

Численное решение интегральных уравнений трехмерных скалярных задач дифракции

А. А. КАШИРИН*, С. И. СМАГИН

Вычислительный центр ДВО РАН, Хабаровск, Россия

*Контактный e-mail: elomer@mail.ru

Рассматриваются задачи дифракции (трансмиссии) стационарных акустических волн на трехмерных однородных включениях. Методами теории потенциала для них получены два слабо сингулярных граничных интегральных уравнения Фредгольма первого рода с одной неизвестной функцией, каждое из которых эквивалентно исходной задаче. Интегральные уравнения аппроксимируются системами линейных алгебраических уравнений, которые затем решаются численно итерационным методом обобщенных минимальных невязок GMRES. При дискретизации этих уравнений используется специальный метод осреднения интегральных операторов со слабыми особенностями в ядрах, позволяющий получать системы с легко вычисляемыми коэффициентами. Метод допускает эффективное распараллеливание и позволяет проводить расчеты в широком диапазоне волновых чисел. Приводятся результаты вычислительных экспериментов, позволяющие судить о возможностях предлагаемого подхода.

Ключевые слова: задача дифракции, уравнение Гельмгольца, граничное интегральное уравнение, численный метод решения.

Введение

Математическое моделирование процессов распространения стационарных волн в средах с трехмерными включениями играет важную роль в различных областях науки и техники и приводит к постановке достаточно сложных задач математической физики. Такие задачи принято называть задачами дифракции (трансмиссии). Они встречаются, например, в радиофизике, дефектоскопии, оптике, акустике океана и атмосферы, геофизике.

В данной работе рассматриваются вопросы численного решения трехмерных стационарных задач дифракции акустических волн на локальных трехмерных включениях. С математической точки зрения они заключаются в решении скалярных уравнений Гельмгольца, которые описывают процессы распространения акустических колебаний в трехмерном пространстве и содержащемся в нем локальном включении. При этом искомые решения должны удовлетворять контактным условиям, заданным на границе включения, и условиям излучения на бесконечности. Кроме того, их поведение существенным образом зависит от соотношений длин распространяющихся волн и характерных размеров включений.

Аналитические решения задач дифракции могут быть найдены только в исключительных случаях, поэтому основным методом исследования дифракционных процессов является прямое компьютерное моделирование. Оно требует предварительного построения дискретной модели исходной задачи, которое может быть выполнено различными способами.

Дискретизацию задач дифракции можно осуществить с помощью конечно-разностных и проекционно-сеточных методов [1, 2]. В этом случае неограниченную область приходится заменять ее конечной подобластью, а условия излучения на бесконечности — краевыми условиями на внешней границе подобласти. Возникающую при такой замене погрешность можно сделать сколь угодно малой, если использовать поглощающие граничные условия (Absorbing Boundary Conditions — ABC) [3] или идеально согласованные слои (Perfectly Matched Layers — PML) [4, 5].

В данной работе задачи дифракции рассматриваются в интегральной форме. Для сведения исходных задач к эквивалентным им интегральным уравнениям применяется непрямой вариант метода интегральных уравнений [6–8]. В этом варианте неизвестные функции (плотности) представляют собой вспомогательные источники волнового поля, распределенные по границе включения, тогда как в прямом варианте метода в качестве неизвестных функций выбираются граничные значения искомого волнового поля и их производные [7, 9, 10]. Оба метода позволяют сводить исходную задачу к различным эквивалентным ей системам двух интегральных уравнений с двумя неизвестными плотностями. Важным достоинством непрямого метода интегральных уравнений является то, что он позволяет уменьшить число неизвестных функций и сформулировать исходную задачу в виде одного интегрального уравнения с одной неизвестной плотностью. Такие уравнения удобны для численного исследования, и полученные в результате их дискретизации задачи менее требовательны к ресурсам компьютера по сравнению с другими эквивалентными формулировками.

Впервые подобный подход предложен в публикациях [11, 12]. Наиболее законченные результаты его применения к исследованию стационарных задач дифракции в классических постановках приведены в работах [7, 13]. Область применения данного подхода ограничена кругом задач, для которых имеются эффективные методы расчета фундаментальных решений, используемых для представления решений в виде поверхностных потенциалов.

Исходная задача рассматривается нами в обобщенной постановке. Она сводится к двум различным слабо сингулярным граничным интегральным уравнениям Фредгольма первого рода с одной неизвестной плотностью, которые ранее для численного решения задач дифракции не применялись. Исследование условий эквивалентности исходной задаче и корректной разрешимости этих уравнений в классе обобщенных функций проведено в [8, 14].

В отличие от интегральных уравнений второго рода, методы численного решения которых хорошо разработаны [15], численные методы решения интегральных уравнений первого рода в течение долгого времени оставались изученными весьма слабо. В общем случае задачи отыскания их решений являются некорректно поставленными. Однако наличие слабой особенности в ядрах соответствующих интегральных операторов позволяет использовать для приближенного решения таких уравнений численные методы, которые не содержат в явном виде процедуру регуляризации [16]. Это явление получило название саморегуляризации и в одномерном случае было исследовано в [17, 18].

В настоящей работе апробируются и развиваются идеи, изложенные в [19, 20]. Для приближенного решения исследуемых интегральных уравнений первого рода реализуются алгоритмы, в которых неизвестная плотность отыскивается в виде линейной комбинации гладких финитных функций, образующих разбиение единицы на поверхности включения. При дискретизации интегрального уравнения поверхностные интегралы приближаются выражениями, содержащими интегралы по пространству \mathbb{R}^3 , которые затем вычисляются аналитически. Это позволяет рассчитывать коэффициенты систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), аппроксимирующих соответствующие интегральные уравнения, по весьма простым формулам. Такой подход, в отличие от наиболее популярного в настоящее время метода граничных элементов [21], не требует предварительной триангуляции поверхности, одинаково просто реализуется как на регулярных, так и на нерегулярных сетках и позволяет обойтись без трудоемкого приближенного вычисления кратных поверхностных интегралов. Впервые такая методика предложена и теоретически обоснована в [19] для численного решения интегральных уравнений, эквивалентных задачам Дирихле для уравнения Лапласа. В последние годы она развивается в работах отечественных [14, 20, 22, 23] и зарубежных [24, 25] авторов.

Дискретизация граничных интегральных уравнений приводит к СЛАУ, имеющим плотно заполненные матрицы с комплексными коэффициентами. Вычислительная сложность их решения прямыми методами имеет оценку $O(M^3)$, где $M = 10^3-10^5$ — порядок СЛАУ. Однако, как показано в работе [14], свойства получаемых матриц таковы, что использование для поиска приближенных решений СЛАУ обобщенного метода минимальных невязок (GMRES) [26] позволяет понизить эту сложность до $O(M^2)$. После того как приближенное решение интегрального уравнения найдено, искомое приближенное решение задачи дифракции при помощи интегральных представлений достаточно просто восстанавливается в любой точке пространства. Описание некоторых других методов построения интегральных уравнений задач дифракции и их численного решения имеется, например, в [27, 28].

В работе приведены обобщенные формулировки для исходной задачи в дифференциальной и интегральной постановках, дано описание применяемого численного метода и изложены результаты вычислительных экспериментов, позволяющие оценить возможности предлагаемого подхода. Теоретическое исследование предложенного численного метода представляет собой самостоятельную задачу, которую предполагается рассмотреть в отдельной работе авторов.

