z} = \mathbf{b}_{new}$ . Оценка ошибки численного решения исходной системы равна  $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_{num}\|_\infty \leq \|\mathbf{z} - \mathbf{z}_{num}\|_\infty$ .

Смысловая характеристика оценок, полученных методами 1 и 2, такова. Чем точнее решена исходная СЛАУ, тем меньше невязка, тем ближе точное и приближенное решения. В этом случае оценка по методу 1 точнее и будет являться оптимистической. Оценка по методу 2 — это верхняя граница всех возможных ошибок, и она, соответственно, является пессимистической.

#### 4. Оценки ошибок округления при конечно-элементном анализе в модельных и прикладных задачах

Рассмотрим количественные оценки влияния ошибок округления на точность решений в связи с шагом регулярной сетки  $e_{size}$  и размерностью  $n$  матрицы жесткости, полученные для конечно-элементных моделей силовых конструкций при численном решении ряда модельных и прикладных задач.

В табл. 3 и 4 приведены оценки ошибок узловых перемещений, обусловленных влиянием ошибок округления, в задачах, полученных тремя методами, для рефлектора наземной зеркальной антенны спутниковой связи и блока механического устройства регулировки положения рефлектора зеркальной антенны космического базирования.

Из полученных результатов следует, что оценка ошибки, найденной методом Уилкинсона, весьма завышена по сравнению с оценками, полученными методами 1 и 2. Для рассматриваемых примеров метод Уилкинсона дает заведомо неадекватные результаты. Оценки по методам 1 и 2 подтверждены на практике многими экспериментами.

Т а б л и ц а 3. Ошибки округления при анализе численного решения уравнения для рефлектора наземной антенны, мм

$e_{size}$ , мм	$n$	Метод Уилкинсона	Метод 1	Метод 2
200	108 540	$2.235 \cdot 10^6$	$3.761 \cdot 10^{-11}$	$9.212 \cdot 10^{-10}$
150	169 560	$5.436 \cdot 10^6$	$1.117 \cdot 10^{-10}$	$1.185 \cdot 10^{-9}$
100	339 804	$1.993 \cdot 10^7$	$1.322 \cdot 10^{-10}$	$3.289 \cdot 10^{-9}$
80	513 576	$6.453 \cdot 10^7$	$1.532 \cdot 10^{-10}$	$5.358 \cdot 10^{-9}$
60	869 328	$2.708 \cdot 10^8$	$4.429 \cdot 10^{-10}$	$9.829 \cdot 10^{-9}$
40	1 909 548	$8.938 \cdot 10^8$	$1.238 \cdot 10^{-9}$	$2.321 \cdot 10^{-8}$

Т а б л и ц а 4. Ошибки округления при анализе численного решения уравнения для блока механического устройства регулировки, мм

$e_{size}$ , мм	$n$	Метод Уилкинсона	Метод 1	Метод 2
20	180 875	$1.925 \cdot 10^{10}$	$6.342 \cdot 10^{-5}$	$1.031 \cdot 10^{-2}$
10	221 456	$4.439 \cdot 10^{11}$	$8.345 \cdot 10^{-5}$	$1.500 \cdot 10^{-2}$
5	312 212	$1.051 \cdot 10^{11}$	$1.144 \cdot 10^{-4}$	$2.504 \cdot 10^{-2}$
3	472 130	$9.568 \cdot 10^{11}$	$4.821 \cdot 10^{-4}$	$3.071 \cdot 10^{-2}$

Как показано в [6], для растягиваемой прямоугольной пластины разница между точным и численным результатами при различных вариантах сетки конечных элементов находится в интервале от  $3.25 \cdot 10^{-3}$  до  $4.13 \cdot 10^{-3}$ . Сравнивая эти значения с оценками ошибок по методам 1 и 2, можно сделать вывод, что фактическая величина ошибок находится внутри интервала, границы которого определяются оценками, полученными методами 1 и 2.

## Заключение

Актуальность вопросов сходимости численных оценок, получаемых конечно-элементными методами в задачах определения НДС силовых конструкций, обусловлена систематически возникающими затруднениями вычислительного характера, связанными с проблемами устойчивости и сходимости численных решений. Эти затруднения наблюдаются для конструкций различного типа, при различных видах их деформирования, что, на наш взгляд, свидетельствует об универсальном характере этих проблем. С учетом влияния ошибок округления сходимость конечно-элементного решения контролировать сложно: при большом числе конечных элементов решение может расходиться из-за накапливающихся ошибок округления, даже если условия сходимости выполняются. Особенно это важно в случаях оценки НДС геометрически сложных конструкций, так как в этих задачах доступно только определение такой системы перемещений, которая доставляет минимум функционалу полной потенциальной энергии системы, т. е. реализуется инженерный подход метода конечных элементов.

Классические оценки скорости сходимости основаны на асимптотических свойствах решений. При решении прикладных задач исследования НДС силовых конструкций технических объектов более важными оказываются не столько асимптотические свойства, сколько оценка степени близости к точному приближенного решения, полученного

на вполне определенной сетке конечных элементов с конечной величиной шага сетки. Предложенные в статье методы обратного анализа ошибок позволяют достаточно точно оценить эту степень близости, что подтверждают расчеты, выполненные для практических задач.