1. Исходная задача и эквивалентные ей интегральные уравнения

Рассмотрим трехмерное евклидово пространство \mathbb{R}^3 с ортогональной системой координат $ox_1x_2x_3$, заполненное однородной изотропной средой с плотностью ρ_e , скоростью распространения акустических колебаний c_e и коэффициентом поглощения γ_e , в котором имеется ограниченное произвольной замкнутой поверхностью Γ однородное изотропное включение с плотностью ρ_i , скоростью звука c_i и коэффициентом поглощения γ_i . Области \mathbb{R}^3 , занятые включением и вмещающей средой, обозначим через Ω_i и Ω_e ($\Omega_e = \mathbb{R}^3 \setminus \Omega_i$).

Пусть в области Ω_e имеются гармонические источники звука, возбуждающие во вмещающей среде исходное волновое поле давлений u_0 . Звуковые волны распространяются в пространстве и, достигая включения, рассеиваются на нем. В результате в области Ω_e

возникают отраженные волны, а в области Ω_i появляются проходящие волны. Поэтому комплексную амплитуду полного поля давлений u можно представить в виде

$$u = \begin{cases} u_i, & x \in \Omega_i, \\ u_e + u_0, & x \in \Omega_e, \end{cases}$$

где u_i, u_e — комплексные амплитуды поля давлений проходящего и отраженного волновых полей.

Сформулируем исходную задачу.

Задача 1. Найти в ограниченной области Ω_i трехмерного евклидова пространства \mathbb{R}^3 и в неограниченной области $\Omega_e = \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}_i$, разделенных замкнутой поверхностью $\Gamma \in C^{r+\beta}$, $r + \beta > 1$, комплекснозначные функции $u_{i(e)} \in H^1(\Omega_{i(e)}, \Delta)$, удовлетворяющие интегральным тождествам

$$\int_{\Omega_{i(e)}} \nabla u_{i(e)} \nabla v_{i(e)}^* dx - k_{i(e)}^2 \int_{\Omega_{i(e)}} u_{i(e)} v_{i(e)}^* dx = 0 \quad \forall v_{i(e)} \in H_0^1(\Omega_{i(e)}), \quad (1)$$

условиям сопряжения на границе раздела сред из Ω_i и Ω_e

$$\langle u_i^- - u_e^+, \mu \rangle_\Gamma = \langle f_0, \mu \rangle_\Gamma \quad \forall \mu \in H^{-1/2}(\Gamma), \quad (2)$$

$$\langle \eta, p_i N^- u_i - p_e N^+ u_e \rangle_\Gamma = \langle \eta, p_e f_1 \rangle_\Gamma \quad \forall \eta \in H^{1/2}(\Gamma),$$

а также условию излучения на бесконечности для u_e

$$\partial u_e / \partial |x| - ik_e u_e = o(|x|^{-1}), \quad |x| \rightarrow \infty, \quad (3)$$

если на границе включения Γ заданы функции $f_0 \in H^{1/2}(\Gamma)$ и $f_1 \in H^{-1/2}(\Gamma)$.

Здесь v^* — комплексно-сопряженная к v функция; $\langle \cdot, \cdot \rangle_\Gamma$ — отношение двойственности на $H^{1/2}(\Gamma) \times H^{-1/2}(\Gamma)$, обобщающее скалярное произведение в $H^0(\Gamma)$; $u^\pm \equiv \gamma^\pm u$, $\gamma^- : H^1(\Omega_i) \rightarrow H^{1/2}(\Gamma)$, $\gamma^+ : H^1(\Omega_e) \rightarrow H^{1/2}(\Gamma)$ — операторы следов; $N^- : H^1(\Omega_i, \Delta) \rightarrow H^{-1/2}(\Gamma)$, $N^+ : H^1(\Omega_e, \Delta) \rightarrow H^{-1/2}(\Gamma)$ — операторы нормальных производных [29]; $f_0 = u_0^+$, $f_1 = N^+ u_0$;

$$k_{i(e)}^2 = \omega (\omega + i\gamma_{i(e)}) / c_{i(e)}^2, \quad \text{Im}(k_{i(e)}) \geq 0, \quad p_{i(e)} = c_{i(e)}^2 k_{i(e)}^{-2} \rho_{i(e)}^{-1},$$

ω — круговая частота колебаний, $c_{i(e)} > 0$, $\rho_{i(e)} > 0$, $\gamma_{i(e)} \geq 0$. Определения используемых здесь и далее функциональных пространств имеются в работе [29].

Замечание 1. Если $\text{Im}(k_e) = 0$, то $u_e \in H_{loc}^1(\Omega_e, \Delta)$.

В статье [8]¹ и работе [14] доказана

Теорема 1. *Задача 1 имеет не более одного решения.*

¹В работе [8] имеются опечатки: на с. 80 в выражении (9) для функции φ_i под знаком первого интеграла G_e следует заменить на G_i , а под знаком второго интеграла вместо φ_i должно быть φ_e .

Введем обозначения

$$(A_{i(e)}q)(x) \equiv \langle G_{i(e)}(x, \cdot), q \rangle_{\Gamma}, \quad (B_{i(e)}q)(x) \equiv \langle N_x G_{i(e)}(x, \cdot), q \rangle_{\Gamma}, \quad (4)$$

$$(B_{i(e)}^*q)(x) \equiv \langle N_{(\cdot)} G_{i(e)}(x, \cdot), q \rangle_{\Gamma}, \quad G_{i(e)}(x, y) = \exp(ik_{i(e)}|x - y|)/(4\pi|x - y|).$$

Решение задачи 1 будем искать в виде потенциалов

$$u_e(x) = (A_e q)(x), \quad x \in \Omega_e, \quad (5)$$

$$u_i(x) = (p_{ei}A_i(N^+u_e + f_1) - B_i^*(u_e^+ + f_0))(x), \quad x \in \Omega_i,$$

где $q \in H^{-1/2}(\Gamma)$ — неизвестная плотность; $f_0 \in H^{1/2}(\Gamma)$, $f_1 \in H^{-1/2}(\Gamma)$; $p_{ei} = p_e/p_i$.

Ядрами интегральных операторов здесь являются фундаментальные решения уравнений Гельмгольца и их нормальные производные. Поэтому, как показано в работе [8], они удовлетворяют тождествам (1) и условию излучения на бесконечности (3). Кроме того, выполнение для них первого из условий сопряжения (2) автоматически влечет за собой выполнение второго условия сопряжения. Подставляя потенциалы (5) в первое условие сопряжения, получаем слабо сингулярное интегральное уравнение Фредгольма первого рода для определения неизвестной плотности q :

$$\langle Cq, \mu \rangle_{\Gamma} = \langle f_2, \mu \rangle_{\Gamma} \quad \forall \mu \in H^{-1/2}(\Gamma), \quad (6)$$

где

$$C = (0.5 + B_i^*)A_e + p_{ei}A_i(0.5 - B_e), \quad f_2 = -(0.5 + B_i^*)f_0 + p_{ei}A_i f_1.$$

Задача 1 допускает еще одну эквивалентную формулировку в виде интегрального уравнения Фредгольма первого рода со слабой особенностью в ядре. Будем искать ее решение в виде

$$u_i(x) = (A_i q)(x), \quad x \in \Omega_i, \quad (7)$$

$$u_e(x) = (A_e(f_1 - p_{ie}N^-u_i) - B_e^*(f_0 - u_i^-))(x), \quad x \in \Omega_e,$$

где $q \in H^{-1/2}(\Gamma)$ — неизвестная плотность, $f_0 \in H^{1/2}(\Gamma)$, $f_1 \in H^{-1/2}(\Gamma)$, $p_{ie} = p_i/p_e$.

В этом случае задача 1 сводится к уравнению

$$\langle Dq, \mu \rangle_{\Gamma} = \langle f_0, \mu \rangle_{\Gamma} \quad \forall \mu \in H^{-1/2}(\Gamma), \quad (8)$$

$$D = (0.5 - B_e^*)A_i + p_{ie}A_e(0.5 + B_i).$$

Теорема 2. Пусть $f_0 \in H^{1/2}(\Gamma)$, $f_1 \in H^{-1/2}(\Gamma)$, $\gamma_e > 0$ или ω не является собственной частотой задачи

$$\Delta u + k_e^2 u = 0, \quad x \in \Omega_i, \quad u^- = 0. \quad (9)$$

Тогда уравнения (6) и (8) корректно разрешимы в классе плотностей $q \in H^{-1/2}(\Gamma)$ и формулы (5) и (7) дают решение задачи 1.

Теорема 2 для уравнения (6) доказана в работах [8, 14]. Доказательство этой теоремы для уравнения (8) проводится аналогично, оно имеется в работе [14].

Замечание 2. В тех случаях, когда нас больше интересует волновое поле в области Ω_e , предпочтительнее использовать уравнение (6), которое допускает расчет отраженного поля по более простой формуле. По аналогичной причине, если нас интересует проходящее волновое поле в области Ω_i , предпочтительнее использовать уравнение (8).

2. Численный метод

Применяемый метод численного решения представляет собой развитие методики отыскания приближенных обобщенных решений краевых задач, предложенной и апробированной в работах [19, 20]. Кратко опишем общую схему его реализации. Построим покрытие поверхности Γ системой $\{\Gamma_m\}_{m=1}^M$ окрестностей узловых точек $x'_m \in \Gamma$, лежащих внутри сфер радиусов h_m с центрами в x'_m , и обозначим через $\{\varphi_m\}$ подчиненное ему разбиение единицы. В качестве φ_m будем использовать функции

$$\varphi_m(x) = \varphi'_m(x) \left(\sum_{k=1}^M \varphi'_k(x) \right)^{-1}, \quad \varphi'_m(x) = \begin{cases} (1 - r_m^2/h_m^2)^3, & r_m < h_m, \\ 0, & r_m \geq h_m, \end{cases}$$

где $x \in \Gamma$, $r_m = |x - x'_m|$, $\varphi_m \in C^1(\Gamma)$ при $\Gamma \in C^{r+\beta}$, $r + \beta > 1$.

Приближенные решения уравнений (6) и (8) будем искать на сетке $\{x_m\}$,

$$x_m = \frac{1}{\bar{\varphi}_m} \int_{\Gamma} x \varphi_m d\Gamma, \quad \bar{\varphi}_m = \int_{\Gamma} \varphi_m d\Gamma,$$

узлами которой являются центры тяжести функций φ_m . Будем предполагать, что для всех $m = 1, 2, \dots, M$ выполняются неравенства

$$0 < h' \leq |x_m - x_n|, \quad m \neq n, \quad n = 1, 2, \dots, M,$$

$$h' \leq \sigma_m \leq h_m \leq h, \quad h/h' \leq q_0 < \infty,$$

где h, h' — положительные числа, зависящие от M ; q_0 не зависит от M ; $\sigma_m^2 = 0.5\bar{\varphi}_m$.

Вместо заданной на Γ неизвестной функции q будем искать обобщенную функцию $q\delta_{\Gamma}$, действующую по правилу

$$(q\delta_{\Gamma}, \eta)_{\mathbb{R}^3} = \langle q, \eta \rangle_{\Gamma} \quad \forall \eta \in H^1(\mathbb{R}^3).$$

Эту функцию будем приближать выражением

$$q(x) \delta_{\Gamma}(x) \approx \sum_{n=1}^M q_n \bar{\varphi}_n \psi_n(x), \quad \psi_n(x) = (\pi \sigma_n^2)^{-3/2} \exp(-(x - x_n)^2 / \sigma_n^2), \quad x \in \mathbb{R}^3,$$

где q_n — неизвестные коэффициенты.

Функции $\psi_n(x) \in C^{\infty}(\mathbb{R}^3)$ близки к нулю вне достаточно малой окрестности поверхности Γ . Таким образом, если

$$q_n \bar{\varphi}_n = \langle q, \varphi_n \rangle_{\Gamma}, \quad \eta_n = \int_{\mathbb{R}^3} \eta(x) \psi_n(x) dx,$$

то

$$\eta_n \approx \int_{\Gamma} \eta(x) \varphi_n(x) d\Gamma,$$

$$\begin{aligned} \left(\sum_{n=1}^M q_n \bar{\varphi}_n \psi_n, \eta \right)_{\mathbb{R}^3} &= \sum_{n=1}^M q_n \bar{\varphi}_n \int_{\mathbb{R}^3} \eta(x) \psi_n(x) dx = \sum_{n=1}^M \eta_n \langle q, \varphi_n \rangle_{\Gamma} = \\ &= \left\langle q, \sum_{n=1}^M \eta_n \varphi_n \right\rangle_{\Gamma} \approx \langle q, \eta \rangle_{\Gamma} \quad \forall q \in H^{-1/2}(\Gamma) \quad \forall \eta \in H^1(\mathbb{R}^3). \end{aligned}$$

В частности, при достаточно гладкой функции η мы можем показать, что

$$\eta_n = \int_{\mathbb{R}^3} \eta(x) \psi_n(x) dx = \eta(x_n) + O(h^2) = \frac{1}{\bar{\varphi}_n} \int_{\Gamma} \eta(x) \varphi_n(x) d\Gamma + O(h^2).$$

Таким образом, для любой такой функции η и $q \in H^1(\Gamma)$ имеем

$$\begin{aligned} \langle q, \eta \rangle_{\Gamma} &= \left\langle q, \sum_{n=1}^M \varphi_n \eta \right\rangle_{\Gamma} = \sum_{n=1}^M \eta_n \langle q, \varphi_n \rangle_{\Gamma} + \sum_{n=1}^M q_n \langle (\eta - \eta_n), \varphi_n \rangle_{\Gamma} + \\ &+ \sum_{n=1}^M \langle (q - q_n) (\eta - \eta_n), \varphi_n \rangle_{\Gamma} = \sum_{n=1}^M \eta_n q_n \bar{\varphi}_n + O(h^2) = \\ &= \sum_{n=1}^M q_n \bar{\varphi}_n \int_{\mathbb{R}^3} \eta(x) \psi_n(x) dx + O(h^2) = \left(\sum_{n=1}^M q_n \bar{\varphi}_n \psi_n, \eta \right)_{\mathbb{R}^3} + O(h^2). \end{aligned}$$

Приближение плотности потенциала простого слоя объемной плотностью позволяет получать простые формулы для аппроксимации интегрального оператора $A_{i(e)}$ из (4). Теоретическое обоснование изложенного подхода имеется в работе [19].