## Список литературы / References

- [1] **Лаевский Ю.М.** О некоторых итогах развития современной вычислительной математики // Вычисл. технологии. 2002. Т. 7, № 2. С. 74–83.  
**Laevsky, Yu.M.** On some conclusions of numerical mathematics development // Comput. Technologies. 2002. Vol. 7, No. 2. P. 74–83. (In Russ.)
- [2] **Коробейников С.Н.** Нелинейное деформирование твердых тел. Новосибирск: Изд-во СО РАН. 2000. 262 с.  
**Korobeynikov, S.N.** Nonlinear deformation of solids. Novosibirsk: Izd-vo SO RAN. 2000. 262 p. (In Russ.)
- [3] **Кукуджанов В.Н.** Численные методы в механике сплошных сред. М.: МАТИ, 2006. 157 с.  
**Kukudzhanov, V.N.** Numerical methods in the mechanics of continuous media. Moscow: MATI, 2006. 157 p. (In Russ.)
- [4] **Фролов М.Е.** О реализации контроля точности решений плоских задач теории упругости при помощи смешанных конечных элементов // Вычисл. механика сплошных сред. 2014. Т. 7, № 1. С. 73–81.  
**Frolov, M.E.** Implementation of error control for solving plane problems in linear elasticity by mixed finite elements // Comput. Continuum Mechanics. 2014. Vol. 7, No. 1. P. 73–81. (In Russ.)
- [5] **Doronin, S.V., Rogalev, A.N.** Error in calculating the extension of a plate with a circular notch // Russ. Eng. Res. 2015. Vol. 35, No. 4. P. 235–238.
- [6] **Doronin, S.V., Rogalev, A.N., Reizmund, E.M.** Problems on comparing analytical and numerical estimations of stressed-deformed state of structure elements // J. of Machinery Manufacture and Reliability. 2017. Vol. 46, No. 4. P. 364–369.
- [7] **Воеводин В.В.** Вычислительные основы линейной алгебры. М.: Наука, 1977. 400 с.  
**Voevodin, V.V.** Computational foundations of linear algebra. M.: Nauka, 1977. 400 p. (In Russ.)
- [8] **Хорн Р., Джонсон Ч.** Матричный анализ. М.: Мир, 1989. 655 с.  
**Horn, R., Johnson, C.** Matrix analysis. Baltimore; London: The John Hopkins Univ. Press, 1989. 655 p.
- [9] **Wilkinson, J.** Rounding errors in algebraic processes. London: Her Majesty's Stationary Office, 1963. 161 p.
- [10] **Babuska, I., Rheinboldt, W.** A posteriori error analysis of finite element solutions for one dimensional problems // SIAM J. Numer. Anal. 1981. No. 18. P. 565–589.
- [11] **Голуб Дж., Ван Лоун Ч.** Матричные вычисления. М.: Мир, 1999. 548 с.  
**Golub, J., Van Lown, C.** Matrix calculations. Baltimore; London: The John Hopkins Univ. Press, 1989. 548 p.
- [12] **Hager, W.** Condition estimates // SIAM J. on Scientific & Statistical Comput. 1984. Vol. 5. P. 311–316.

- [13] **Higham, N.** Accuracy and stability of numerical algorithms. USA, Philadelphia: SIAM, 2002. 710 p.
- [14] **Higham, N.** FORTRAN codes for estimating the one-norm of a real or complex matrix, with applications to condition estimation (Algorithm 674) // ACM Trans. Math. Software. 1988. Vol. 14, No. 4. P. 381–396.
- [15] **Kannan, R., Hendry, S., Higham, N., Tisseur, F.** Detecting the causes of ill-conditioning in structural finite element models. Manchester, 2013. 27 p. (MIMS EPrint: 2013.35, School of Math. at the Univ. of Manchester.) Available et: <http://www.manchester.ac.uk/mims/eprints>

*Поступила в редакцию 20 сентября 2017 г.,  
с доработки — 6 февраля 2018 г.*

### **Estimation of the accuracy of numerical analysis for the deformed state of power structures of technical objects**

ROGALYOV, ALEXEY N.<sup>1,\*</sup>, DORONIN, SERGEY V.<sup>2</sup>, MOSKVICHEV, VLADIMIR V.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Institute of Computational Modelling SB RAS, Krasnoyarsk, 660036, Russia

<sup>2</sup>Krasnoyarsk Branch of Institute of Computational Technologies SB RAS, Krasnoyarsk, 660049, Russia

\*Corresponding author: Rogalyov, Alexey N., e-mail: [rogalyov@icm.krasn.ru](mailto:rogalyov@icm.krasn.ru)

The solution of applied problems of technogenic safety, survivability, risk and protection is performed for structures which are close to limiting states. These states are characterized by decreasing safety factors down to one. In this case a mistaken estimation for safety factor may cause the situation when the calculated safety factor will be greater than one but the real safety factor will be less than one. Safety factors estimation is performed on the basis of calculation for stress-strain state characteristics.

Thus, the issues of accuracy and reliability of determining stresses and deformations are an integral part of the problem of man-made safety. In the numerical analysis of the stress-strain state, the stiffness matrix of the design model is formed, the dimension of which reaches up to tens of millions. A large number of computations for tasks of this dimension is presumably leading to significant rounding errors. Ensuring the grid convergence of results by decreasing the grid spacing is inconsistent with the growth of computational errors due to rounding. For finite element analysis of power structures of technical objects, methods of a posteriori reverse error analysis are proposed that control the effect of rounding errors on the result when solving a solving system of linear algebraic equations. The coefficient matrix of this system is the stiffness matrix of the finite element model. The basic idea is to obtain and solve a system of equations with a known exact solution. Comparison of the results of exact and numerical solutions allows us to estimate the magnitude of the error.

*Keywords:* power structures, finite element models, numerical solution accuracy, reverse error analysis.

*Received 20 September 2017*

*Received in revised form 6 February 2018*