Интегральные операторы из (4) на Γ аппроксимируются выражениями [14, 20]

$$\langle A_{i(e)} q, \varphi_m \rangle_{\Gamma} \approx \sum_{n=1}^M A_{i(e)}^{mn} q_n, \quad m = 1, 2, \dots, M, \quad (10)$$

$$A_{i(e)}^{mn} \equiv A_{mn}(k_{i(e)}), \quad A_{mn}(k) = \frac{\bar{\varphi}_m \bar{\varphi}_n}{8\pi r_{mn}} \exp(\mu_{mn}^2 - \gamma_{mn}^2) (w(z_{mn}^-) - w(z_{mn}^+)), \quad n \neq m,$$

$$A_{mm}(k) = \frac{\bar{\varphi}_m^2}{4\pi} \exp(\mu_{mm}^2) \left(ikw(\mu_{mm}) + \frac{\sqrt{2\pi}}{\bar{\varphi}_m} \left(\frac{\bar{\varphi}_m}{\pi\sigma_m} + 2\sigma_m - \frac{k^2\sigma_m^3}{3} \right) \right),$$

$$\sigma_{mn}^2 = \sigma_m^2 + \sigma_n^2, \quad \mu_{mn} = 0.5k\sigma_{mn}, \quad z_{mn}^{\pm} = \mu_{mn} \pm i\gamma_{mn}, \quad \gamma_{mn} = r_{mn}/\sigma_{mn}, \quad i^2 = -1,$$

$$w(z) = -\frac{2i}{\sqrt{\pi}} \exp(-z^2) \int_z^{\infty} \exp(t^2) dt,$$

$$\langle aq + B_{i(e)} q, \varphi_m \rangle_{\Gamma} \approx \sum_{n=1}^M B_{i(e)}^{mn} q_n, \quad m = 1, 2, \dots, M, \quad a = \pm 0.5, \quad (11)$$

$$\langle aq + B_{i(e)}^* q, \varphi_m \rangle_{\Gamma} \approx \sum_{n=1}^M B_{i(e)}^{nm} q_n, \quad m = 1, 2, \dots, M, \quad (12)$$

$$B_{i(e)}^{mn} = \frac{\eta_{mn}}{4\pi r_{mn}^2} \exp(ik_{i(e)}r_{mn}) (ik_{i(e)}r_{mn} - 1) \bar{\varphi}_m \bar{\varphi}_n, \quad n \neq m,$$

$$B_{i(e)}^{mm} = (-|a| + a + Gs_m) \bar{\varphi}_m, \quad \eta_{mn} = \sum_{l=1}^3 n_{ml} \frac{x_{ml} - x_{nl}}{r_{mn}}, \quad Gs_m = - \sum_{n \neq m}^M \frac{\eta_{mn} \bar{\varphi}_n}{4\pi r_{mn}^2},$$

n_{ml} — компоненты единичного вектора внешней нормали к поверхности Γ в точке x_m .

Операторы в левых частях уравнений (6) и (8) аппроксимируем композициями операторов (10)–(12):

$$\langle Cq, \varphi_m \rangle_{\Gamma} \approx \sum_{n=1}^M C_{ie}^{nm} q_n, \quad \langle Dq, \varphi_m \rangle_{\Gamma} \approx - \sum_{n=1}^M C_{ei}^{nm} q_n, \quad m = 1, 2, \dots, M, \quad (13)$$

$$C_{ie}^{nm} = B_i^{nm} A_e^{mn} - p_{ei} A_i^{mn} B_e^{mn},$$

а правые части уравнений (6) и (8) — по формулам

$$\langle f_2, \varphi_m \rangle_{\Gamma} \approx \sum_{n=1}^M (p_{ei} A_i^{mn} f_{1n} - B_i^{nm} f_{0n}), \quad \langle f_0, \varphi_m \rangle_{\Gamma} = \bar{\varphi}_m f_{0m}, \quad (14)$$

$$f_{lm} = \langle f_l, \varphi_m / \bar{\varphi}_m \rangle_{\Gamma}, \quad l = 0, 1, \quad m = 1, 2, \dots, M.$$

Решая соответствующие СЛАУ, находим приближенные значения плотностей интегральных уравнений в точках дискретизации. После этого искомое решение задачи дифракции с помощью интегральных представлений может быть одинаково просто и точно вычислено как в ближней, так и в дальней зонах.

3. Результаты численных экспериментов

Правильность и точность численного метода проверялись путем численного решения тестовых задач с известными точными решениями. В качестве последних рассматривались внутренние и внешние краевые задачи Дирихле и Неймана для уравнения Гельмгольца в областях, ограниченных единичной сферой и трехосным эллипсоидом, а также задача дифракции плоской волны на единичном шаре. Также проверялась сходимости приближенных решений к точным решениям тех же задач на сгущающихся сетках. Кроме того, использовались результаты численного решения трехмерных задач дифракции, полученные другим приближенным способом, основанным на сведении исходной задачи к системе из двух граничных интегральных уравнений Фредгольма первого и второго рода, приведенные в [30]. Во всех рассмотренных случаях имело место хорошее согласование решений.

Пример 1. Рассматривается задача дифракции плоской акустической волны на единичном шаре с центром в начале координат и тремя различными наборами параметров вмещающей среды и включения. Комплексная амплитуда исходного волнового поля давлений имеет вид $u_0(x) = \exp(ik_e x_3)$, параметры сред: I) $k_i = 12.5$, $\rho_i = 4$, $k_e = 8$, $\rho_e = 3$; II) $k_i = 7$, $\rho_i = 2$, $k_e = 16.5$, $\rho_e = 5$; III) $k_i = 21$, $\rho_i = 7$, $k_e = 13.5$, $\rho_e = 4.5$.

Точное решение этой задачи имеет вид (см. [31])

$$u_e(r, \theta) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2m+1) i^m a_m}{b_m} h_m(k_e r) P_m(\cos \theta), \quad r \geq 1, \quad (15)$$

$$u_i(r, \theta) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2m+1) i^{m+1} p_e}{k_e b_m} j_m(k_i r) P_m(\cos \theta), \quad r \leq 1. \quad (16)$$

Здесь $r = |x|$, $\cos \theta = x_3/r$,

$$a_m = (p_i j_m(k_e r) j'_m(k_i r) - p_e j_m(k_i r) j'_m(k_e r))|_{r=1},$$

$$b_m = (p_e j_m(k_i r) h'_m(k_e r) - p_i h_m(k_e r) j'_m(k_i r))|_{r=1},$$

$$j_m(kr) = \sqrt{\frac{\pi}{2kr}} J_{m+1/2}(kr), \quad h_m(kr) = \sqrt{\frac{\pi}{2kr}} H_{m+1/2}^{(1)}(kr),$$

$J_{m+1/2}$ и $H_{m+1/2}^{(1)}$ — функции Бесселя и функции Ханкеля 1-го рода $(m + 1/2)$ -го порядка соответственно, P_m — полиномы Лежандра m -го порядка.

Известно, что положительные корни функций j_m , которые образуют спектр задачи (9), не являются алгебраическими числами [32]. Поэтому k_e^2 не совпадают с собственными значениями задачи (9) и задача дифракции из примера 1 сводится к эквивалентным уравнениям (6) и (8) в силу теоремы 2.

Используя (15), (16), вспомогательные задачи Дирихле и формулы для предельных значений нормальных производных потенциала простого слоя, можно показать, что решения уравнений (6) и (8) в примере 1 имеют соответственно вид

$$q = - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2m+1) i^{m+1} a_m P_m(\cos \theta)}{k_e b_m j_m(k_e)}, \quad (17)$$

$$q = - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2m+1) i^{m+2} p_e P_m(\cos \theta)}{k_i k_e b_m h_m(k_i)}. \quad (18)$$

Расчеты проводились для проверки правильности работы алгоритма и определения скорости сходимости приближенных решений интегральных уравнений (6) и (8) к их точным решениям (17) и (18) в норме пространства сеточных функций [19]

$$\|q^h\|_{H_h^{-1/2}(\Gamma)}^2 = \sum_{m,n=1}^M A_{mn} q_m q_n^*, \quad (19)$$

где q_n^* — комплексно-сопряженное к q_n число,

$$A_{mn} = \frac{\bar{\varphi}_m \bar{\varphi}_n}{2\pi^{3/2} r_{mn}} \int_0^{\gamma_{mn}} \exp(-t^2) dt, \quad m \neq n, \quad A_{mm} = \frac{\bar{\varphi}_m^2}{2\pi^{3/2} \sigma_{mm}} + \frac{\sigma_{mm} \bar{\varphi}_m}{2\pi^{1/2}}.$$

С этой целью результаты расчетов в примере 1 представлены в виде графиков зависимости $\lg \varepsilon$ от $\lg M$, где ε — относительная погрешность вычисления решения. При точном степенном законе убывания погрешности эти графики асимптотически переходят в прямые линии с наклоном $\operatorname{tg} \alpha = -p/2$, где p — порядок аппроксимации относительно “шага” $h \sim M^{-1/2}$ сетки, заданной на граничной поверхности.

Дискретизация уравнений (6) и (8) осуществлялась по формулам (13), (14), количество точек дискретизации M здесь и далее варьировалось от 500 до 128 000, решения СЛАУ находились численно при помощи обобщенного метода минимальных невязок

(GMRES). В работе [14] показано, что именно этот итерационный метод вариационного типа является наилучшим для численного решения СЛАУ, полученных в результате дискретизации интегральных уравнений задач дифракции.

Вычисления проводились на кластере ВЦ ДВО РАН. Декомпозиции подвергались наиболее ресурсоемкие части алгоритма: подпрограмма решения СЛАУ и подпрограмма вычисления решения задачи дифракции во внешней области. Эксперименты показали, что алгоритм хорошо поддается распараллеливанию: при удвоении числа процессоров время работы программы уменьшается в среднем в 1.8 раза (см. ниже рис. 4, а). Это обусловлено достаточно большим числом действий, пригодных для параллельного расчета, по сравнению с теми, которые необходимо выполнять на одном процессоре.

На рис. 1 приведены значения относительных погрешностей решений уравнений (6) и (8) в норме (19) для примера 1. Здесь и далее результаты для первого набора параметров помечены квадратами, для второго — треугольниками, для третьего — кружками. Видно, что при достаточно больших M погрешность решений имеет порядок не хуже $h^2 \sim M^{-1}$.

На рис. 2 приведены значения относительных погрешностей решений задач дифракции из примера 1, посчитанных в норме пространств сеточных функций $H_h^0(\Omega_{i(e)})$. Видно, что и в этом случае при достаточно больших M погрешность решений имеет порядок не хуже $h^2 \sim M^{-1}$.

Пример 2. Рассматривается задача дифракции для эллипсоида с полуосями (0.4, 1, 0.2), падающее поле создается точечным источником и имеет вид

$$u_0(x) = \exp(ik|x - y_0|)/(|x - y_0|), \tag{20}$$

параметры сред те же, что и в примере 1, $y_0 = (2, 2, 2)$.

Поскольку решения задачи из примера 2 неизвестны, в качестве “точных” выбрали ее приближенные решения с наибольшим количеством точек дискретизации $M = 127\,969$. На рис. 3, а приведены графики погрешностей решений этой задачи, полученных с использованием уравнения (6). Видно, что имеет место сходимость последова-

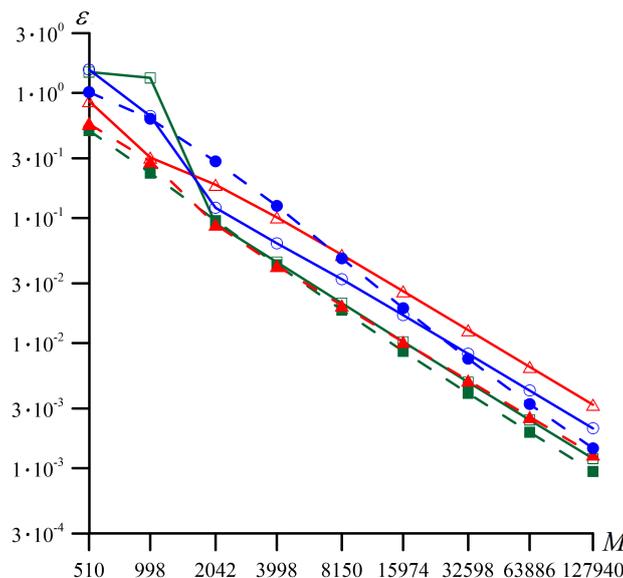


Рис. 1. Погрешности решений интегральных уравнений из примера 1: сплошная линия — уравнение (8), штриховая — уравнение (6)

тельности приближенных решений к “точным”. При этом погрешность решений имеет порядок не хуже $h^2 \sim M^{-1}$.

На рис. 3, б изображены вещественная (сплошная линия) и мнимая (штриховая) части решения u_e на отрезке $x_1 = 0$, $-5 \leq x_2 \leq 5$, $x_3 = -1$ для исходных данных $k_i = 21$, $\rho_i = 7$, $k_e = 13.5$, $\rho_e = 4.5$.

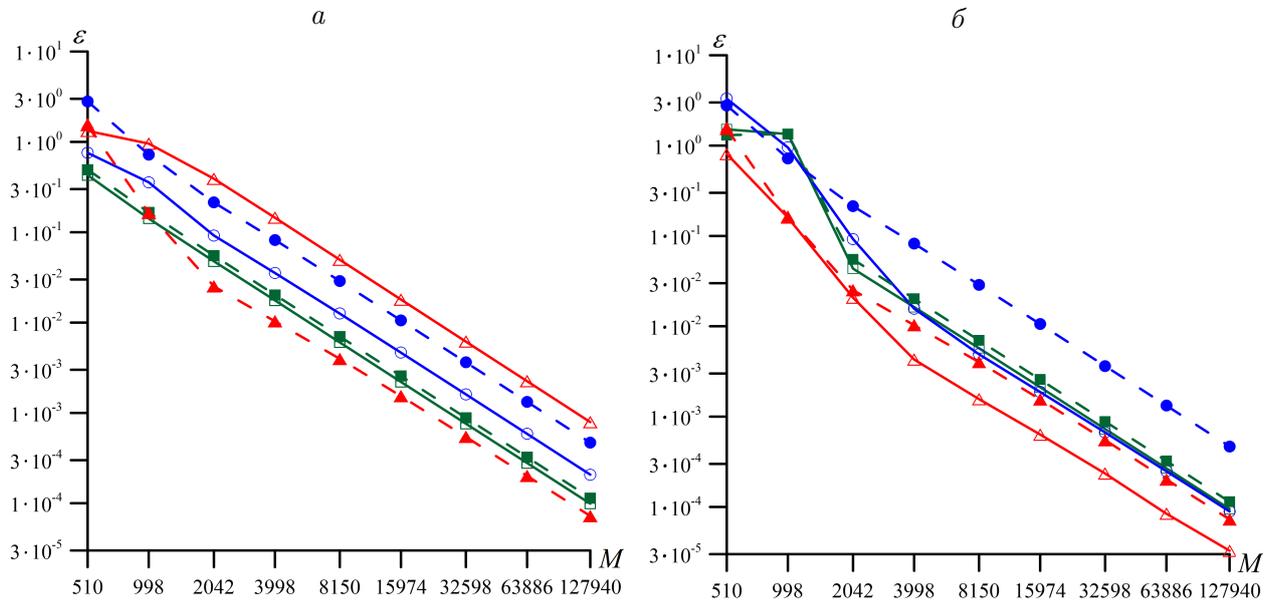


Рис. 2. Погрешности решений задач дифракции из примера 1, полученные с использованием уравнения (6) — а и уравнения (8) — б: сплошная линия — для функции u_i , штриховая — для функции u_e

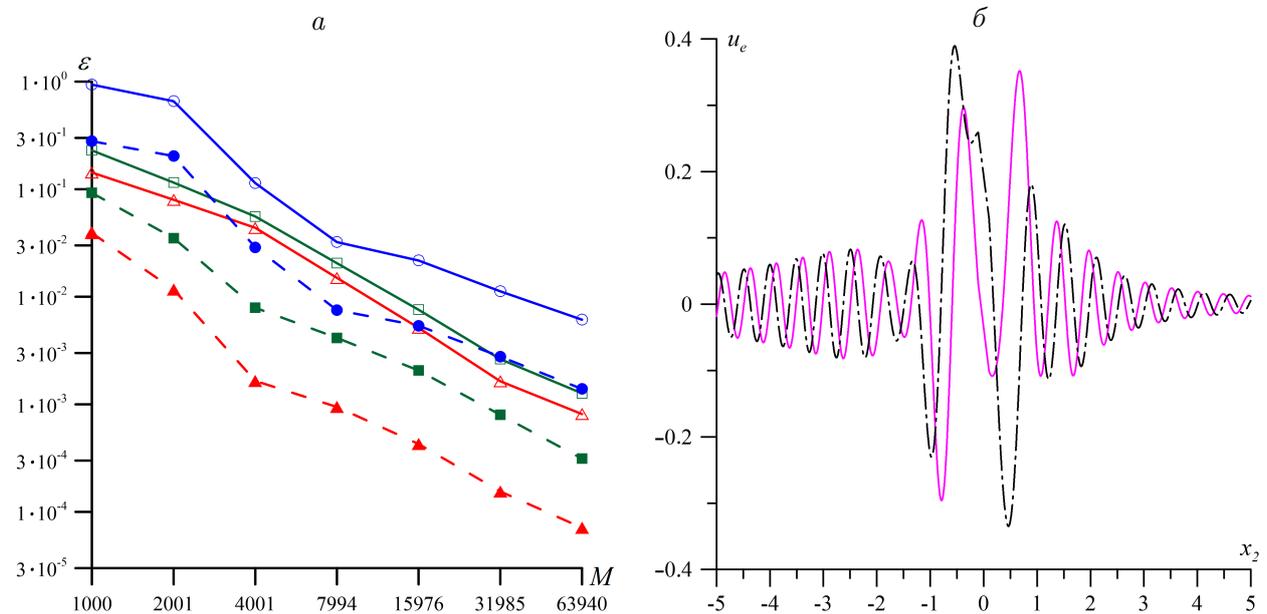


Рис. 3. Результаты решения задач дифракции из примера 2, полученные с использованием уравнения (6): а — погрешности решений (сплошная линия — для функции u_i , штриховая — для функции u_e); б — вещественная (сплошная линия) и мнимая (штриховая) части отраженного поля u_e на отрезке $x_1 = 0$, $-5 \leq x_2 \leq 5$, $x_3 = -1$ с параметрами сред $k_i = 21$, $\rho_i = 7$, $k_e = 13.5$, $\rho_e = 4.5$

Пример 3. Рассматривается задача дифракции акустических волн на включении, границей которого является эллипсоид $(0.75, 1, 0.5)$ с центром в точке $(0, 0, -1)$. Падающее поле создается точечным источником вида (20), расположенным в точке $(0, 2, 2)$. Круговая частота колебаний $\omega = 1$, параметры сред: $c_e = 0.125$, $\rho_e = 3$, $\gamma_e = 0.05$, $c_i = 0.07$, $\rho_i = 5$, $\gamma_i = 0.02$.

На рис. 4, *a* приведены графики времени решения СЛАУ из примера 3 для различных значений M , измеренного в секундах, в зависимости от количества ядер P , а на рис. 4, *б* — значения добавочного поля $\Delta|u_e| = |u_e + u_0| - |u_0|$ на квадрате $-5 \leq x_1 \leq 5$,

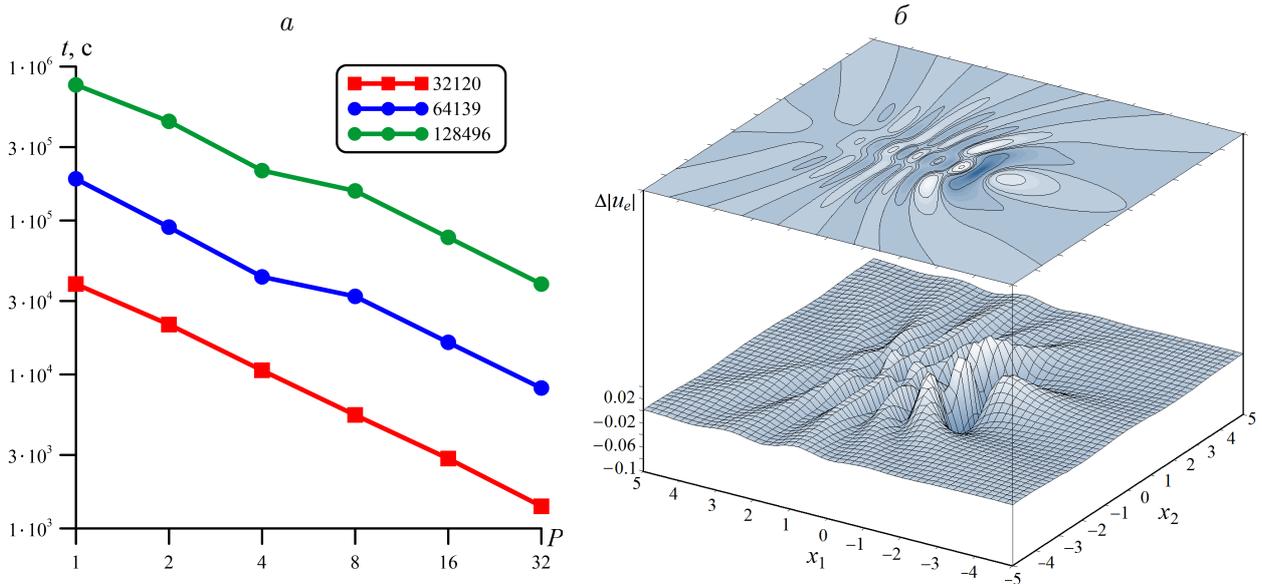


Рис. 4. Время решения СЛАУ из примера 3 при распараллеливании в зависимости от количества ядер P (*a*) и добавочное поле $\Delta|u_e|$ на квадрате $-5 \leq x_1 \leq 5$, $-5 \leq x_2 \leq 5$, $x_3 = 0$ (*б*)

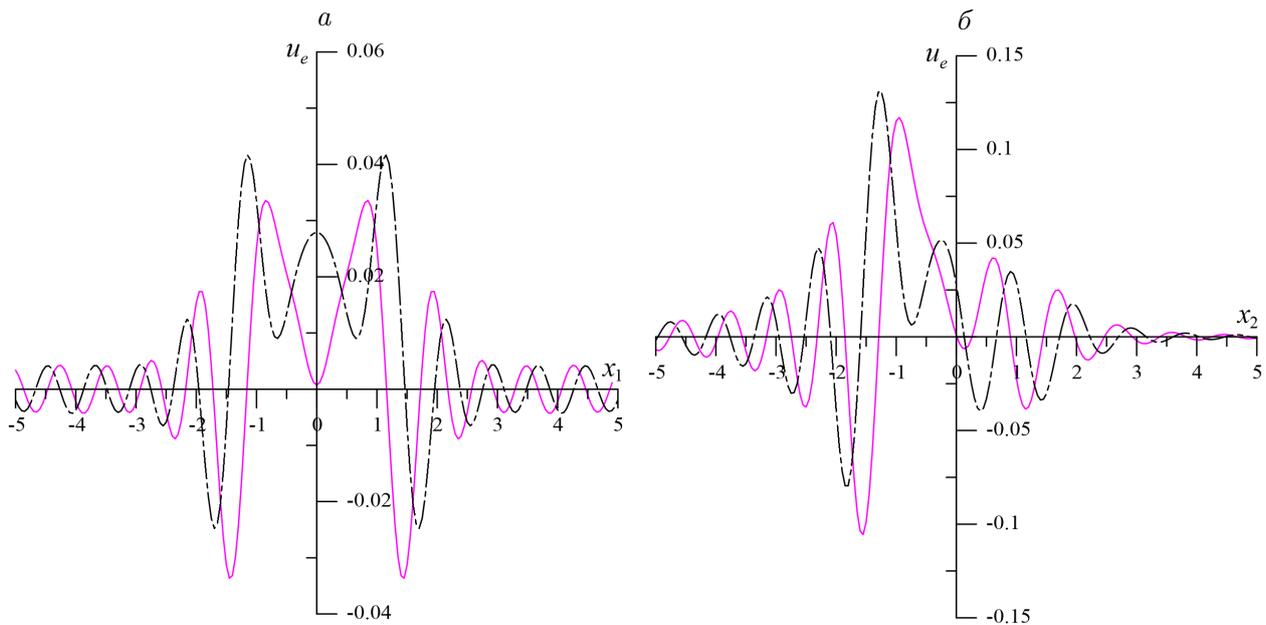


Рис. 5. Вещественная (сплошная линия) и мнимая (штриховая) части отраженного поля u_e из примера 3 на отрезках: $-5 \leq x_1 \leq 5$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ (*a*) и $x_1 = 0$, $-5 \leq x_2 \leq 5$, $x_3 = 0$ (*б*)

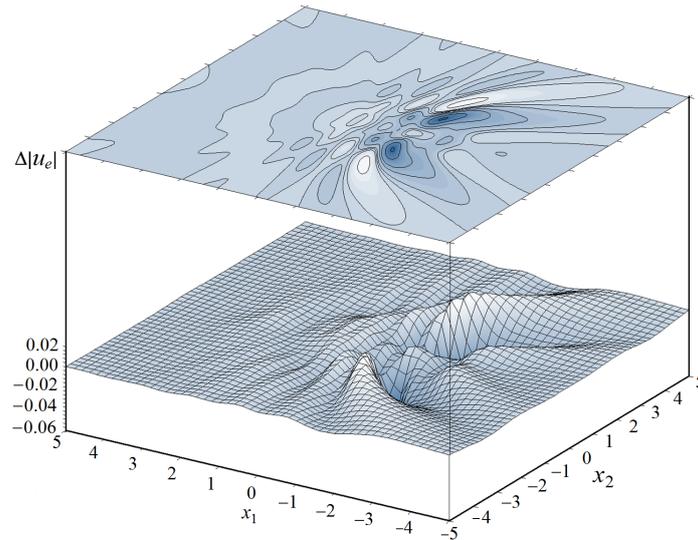


Рис. 6. Добавочное поле $\Delta|u_e|$ из примера 4 на квадрате $-5 \leq x_1 \leq 5$, $-5 \leq x_2 \leq 5$, $x_3 = 0$

$-5 \leq x_2 \leq 5$, $x_3 = 0$. На рис. 5 изображены вещественная (сплошная линия) и мнимая (штриховая) части отраженного поля u_e на отрезках $-5 \leq x_1 \leq 5$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ и $x_1 = 0$, $-5 \leq x_2 \leq 5$, $x_3 = 0$ соответственно.

Пример 4. В отличие от примера 3 границей включения является эллипсоид $(0.8, 2, 0.4)$ с центром в точке $(0, 0, -1)$.

На рис. 6 изображено значение добавочного поля $\Delta|u_e|$ на квадрате $-5 \leq x_1 \leq 5$, $-5 \leq x_2 \leq 5$, $x_3 = 0$.

Заключение

Изучены возможности численного решения стационарных задач дифракции акустических волн на трехмерных однородных включениях, сформулированных в виде эквивалентных этим задачам граничных интегральных уравнений Фредгольма первого рода с одной неизвестной функцией, которые ранее для численного решения задач дифракции не применялись. По результатам вычислительных экспериментов можно сделать вывод, что предложенный численный метод обладает достаточно высокой точностью и при больших значениях числа точек дискретизации M является методом второго порядка относительно “шага” h заданной на граничной поверхности сетки. Метод допускает эффективное распараллеливание, позволяет проводить расчеты в широком диапазоне волновых чисел и может быть использован для решения других задач математической физики, сформулированных в виде слабо сингулярных граничных или объемных интегральных уравнений Фредгольма. Дальнейшее развитие предложенного подхода к численному решению задач дифракции может быть связано с понижением его вычислительной сложности, например, за счет использования быстрых методов матрично-векторного умножения [23].

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 17-01-00682) и Программы фундаментальных исследований ДВО РАН (проект № 15-I-4-075).

Список литературы / References

- [1] Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1977. 656 с.
Samaraskii, A.A. The theory of difference schemes. New York; Basel: Marcel Dekker, 2001. 762 p.
- [2] Ihlenburg, F. Finite element analysis of acoustic scattering. New York: Springer-Verlag, 1998. 226 p.
- [3] Clayton, R., Engquist, B. Absorbing boundary conditions for acoustic and elastic wave equations // Bull. Seismol. Soc. Amer. 1977. Vol. 67, No. 6. P. 1529–1540.
- [4] Berenger, J.-P. A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves // J. Comput. Phys. 1994. Vol. 114, No. 2. P. 185–200.
- [5] Liu, Q.-H., Tao, J. The perfectly matched layer for acoustic waves in absorptive media // J. Acoust. Soc. Am. 1997. Vol. 102, No. 4. P. 2072–2082.
- [6] Купрадзе В.Д. Граничные задачи теории колебаний и интегральные уравнения. М.; Л.: ГТГИ, 1950. 280 с.
Kupradze, V.D. Boundary value problems in the oscillation theory and integral equations. M.; L.: GTGI, 1950. 280 p. (In Russ.)
- [7] Смагин С.И. Интегральные уравнения задач дифракции. Владивосток: Дальнаука, 1995. 203 с.
Smagin, S.I. Integral equations for diffraction problems. Vladivostok: Dalnauka, 1995. 203 p. (In Russ.)
- [8] Каширин А.А., Смагин С.И. Обобщенные решения интегральных уравнений скалярной задачи дифракции // Дифференц. уравнения. 2006. Т. 42, № 1. С. 79–90.
Kashirin, A.A., Smagin, S.I. Generalized solutions of the integral equations of a scalar diffraction problem // Differential Equations. 2006. Vol. 42, No. 1. P. 88–100.
- [9] Колтон Д., Кресс Р. Методы интегральных уравнений в теории рассеяния: Пер. с англ. М.: Мир, 1987. 311 с.
Colton, D., Kress, R. Integral equation methods in scattering theory. New York: John Wiley and Sons, 1983. 271 p.
- [10] Цецохо В.А., Воронин В.В., Смагин С.И. О решении задач дифракции потенциалами простого слоя // Докл. АН СССР. 1988. Т. 302, № 2. С. 323–327.
Tsetsokho, V.A., Voronin, V.V., Smagin, S.I. On the solution of diffraction problems using simple layer potentials // Dokl. Akad. Nauk SSSR. 1988. Vol. 302, No. 2. P. 323–327. (In Russ.)
- [11] Maystre, D., Vincent, P. Diffraction d'une onde electromagnetique plane par un objet cylindrique non infiniment conducteur de section arbitraire // Optics Commun. 1972. Vol. 5, No. 5. P. 327–330.
- [12] Marx, E. Single integral equation for wave scattering // J. Math. Phys. 1982. Vol. 23, No. 6. P. 1057–1065.
- [13] Kleinman, R.E., Martin, P.A. On single integral equations for the transmission problem of acoustics // SIAM J. Appl. Math. 1988. Vol. 48, No. 2. P. 307–325.
- [14] Каширин А.А. Исследование и численное решение интегральных уравнений трехмерных стационарных задач дифракции акустических волн: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Хабаровск, ВЦ ДВО РАН, 2006. 118 с.
Kashirin, A.A. Investigation and numerical solution of integral equations for three-dimensional stationary diffraction problems of acoustic waves: Dis. ... kand. fiz.-mat. nauk. Khabarovsk, VZ DVO RAN, 2006. 118 p. (In Russ.)

- [15] **Канторович Л.В., Акилов Г.П.** Функциональный анализ. М.: Наука, 1984. 752 с.
Kantorovich, L.V., Akilov, G.P. Functional analysis. Oxford: Pergamon Press Ltd., 1982. 589 p.
- [16] **Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.** Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979. 285 с.
Tikhonov, A.N., Arsenin, V.Y. Solution of Ill-posed problems. New York: John Wiley and Sons, 1977. 258 p.
- [17] **Воронин В.В., Цецохо В.А.** Интерполяционный метод решения интегрального уравнения 1 рода с логарифмической особенностью // Докл. АН СССР. 1974. Т. 216, № 6. С. 1209–1211.
Voronin, V.V., Tsetsokho, V.A. An interpolation method for solving an integral equation of the first kind with a logarithmic singularity // Dokl. Akad. Nauk SSSR. 1974. Vol. 216, No. 6. P. 1209–1211. (In Russ.)
- [18] **Atkinson, K.E.** A discrete Galerkin method for first kind integral equations with a logarithmic kernel // J. Integral Equations Appl. 1988. Vol. 1, No. 3. P. 343–364.
- [19] **Смагин С.И.** Численное решение интегрального уравнения I рода со слабой особенностью для плотности потенциала простого слоя // Журн. вычисл. математики и матем. физики. 1988. Т. 28, № 11. С. 1663–1673.
Smagin, S.I. Numerical solution of the integral equation of the first kind with a weak singularity for the density of a simple layer potential // USSR Comput. Mathematics and Math. Physics. 1988. Vol. 28, No. 6. P. 41–49.
- [20] **Каширин А.А., Смагин С.И.** О численном решении задач Дирихле для уравнения Гельмгольца методом потенциалов // Журн. вычисл. математики и матем. физики. 2012. Т. 52, № 8. С. 1492–1505.
Kashirin, A.A., Smagin, S.I. Potential-based numerical solution of Dirichlet problems for the Helmholtz equation // Comput. Mathematics and Math. Physics. 2012. Vol. 52, No. 8. P. 1173–1185.
- [21] **Бреббия К., Телес Ж., Вробел Л.** Методы граничных элементов: Пер. с англ. М.: Мир, 1987. 524 с.
Brebbia, C.A., Telles, J.C.F., Wrobel, L.C. Boundary element techniques: Theory and applications in engineering. Berlin: Springer-Verlag, 1984. 464 p.
- [22] **Каширин А.А., Смагин С.И.** О численном решении интегральных уравнений скалярной задачи дифракции // Докл. АН. 2014. Т. 458, № 2. С. 141–144.
Kashirin, A.A., Smagin, S.I. Numerical solution of integral equations for a scalar diffraction problem // Dokl. Mathematics. 2014. Vol. 90, No. 2. P. 549–552.
- [23] **Каширин А.А., Смагин С.И., Талтыкина М.Ю.** Применение мозаично-скелетонного метода при численном решении трехмерных задач Дирихле для уравнения Гельмгольца в интегральной форме // Журн. вычисл. математики и матем. физики. 2016. Т. 56, № 4. С. 625–638.
Kashirin, A.A., Smagin, S.I., Taltykina M.Yu. Mosaic-skeleton method as applied to the numerical solution of three-dimensional Dirichlet problems for the Helmholtz equation in integral form // Comput. Mathematics and Math. Physics. 2016. Vol. 56, No. 4. P. 612–625.
- [24] **Beale, J.T.** A grid-based boundary integral method for elliptic problems in three dimensions // SIAM J. Numer. Anal. 2004. Vol. 42, No. 2. P. 599–620.
- [25] **Tausch, J.** A spectral method for the fast solution of boundary integral formulations of elliptic problems // Integral Methods in Science and Engineering / C. Constanda, Z. Nashed, D. Rollins (Eds). Boston: Birkhauser, 2006. P. 289–297.

- [26] Saad, Y., Schultz, M. GMRES: A generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems // SIAM J. Sci. and Stat. Comput. 1986. Vol. 7, No. 3. P. 856–869.
- [27] Laliena, A.R., Rapun, M.-L., Sayas F.-J. Symmetric boundary integral formulations for Helmholtz transmission problems // Appl. Numer. Math. 2009. Vol. 59, No. 11. P. 2814–2823.
- [28] Kleefeld, A. The transmission problem for the Helmholtz equation in \mathbb{R}^3 // Comput. Methods Appl. Math. 2012. Vol. 12, No. 3. P. 330–350.
- [29] McLean, W. Strongly elliptic systems and boundary integral equations. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2000. 372 p.
- [30] Ершов Н.Е., Илларионова Л.В., Смагин С.И. Численное решение трехмерной стационарной задачи дифракции акустических волн // Вычисл. технологии. 2010. Т. 15, № 1. С. 60–76.
Ershov, N.E., Illarionova, L.V., Smagin, S.I. Numerical solution of a 3D stationary problem for diffraction of acoustic waves // Comput. Technologies. 2010. Vol. 15, No. 1. P. 60–76. (In Russ.)
- [31] Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Изд-во МГУ, 1999. 799 с.
Tikhonov, A.N., Samarskii, A.A. Equations of mathematical physics. New York: Dover, 2011. 800 p.
- [32] Ватсон Г.Н. Теория бесселевых функций. Ч. 1. М.: Изд-во иностр. лит., 1949. 799 с.
Watson, G.N. Treatise on the theory of Bessel functions. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1952. 804 p.

*Поступила в редакцию 2 августа 2016 г.,
с доработки — 2 мая 2017 г.*

Numerical solution of integral equations for the three-dimensional scalar diffraction problems

KASHIRIN, ALEKSEY A.*, SMAGIN, SERGEY I.

Computing Center Far Eastern Branch of the RAS, Khabarovsk, 680000, Russia

*Corresponding author: Kashirin, Aleksey A., e-mail: elomer@mail.ru

Purpose. The purpose of the article is to develop efficient algorithms for numerical solution of the diffraction (transmission) problem of stationary acoustic waves on three-dimensional homogeneous inclusions.

Methods. By using the combinations of simple and double layer potentials, two Fredholm boundary integral equations of the first kind with one unknown function are obtained for these potentials, each of which is equivalent to the original problem. When sampling these equations, a special method of averaging integral operators with weak singularities in the kernels is applied.

Outcomes. The obtained integral equations are approximated by systems of linear algebraic equations with easily-calculated coefficients, which are then solved numerically by means of the generalized method of minimal residuals (GMRES). A series of computing experiments for numerical solution of particular stationary three-dimensional diffraction problems of acoustic waves has been conducted.

Conclusions. Computing experiments have shown that the proposed numerical method possesses high accuracy in finding approximate solutions of these problems. It allows both effective parallelization and ability to perform calculations in a wide range of wave numbers and can be used to solve other problems of mathematical physics, formulated in the form of boundary integral equations.

Keywords: diffraction problem, Helmholtz equation, boundary integral equation, numerical method of solution.

Acknowledgements. The research was supported by RFBR (grant No. 17-01-00682) and Program for Fundamental Research Far Eastern Branch of the RAS (project No. 15-I-4-075).

Received 2 August 2016

Received in revised form 2 May 2017